EXERCICE 1

Racine cubique d'une matrice

Présentation générale

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet une racine cubique s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^3$. Dans ce cas, on dit que B est une racine cubique de A.

Partie I - Étude d'un exemple

Dans cette partie, on considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -12 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Nous allons déterminer toutes les racines cubiques de la matrice A.

√ **Q1.** Justifier qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, qu'il n'est pas nécessaire de déterminer explicitement, telle que $A = PDP^{-1}$ avec :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

√ **Q2.** Montrer qu'une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est une racine cubique de A si et seulement si $\Delta = P^{-1}BP$ est une racine cubique de D.

√ **Q3.** Soit $\Delta \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une racine cubique de D. Montrer que les matrices D et Δ commutent, puis en déduire que la matrice Δ est diagonale.

√ **Q4.** Déterminer l'ensemble des racines cubiques de D, puis l'ensemble des racines cubiques de A. On pourra se contenter de décrire ce dernier ensemble en fonction de P et de Δ.

Partie II - Dans un plan euclidien

Dans cette partie, on considère un plan euclidien orienté E muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B}$. On fixe également un réel $\theta \in \mathbb{R}$ et on note :

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

√ **Q5.** Quelle est la nature de l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est M ?

Q6. En déduire une racine cubique de la matrice M.

√ **Q7.** Soit $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale de déterminant -1. Montrer que N admet une racine cubique.

Partie III - Racines cubiques et diagonalisation

Dans toute cette partie, on considère une matrice diagonalisable $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{R}$ les valeurs propres **deux à deux distinctes** de la matrice A.

III.1 - Existence d'une racine cubique polynomiale

✓ **Q8.** Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une racine cubique de la matrice :

$$H_p(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}).$$

✓ **Q9.** Déduire de la question précédente que la matrice A admet une racine cubique. On pourra remarquer que A est semblable à une matrice diagonale par blocs où les blocs sur la diagonale sont de la forme $H_p(\lambda)$ avec $(p, \lambda) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$.

III.2 - Réduction d'une racine cubique

Dans cette sous-partie, on suppose de plus que la matrice A est inversible et on considère le polynôme :

$$Q(X) = \prod_{k=1}^{d} \left(X^3 - \lambda_k\right).$$

✓ **Q10.** Montrer que les nombres $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ sont non nuls.

✓ **Q11.** Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ que l'on écrit sous la forme $\lambda = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que l'équation $z^3 = \lambda$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ admet exactement trois solutions.

✓ **Q12.** En déduire que le polynôme Q est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.

Q13. Déduire des questions précédentes que si B est une racine cubique de A, alors la matrice B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

EXERCICE 2

La fonction $\ln(\Gamma)$

Présentation générale

Dans cet exercice, on souhaite déterminer les fonctions $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant :

(i) la fonction f est de classe C^1,

(ii) pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a $f(x+1) - f(x) = \ln(x)$,

(iii) la fonction f' est croissante,

(iv) la fonction f s'annule en 1, c'est-à-dire $f(1) = 0$.

Dans la suite, on note (C) l'ensemble de ces quatre conditions.

Partie I - Existence de la solution du problème étudié

Dans cette partie, on construit une fonction vérifiant les conditions de (C).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $u_n :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad u_n(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right).$$

√ **Q14.** Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

Dans tout le reste de cet exercice, on note $\varphi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \varphi(x) = -\ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x).$$

~ **Q15.** Justifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, puis montrer qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que la série $\sum_{n\geqslant 1} \varepsilon_n$ converge absolument et que :

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times]0, +\infty[, \quad u_n'(x) = \frac{x}{n(n+x)} + \varepsilon_n.$$

√ **Q16.** En déduire que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n'$ converge normalement sur tout segment $[a, b]$ inclus dans $]0, +\infty[$.

√ **Q17.** Montrer que la fonction φ vérifie les conditions de (C).

Partie II - Unicité de la solution

Dans cette partie, on montre que φ est l'unique fonction vérifiant les conditions de (C). On considère une fonction $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant les conditions de (C) et on pose $h = \varphi - g$.

Les questions **Q18** et **Q19** sont indépendantes.

Q18. Montrer que pour tout $x > 0$, on a $h(x+1) = h(x)$ et $h'(x+1) = h'(x)$.

Q19. Soient $x \in]0, 1]$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer successivement que :

$$\varphi'(p) - g'(1+p) \leqslant h'(x+p) \leqslant \varphi'(1+p) - g'(p), \qquad \varphi'(p) - g'(1+p) = h'(p) - \frac{1}{p}.$$

En déduire que :

$$\left|h'(x+p) - h'(p)\right| \leqslant \frac{1}{p}.$$

Q20. Déduire des deux questions précédentes que la fonction h' est constante sur $]0, +\infty[$.

Q21. Conclure que $\varphi = g$.

Partie III - La formule de duplication

Dans cette partie, on considère la fonction $\psi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \psi(x) = (x-1)\ln(2) + \varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln(\pi).$$

Q22. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a la relation :

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{N} u_n\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \overbrace{\underbrace{\frac{\sqrt{N+1}}{2N+1}}_{\text{ok}}}^{\text{ok}} \, \frac{\left(2^N N!\right)^2}{\underbrace{(2N)!}_{\text{ok}}}.$$

Q23. Déduire de la question précédente et de la formule de Stirling que $\psi(1) = 0$.

Q24. Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a :

$$(x-1)\ln(2) + \varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = \varphi(x) + \frac{1}{2}\ln(\pi).$$

EXERCICE 3

Temps d'attente avant une collision

Présentation générale

On considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose d'une urne contenant n boules numérotées par les entiers de 1 à n. On procède à une succession de tirages avec remise dans cette urne. On s'intéresse au nombre de tirages nécessaires pour tirer pour la seconde fois une boule déjà tirée auparavant.

Pour modéliser cette situation, on se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles indépendantes de loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On considère la variable aléatoire T_n définie de la façon suivante :

$$T_n = \min\{\, j \in [\![2, n+1]\!] \mid \exists i \in [\![1, j-1]\!],\quad X_i = X_j \,\}.$$

Par exemple, si on suppose que $n = 4$ et que l'évènement :

$$(X_1 = 1) \cap (X_2 = 3) \cap (X_3 = 2) \cap (X_4 = 3) \cap (X_5 = 4)$$

est réalisé, alors on a $T_n = 4$, car c'est au quatrième tirage que pour la première fois réapparait un résultat déjà obtenu.

L'objectif de cet exercice est de déterminer un équivalent de l'espérance de la variable aléatoire T_n lorsque $n \to +\infty$.

Partie I - Une expression de l'espérance de T_n

Q25. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire T_n.

Dans la suite de cette partie, on considère un entier $k \in [\![1, n]\!]$ et la variable aléatoire $Z = (X_1, \ldots, X_k)$.

Q26. Justifier que Z suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]^k$.

Q27. Dans cette question, on considère l'évènement :

$$A = \{(a_1, \ldots, a_k) \in [\![1, n]\!]^k \mid \text{les éléments } a_1, \ldots, a_k \text{ sont deux à deux distincts}\}.$$

Exprimer le cardinal de A en fonction de n et de k, puis en déduire que :

$$P(T_n > k) = P(Z \in A) = \frac{n!}{(n-k)!}\frac{1}{n^k}.$$

On remarque que le résultat de la question précédente est encore valable pour $k = 0$.

Q28. Justifier que la variable aléatoire T_n est d'espérance finie et que l'on a :

$$\mathrm{E}(T_n) = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{n!}{(n-\ell)!}\frac{1}{n^\ell}.$$

Partie II - Une expression intégrale de l'espérance

Dans cette partie, on détermine une expression de l'espérance de T_n sous la forme d'une intégrale.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale :

$$I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\, dt.$$

√ **Q29.** Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale I_k est convergente.

√ **Q30.** Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $I_k = k!$.

Q31. En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t}\, dt$ converge, puis que :

$$\mathrm{E}(T_n) = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t}\, dt.$$

Partie III - Un équivalent de l'espérance

Dans cette partie, on détermine un équivalent de l'intégrale obtenue à la question **Q31** lorsque $n \to +\infty$.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les intégrales :

$$I_n = \int_0^{n} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t}\, dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_n^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t}\, dt.$$

Les résultats de la partie précédente impliquent la convergence de ces deux intégrales.

III.1 - Étude de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Q32. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant un changement de variable, établir que :

$$J_n = e^{-n} \int_0^{+\infty} \left(2 + \frac{v}{n}\right)^n e^{-v}\, dv.$$

Q33. Montrer que la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad K_n = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{v}{2n}\right)^n e^{-v}\, dv$$

est bornée. On pourra utiliser librement l'inégalité $1 + x \leqslant e^x$ valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Q34. En déduire que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

III.2 - Étude de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Dans cette sous-partie, on définit la fonction $f_n :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall u \in]0,+\infty[, \quad f_n(u) = \begin{cases} \left(1+\dfrac{u}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-u\sqrt{n}} & \text{si} \quad u < \sqrt{n} \\ 0 & \text{si} \quad u \geqslant \sqrt{n}. \end{cases}$$

Q35. Montrer que :

$$I_n = \sqrt{n}\int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-u\sqrt{n}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{n}\int_0^{+\infty} f_n(u)\,\mathrm{d}u.$$

Q36. Montrer que pour tout $u \in]0, \sqrt{n}[$, on a l'égalité :

$$\ln(f_n(u)) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\,\frac{u^k}{n^{\frac{k}{2}-1}}.$$

Q37. En déduire que pour tout $u \in]0, \sqrt{n}[$, on a les inégalités :

$$\left|\ln(f_n(u)) + \frac{u^2}{2}\right| \leqslant \frac{u^3}{3\sqrt{n}}, \qquad \ln(f_n(u)) \leqslant -\frac{u^2}{6}.$$

Q38. Justifier que la fonction $u \mapsto \mathrm{e}^{-u^2/2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, puis établir que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f_n(u)\,\mathrm{d}u\right) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u.$$

III.3 - Conclusion

Q39. En admettant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, déterminer un équivalent de $\mathrm{E}(T_n)$ lorsque $n \to +\infty$.

FIN

25/39 abbordé