EXERCICE
Autour de la série harmonique

Dans cet exercice, on s'intéresse à la série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$.

Le but est de démontrer que celle-ci est une série divergente. On donne ensuite une application probabiliste des résultats obtenus.

On pose :

$$\forall n \geq 1,\ H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Q1. Énoncer la définition de convergence pour une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ de nombres réels ou complexes.

Q2. Pour quelle(s) valeur(s) du réel α, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est-elle convergente ?

Q3. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \geq 1 + x.$$

Q4. En déduire alors que :

$$\forall n \geq 1,\ \mathrm{e}^{H_n} \geq \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right),$$

Σ Pn ..

puis, en remarquant l'égalité $1 + \frac{1}{k} = \frac{k+1}{k}$, que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\mathrm{e}^{H_n} \geq n + 1$.

Q5. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{H_n} = +\infty.$$

En déduire la divergence de la série harmonique.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient initialement une boule noire. On effectue n tirages dans l'urne de la manière suivante :
- au cours de chaque tirage, on tire une boule de l'urne, puis on la remet dans celle-ci en y ajoutant une boule blanche ;
- on considère les n tirages indépendants.

Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, on note X_k la variable aléatoire définie par :
- $X_k = 0$ si la boule tirée lors du k-ième tirage est blanche ;
- $X_k = 1$ si la boule tirée lors du k-ième tirage est noire.

On définit enfin la variable Z_n par :

$$Z_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Q6. Que représente la variable Z_n ?

Q7. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Reconnaître la loi de X_k et préciser son espérance.

Q8. Vérifier que l'espérance de Z_n est H_n.

Q9. En utilisant **Q4**, déterminer une valeur de n pour laquelle on peut espérer obtenir en moyenne au moins 4 fois la boule noire.
On pourra utiliser le fait suivant : $\mathrm{e}^4 \in]54, 55[$.

PROBLÈME 1
Étude de matrices tridiagonales particulières

Présentation générale

Le but de ce problème est d'étudier quelques propriétés (diagonalisabilité, valeur du déterminant) de certaines matrices tridiagonales.

Plus précisément, pour un entier naturel $n \geq 2$, on considère $n-1$ couples de nombres complexes (a_k, b_k), pour k variant de 1 à n, tels que $a_k b_k = -1$ et on s'intéressera alors à la matrice suivante de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & 1 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & b_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

On posera également $M_1 = (1)$ (matrice carrée d'ordre 1 dont le seul coefficient vaut 1).

Les quatre parties de ce problème sont indépendantes. Elles peuvent être traitées séparément.

Notations

- On note $\chi_A(X)$ le polynôme caractéristique d'une matrice carrée A et $E_\lambda(A)$ le sous-espace propre de A associé à un scalaire λ ;
- on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (respectivement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}$ (respectivement dans $\mathbb{R}$) ;
- on note $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ (respectivement $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) l'espace vectoriel des matrices colonnes à n lignes à coefficients dans $\mathbb{C}$ (respectivement dans $\mathbb{R}$) ;
- on note I_n la matrice identité d'ordre n ;
- on note $\bar{z}$ le conjugué d'un nombre complexe z.

Partie I - Un exemple dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$

Dans cette partie, on considère que n est égal à 3 et on pose $a_1 = a_2 = -1$ et $b_1 = b_2 = 1$.

On s'intéresse donc à la matrice M_3 de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ définie par :

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Q10. Justifier que M_3 vérifie bien les données de l'énoncé.

Q11. Déterminer le rang de $M_3 - \mathrm{I}_3$ et en déduire que M_3 admet au moins une valeur propre réelle à préciser.

Q12. Déterminer $\chi_{M_3}(X)$. Ce polynôme est-il scindé dans $\mathbb{R}$?

Q13. Déduire de la question précédente la valeur du déterminant de M_3.

Q14. Justifier que M_3 admet 3 valeurs propres complexes distinctes, dont une seule est réelle et les deux autres conjuguées. En déduire que M_3 est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et donner, sans aucun calcul, la dimension de ses sous-espaces propres.

On note dans la suite λ l'unique valeur propre réelle de M_3 et μ l'unique valeur propre complexe de M_3 dont la partie imaginaire est strictement positive. Ainsi, les valeurs propres de M_3 sont λ, μ et $\overline{\mu}$.

Q15. Déterminer une base du sous-espace propre $E_\lambda(M_3)$.

Q16. Déterminer les nombres complexes p tels que :

$$M_3\begin{pmatrix} p \\ i\sqrt{2} \\ -p \end{pmatrix} = (1+i\sqrt{2})\begin{pmatrix} p \\ i\sqrt{2} \\ -p \end{pmatrix}.$$

En déduire une base du sous-espace propre $E_\mu(M_3)$.

Q17. Soit $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, une matrice à coefficients réels, $z \in \mathbb{C}$ et :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C}).$$

Montrer que si X est un vecteur propre de N associé à la valeur propre z, alors le vecteur :

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ \overline{x_3} \end{pmatrix},$$

est un vecteur propre de N associé à la valeur propre $\overline{z}$.
En déduire une base de $E_{\overline{\mu}}(M_3)$.

Partie II - Cas général dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

Uniquement dans cette partie, on considère que l'entier naturel n vaut 2. On s'intéresse donc à la matrice M_2 de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ définie par :

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ a_1 & 1 \end{pmatrix},$$

où a_1 et b_1 sont deux nombres complexes tels que $a_1 b_1 = -1$.

Q18. Déterminer $\chi_{M_2}(X)$.

Q19. Si on considère a_1 et b_1 réels, la matrice M_2 est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? Trigonalisable dans $\mathbb{R}$?

Q20. La matrice M_2 est-elle diagonalisable dans $\mathbb{C}$?
Aucune diagonalisation effective n'est demandée.

Q21. Donner la valeur du déterminant de M_2.

Objectif de la suite du problème

Dans la **partie III**, nous démontrerons certains résultats liés à la suite de Fibonacci.

Dans la **partie IV**, nous déterminerons la valeur du déterminant des matrices tridiagonales vérifiant les conditions de l'énoncé.

Partie III - La suite de Fibonacci

On définit la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\geq 0}$ de la manière suivante : $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ et :

$$\forall n \geq 0,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n\,.$$

Q22. Montrer que pour tout entier naturel n, F_n est un entier naturel.

Q23. Résoudre l'équation caractéristique associée à $(F_n)_{n\geq 0}$. En déduire l'expression de F_n pour tout entier naturel n.

On considère la fonction récursive suivante, prenant en argument un entier naturel n, et renvoyant la valeur de F_n :

```
def Fibo(n):
    ''' n : entier naturel.
    Renvoie la valeur de Fn'''
    if n<=1:
        return 1
    return Fibo(n-1)+Fibo(n-2)
```

Q24. Les trois questions suivantes sont liées à la fonction `Fibo`.

a) À l'aide d'un schéma, représenter les différents appels récursifs lors de l'exécution de l'instruction `Fibo(4)`.

b) Expliquer, de manière simple et sans calcul, pourquoi cette fonction a une complexité de calcul élevée.

c) Écrire une fonction `FiboV2`, prenant en argument un entier naturel n et renvoyant la valeur du terme F_n. Cette fonction ne devra pas être récursive et devra avoir un coût de calcul moins élevé que `Fibo`.

Partie IV - Calcul du déterminant dans le cas général

On reprend les notations de la présentation générale et on considère donc les matrices M_n pour tout entier naturel $n \geq 1$. On note alors d_n le déterminant de M_n.

On rappelle que la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\geq 0}$ est définie de la manière suivante : $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ et :

$$\forall n \geq 0,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n\,.$$

Q25. Donner les valeurs de d_1 et de d_2 puis calculer d_3.

Q26. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $d_{n+2} = d_{n+1} + d_n$.
On pourra développer d_{n+2} par rapport à la dernière ligne de M_{n+2}.

Q27. En déduire que pour entier naturel $n \geq 1$, $d_n = F_n$.

PROBLÈME 2
Calcul d'une borne inférieure

Présentation générale

L'objectif de ce problème est d'étudier l'existence de la borne inférieure suivante :

$$m = \inf\left\{\int_0^1 \frac{(x^2-ax-b)^2}{1+x}\,\mathrm{d}x,\ (a,b)\in\mathbf{R}^2\right\}.$$

Plus précisément, nous allons montrer que cette borne inférieure existe et est atteinte en un unique couple (a,b) de $\mathbf{R}^2$. Deux méthodes seront utilisées :

- l'une, utilisant un produit scalaire sur un espace vectoriel bien choisi ;
- l'autre, en minimisant une fonction convenable de deux variables.

Dans la suite, $E = \mathbf{R}[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et $\mathbf{R}_1[X]$ le sous-espace vectoriel de E constitué des polynômes dont le degré est inférieur ou égal à 1.

Partie I - Étude d'une suite d'intégrales

On pose, pour tout entier naturel n :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

Q28. Calculer I_0.

Q29. Montrer que :

$$\forall n\geq 0,\ I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Q30. En déduire les valeurs de I_1, I_2, I_3 et vérifier que :

$$I_4 = -\frac{7}{12} + \ln(2).$$

Q31. Montrer que $(I_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.

Q32. Montrer que $(I_n)_{n\geq 0}$ converge et que sa limite est 0.

Q33. Montrer que :

$$\forall n\geq 1,\ (-1)^n I_n = \ln(2) + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}.$$

Q34. En déduire que la série $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}$ converge et donner sa somme.

Q35. En utilisant **Q29** et **Q31**, montrer que :

$$\forall n\geq 1,\ \frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2n},$$

et en déduire un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Partie II - Étude d'un produit scalaire

On rappelle que $E = \mathbb{R}[X]$ et on pose :

$$\forall (P,Q) \in E^2,\ \langle P,Q\rangle = \int_0^1 \frac{P(x)Q(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

Q36. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur E. On note $\|\cdot\|$ la norme associée.

Q37. Les vecteurs 1 et X sont-ils orthogonaux pour ce produit scalaire ?

Q38. On note $L(X^2)$ le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$. Justifier l'existence de deux réels α et β tels que :

$$L(X^2) = \alpha X + \beta.$$

Q39. Que peut-on dire du polynôme $X^2 - L(X^2)$ par rapport à l'espace vectoriel $\mathbb{R}_1[X]$? En déduire que (α,β) est solution du système linéaire :

$$\begin{cases} I_1\alpha + I_0\beta &= I_2 \\ I_2\alpha + I_1\beta &= I_3 \end{cases}.$$

Q40. Justifier l'existence du réel m et l'égalité suivante :

$$m = \|X^2 - \alpha X - \beta\|^2.$$

On ne demande pas de simplifier cette expression.

Partie III - Utilisation d'une fonction de deux variables

Dans cette partie, on admet l'existence de m et le fait que cette borne inférieure soit atteinte en un unique couple de réels. Le but est de déterminer ce couple sans utilisation d'un produit scalaire.

On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ f((a,b)) = \int_0^1 \frac{(x^2 - ax - b)^2}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

Q41. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ f((a,b)) = a^2 I_2 + b^2 I_0 + 2abI_1 - 2aI_3 - 2bI_2 + I_4.$$

Il n'est pas demandé de remplacer I_0, I_1, I_2, I_3 et I_4 par leur valeur.

Q42. Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Q43. Montrer que f admet un unique point critique sur $\mathbb{R}^2$.
On pourra utiliser le fait que $\ln(2)$ appartient à $[0.68, 0.7]$.

Q44. Répondre au problème posé en déterminant le couple cherché.

FIN