CentraleSupelec 2024 MP Mathématiques 2
Proposition de corrigé

raphaelmathematiques@gmail.com

I Etude de l'opérateur de différence finie

Q 1.

$\psi : P \in \mathbb{K}[X] \mapsto P(X+1)$ et $\mathrm{Id}_{\mathbb{K}[X]}$ sont des endomorphismes de $\mathbb{K}[X]$ et $\Delta = \psi - \mathrm{Id}_{\mathbb{K}[X]}$.
Puisque $\mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$ est un espace vectoriel, on en déduit que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

Q 2.

Si P est constant alors $\Delta(P) = 0$.

Supposons désormais que $d := \deg(P) \geq 1$. En écrivant $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, on a

$$\begin{aligned}\Delta(P) &= \sum_{k=0}^{d} a_k \left((X+1)^k - X^k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{d} a_k \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i \\ &= \sum_{i=0}^{d-1} \left(\sum_{k=i+1}^{d} a_k \binom{k}{i} \right) X^i\end{aligned}$$

Puisque $a_d \binom{d}{d-1} = d a_d \neq 0$ le degré de $\Delta(P)$ vaut $d-1$.

Ainsi, $\boxed{\deg(\Delta(P)) = \begin{cases} -\infty & \text{si } P \text{ est constant} \\ \deg(P) - 1 & \text{sinon} \end{cases}}$

Q 3.

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. D'après **Q 2.**, $\Delta\left(\mathbb{K}_d[X]\right) \subset \mathbb{K}_{d-1}[X]$. Puisque $\mathbb{K}_{d-1}[X] \subset \mathbb{K}_d[X]$ on en déduit que Δ induit un endomorphisme sur $\mathbb{K}_d[X]$.

Q 4.

Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{K}_d[X]$.

$$P \in \ker(\Delta_d) \iff P(X+1) = P(X)$$

Si $P \in \mathbb{K}_d[X]$ vérifie $P(X+1) = P(X)$, alors par récurrence immédiate,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) - P(0) = 0$$

P est donc constant car $P(X) - P(0)$ a une infinité de racines donc est le polynôme nul.
Réciproquement, tout polynôme constant vérifie $P(X+1) = P(X)$
Ainsi, $\boxed{\ker(\Delta_d) = \mathbb{K}}$

Puis, d'après **Q 2.**, $\operatorname{Im}(\Delta_d) \subset \mathbb{K}_{d-1}[X]$.
D'après le théorème du rang,

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(\Delta_d) &= \dim(\mathbb{K}_d[X]) - \dim(\ker(\Delta_d)) \\
&= d + 1 - 1 \\
&= d \\
&= \dim(\mathbb{K}_{d-1}[X])
\end{aligned}$$

Par inclusion et égalité de dimension on obtient $\boxed{\operatorname{Im}(\Delta_d) = \mathbb{K}_{d-1}[X]}$

Q 5.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

$$\begin{aligned}
P \in \ker\Delta &\iff P(X+1) = P(X) \\
&\iff P \in \mathbb{K}\ \text{(comme précédemment)}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\ker\Delta = \mathbb{K}}$

Puis Δ est surjective car

$$\begin{aligned}
\Delta(\mathbb{K}[X]) &= \Delta\left(\bigcup_{d\in\mathbb{N}} \mathbb{K}_d[X]\right) \\
&= \bigcup_{d\in\mathbb{N}} \Delta(\mathbb{K}_d[X]) \\
&= \bigcup_{d\in\mathbb{N}} \mathbb{K}_d[X] \\
&= \mathbb{K}[X]
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\operatorname{Im}\Delta = \mathbb{K}[X]}$

Si h est polynomiale, alors par surjectivité de Δ il existe une solution à (E_h), notons en une P. Puis, soit $Q \in \mathbb{K}[X]$, on a

$$\begin{aligned} Q \text{ est une solution de } (E_h) &\iff \Delta(Q) = h \\ &\iff \Delta(Q) = \Delta(P) \\ &\iff Q - P \in \operatorname{Ker}(\Delta) \\ &\iff Q \in P + \mathbb{K} \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\text{les solutions polynomiales de } (E_h) \text{ sont l'espace affine } P + \mathbb{K}}$

Q 6.

On vérifie facilement que $\dfrac{1}{2}\left(X - \dfrac{1}{2}\right)^2$ est solution de (E_h).

Ainsi $\boxed{\text{les solutions polynomiales de } (E_h) \text{ sont l'espace affine } \dfrac{1}{2}\left(X - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \mathbb{K}}$

Q 7.

D'après **Q 2.**, $\Delta_d\left(\mathbb{K}_d[X]\right) \subset \mathbb{K}_{d-1}[X]$, par récurrence immédiate on obtient :

$$\forall k \in [\![1, d]\!],\ \Delta_d^k\left(\mathbb{K}_d[X]\right) \subset \mathbb{K}_{d-k}[X]$$

Ainsi, $\Delta_d^{d+1} = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{K}[X])}$ $\boxed{\text{donc } \Delta_d \text{ est annulé par } X^{d+1}}$.

Δ_d est donc nilpotent, s'il était diagonalisable il serait l'endomorphisme nul. Or c'est faux pour $d \geq 1$ car $\Delta(X) = 1 \neq 0$.
Ainsi, $\boxed{\Delta_d \text{ est diagonalisable si et seulement si } d = 0}$

II Fonctions entières

Q 8.

Soit $(f, g) \in \mathcal{E}^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. La fonction $\lambda f + \mu g$ est d'après le cours développable en série entière, son rayon de convergence étant supérieur ou égal au minimum de ceux de f et g. Comme les rayons de convergence de f et g sont infinis on en déduit que $\boxed{\lambda f + \mu g \in \mathcal{E}}$.
Par produit de Cauchy, on en déduit également que $\boxed{fg \in \mathcal{E}}$

Q 9.

Soit $k \in \mathbb{Z}$. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n : t \in [0, 1] \mapsto a_n e^{2i\pi(n-k)t}$$

La série de fonctions $\sum\limits_{n \geq 0} u_n$ converge normalement donc uniformément sur [0,1] car

Pour tout $n \in \mathbb{N},\ t \in [0, 1],\ |u_n(t)| \leq |a_n|$ et $\sum\limits_{n \geq 0} a_n$ converge absolument $(f \in \mathcal{E})$

Ainsi par permutation somme-intégrale, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(\omega(t))\,\omega(t)^{-k}dt &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{2i\pi(n-k)t}dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^1 e^{2i\pi(n-k)t}dt\end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\displaystyle\int_0^1 e^{2i\pi(n-k)t}dt = \begin{cases} 1 & \text{si k=n} \\ \left[\frac{1}{2i\pi(n-k)}e^{2i\pi(n-k)t}\right]_0^1 = 0 & \text{si } k \neq n \end{cases}$

Finalement, $\boxed{\displaystyle\int_0^1 f(\omega(t))\,\omega(t)^{-k}dt = \begin{cases} a_k & \text{si } k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$

Q 10.

Soit $p \in \mathbb{Z}$ et $t \in [0,1]$.
On a

$$\begin{aligned} e^{\omega(t)} - 1 = 0 &\iff e^{\omega(t)} = 1 \\ &\iff e^{\cos(2\pi t)}e^{i\sin(2\pi t)} = 1 \\ &\iff \begin{cases} \cos(2\pi t) = 0 \\ \sin(2\pi t) \equiv 0 \mod 2\pi \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} t \in \{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\} \\ t \in \{0, \frac{1}{2}, 1\} \end{cases}\end{aligned}$$

La dernière équivalence montre donc que

$$\forall t \in [0,1],\ e^{\omega(t)} - 1 \neq 0$$

Puis, $t \in [0,1] \mapsto \dfrac{\omega(t)^{p+1}}{e^{\omega(t)} - 1}$ est bien définie et continue donc $\boxed{I_p \text{ est bien définie.}}$

Q 11.

Soit $\zeta \in \mathbb{U}$. On a

$$\begin{aligned} e^{\zeta} - 1 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\zeta^n}{n!} \\ &= \zeta\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\zeta^n}{(n+1)!}\right) \\ &= \zeta\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\zeta^n}{(n+1)!}\right) \\ &= \zeta\left(1 + \zeta\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\zeta^n}{(n+2)!}\right)\end{aligned}$$

Définissons pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\boxed{\beta(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+2)!}}$

On a bien $\beta \in \mathcal{E}$ car la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{(n+2)!}$ a pour rayon de convergence $+\infty$ (série exponentielle).

Soit $\zeta \in \mathbb{U}$, on a $|\beta(\zeta)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\zeta^n|}{(n+2)!} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)!} = e - 2$.

Or, exp est strictement convexe car deux fois dérivable et $\exp'' = \exp > 0$
Ainsi,

$$\forall t \in]0,1[,\ e^t < (1-t)e^0 + te^1$$

Par stricte croissance de l'intégrale car les fonctions en jeu sont continues :

$$\int_0^1 e^t dt < \int_0^1 (1-t)dt + e\int_0^1 tdt$$

Donc

$$e - 1 < \frac{1}{2} + \frac{e}{2}$$

Donc

$$e - 2 < 1$$

Par ailleurs, $e - 2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)!} \geq \frac{1}{2} > 0$

Donc en posant $\boxed{C := e - 2}$, on a $C \in]0,1[$ et

$$\forall \zeta \in \mathbb{U},\ e^\zeta - 1 = \zeta\left(1 + \zeta\beta(\zeta)\right) \quad \text{et} \quad |\beta(\zeta)| \leq C$$

Q 12.

Soit $\zeta \in \mathbb{U}$ et $p \in \mathbb{Z}$. Puisque $|\zeta\beta(\zeta)| \leq |\beta(\zeta)| \leq C < 1$ on en déduit que $\frac{1}{1+\zeta\beta(\zeta)} = \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \zeta^j \beta(\zeta)^j$

Donc $\frac{\zeta^{p-1}}{1+\zeta\beta(\zeta)} = \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \zeta^{j+p-1} \beta(\zeta)^j$. Or d'après **Q 11.**, $\frac{\zeta^{p-1}}{1+\zeta\beta(\zeta)} = \frac{\zeta^p}{e^\zeta - 1}$

Donc $\boxed{\frac{\zeta^p}{e^\zeta - 1} = \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \zeta^{j+p-1} \beta(\zeta)^j}$

Q 13.

Soit $p \in \mathbb{N}$. On définit pour tout $j \in \mathbb{N}$, $f_j : t \in [0,1] \mapsto (-1)^j \omega(t)^{j+p} \beta\left(\omega(t)\right)^j$. f_j est continue et

$$\forall j \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,1]\ |f_j(t)| \leq C^j \text{ et } \sum_{j \geq 0} C^j \text{ converge car } C \in]0,1[$$

Ainsi, $\sum_{j \geq 0} f_j$ converge normalement donc uniformément sur $[0,1]$. Par interversion somme intégrale on obtient

$$I_p = \int_0^1 \frac{\omega(t)^{p+1}}{e^{\omega(t)}-1}dt = \int_0^1 \sum_{j=0}^{+\infty}(-1)^j\omega(t)^{j+p}\beta\left(\omega(t)\right)^j dt = \sum_{j=0}^{+\infty}(-1)^j \int_0^1 \omega(t)^{j+p}\beta\left(\omega(t)\right)^j dt$$

Or, $\beta \in \mathcal{E}$ et $\mathcal{E}$ est stable par produit d'après **Q 8.** donc pour tout entier j, $\beta^j \in \mathcal{E}$.
Ainsi, d'après **Q 9.** si $j > 0$, on a $\displaystyle\int_0^1 \omega(t)^{j+p}\beta\left(\omega(t)\right)^j dt = 0$ car $-(j+p) \notin \mathbb{N}$

Enfin, $\boxed{I_p = \int_0^1 \omega(t)^p dt = \int_0^1 e^{2pi\pi t}dt = \begin{cases} 0 & \text{si } p \in \mathbb{N}^* \\ 1 & \text{si } p = 0 \end{cases}}$

III Polynômes de Bernoulli

Q 14.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$. On a $B_n(z) = n!\displaystyle\int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}\frac{\omega(t)^{k+1-n}}{e^{\omega(t)}-1}dt.$

On définit pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g_k : t \in [0,1] \mapsto \dfrac{z^k}{k!}\dfrac{\omega(t)^{k+1-n}}{e^{\omega(t)}-1}$ qui est bien continue.

On a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 |g_k(t)|dt \le \left(\int_0^1 \frac{dt}{|e^{\omega(t)}-1|}\right)\frac{|z|^k}{k!}$. Or, $\displaystyle\sum_{k\ge 0}\frac{|z|^k}{k!}$ converge (série exponentielle)

Par comparaison, $\displaystyle\sum_{k\ge 0}\int_0^1 |g_k(t)|dt$ converge. Ainsi, d'après le cours (théorème admis), l'interversion somme intégrale est licite et :

$$B_n(z) = n!\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{k!}\int_0^1 \frac{\omega(t)^{k+1-n}}{e^{\omega(t)}-1}dt = n!\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{k!}I_{k-n}$$

Enfin, d'après **Q 13.**, pour tout $k \ge n+1$, $I_{k-n} = 0$, d'ou $\boxed{B_n(z) = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}I_{k-n}}$

Ayant $n!\dfrac{1}{n!}I_0 = 1$, on en déduit que $\boxed{B_n \text{ est un polynôme unitaire de degré } n.}$

Q 15.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ B_n' = n!\sum_{k=1}^{n}k\frac{X^{k-1}}{k!}I_{k-n} = n!\sum_{k=1}^{n}\frac{X^{k-1}}{(k-1)!}I_{k-1-(n-1)} = n\cdot(n-1)!\sum_{k=0}^{n-1}\frac{X^k}{k!}I_{k-(n-1)} = \boxed{nB_{n-1}}$$

Q 16.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$. Utilisons la définition de $B_n(z)$:

$$\begin{aligned} B_n(z+1) - B_n(z) &= n!\int_0^1 \frac{e^{z\omega(t)}e^{\omega(t)}}{\left(e^{\omega(t)}-1\right)\omega(t)^{n-1}}dt - n!\int_0^1 \frac{e^{z\omega(t)}}{\left(e^{\omega(t)}-1\right)\omega(t)^{n-1}}dt \\ &= n!\int_0^1 \frac{e^{z\omega(t)}\left(e^{\omega(t)}-1\right)}{\left(e^{\omega(t)}-1\right)\omega(t)^{n-1}}dt \\ &= n!\int_0^1 e^{z\omega(t)}\omega(t)^{1-n}dt \end{aligned}$$

Or, $z' \in \mathbb{C} \mapsto e^{zz'} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n z'^n}{n!}$, appartient à $\mathcal{E}$ donc d'après **Q 9.** on a $\displaystyle\int_0^1 e^{z\omega(t)}\omega(t)^{1-n} = \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}$

Finalement, $\boxed{B_{n+1}(z) - B_n(z) = nz^{n-1}}$

Q 17.

Ecrivons $h = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et définissons $P := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} B_{k+1}(X) \in \mathbb{C}[X]$

On a

$$\begin{aligned}
\Delta(P) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}\Delta(B_{k+1}(X)) && \text{(Linéarite de } \Delta\text{)}\\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}\left(B_{k+1}(X+1) - B_{k+1}(X)\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k X^k && \text{(d'après } \textbf{Q 16.}\text{)}\\
&= h
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{P \text{ est une solution polynomiale de } (E_h).}$

Q 18.

Montrons d'abord que $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie ces propriétés :

· On a bien $B_0 = 1$ (B_0 est de degré 0 et est unitaire d'apres **Q 14.**)

· $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ B_n' = nB_{n-1}$ (d'après **Q 15.**)

· Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\displaystyle\int_0^1 B_n(t)dt = \int_0^1 \frac{B_{n+1}'(t)}{n+1}dt = \frac{B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0)}{n+1} = 0$ (d'après **Q 16.**)

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes vérifiant les propriétés énoncées ci-dessus. Montrons par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, H_n : « $B_n = P_n$» est vraie.

<u>Initialisation</u> : $B_0 = 1 = P_0$

<u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que H_n est vraie. Alors, $(B_{n+1} - P_{n+1})' = (n+1)(B_n - P_n) = 0$.
Donc, $\exists \lambda \in \mathbb{C},\ B_{n+1} - P_{n+1} = \lambda$.
Puis, $\lambda = \displaystyle\int_0^1 (B_{n+1}(t) - P_{n+1}(t))dt = \int_0^1 B_{n+1}(t)dt - \int_0^1 P_{n+1}(t)dt = 0$. Donc, $B_n = P_n$.

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ B_n = P_n}$

Q 19.

Montrons que $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les propriétés de **Q 18.**.

· On a $H_0 = 1 \cdot B_0(1-X) = 1$ car $B_0 = 1$

· Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $H_n'(X) = (-1)^{n+1}B_n'(1-X) = (-1)^{n-1}nB_{n-1}(1-X) = nH_{n-1}$

· Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 H_n(t)dt &= (-1)^n \int_0^1 B_n(1-t)dt \\ &= (-1)^n \int_0^1 B_n(t)dt = 0 \text{ (changement de variable affine)}\end{aligned}$$

Ainsi, d'après **Q 18.**, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ H_n = B_n}$

Q 20.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, alors $\dfrac{x}{e^x - 1} = \dfrac{x}{\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{x^k}{k!}} = \dfrac{1}{\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{x^k}{(k+1)!}}$.

On obtient alors que $\forall x \in \mathbb{R},\quad \psi(x) = \dfrac{1}{\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{x^k}{(k+1)!}}$ (l'expression reste vraie pour $x = 0$).

Puisque $x \in \mathbb{R} \mapsto \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{x^k}{(k+1)!}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (cette série entière a un rayon de convergence infini) on en déduit par composition avec la fonction inverse (aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$) que $\boxed{\psi \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty}$

On en déduit alors que les dérivées partielles de u existent et sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc $\boxed{u \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}^2}$

Q 21.

On a $\boxed{\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = xu(x,t)}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après le théorème de Schwarz (à l'ordre n), on obtient

$$\begin{aligned}\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t) &= \frac{\partial^n}{\partial x^n}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \\ &= \frac{\partial^n}{\partial x^n}(xu(x,t)) \\ &= x\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t) + \binom{n}{1}\frac{dx}{dx}\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}}(x,t) \quad \text{(d'après la formule de Leibniz)}\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2,\ \dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t) = x\dfrac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t) + n\dfrac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}}(x,t)}$

Q 22.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t) &= \frac{d^n}{dx^n}(\psi(x)e^{tx}) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\psi^{(n-k)}(x)e^{tx}t^k \quad \text{(formule de Leibniz)}\end{aligned}$$

Donc $\forall t \in \mathbb{R},\ A_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \psi^{(n-k)}(0) t^k$. A_n est ainsi polynomiale.
Montrons que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les propriétés de **Q 18.**

· $A_0 = \psi(0) = 1$

· Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n'(t) = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(0,t) = n\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}}(0,t) = nA_{n-1}(t)$ (d'après **Q 21.**)
· Soit $p \geq 2$. On a $\forall x \in \mathbb{R},\ (e^x - 1)\psi(x) = x$. Appliquons la formule de Leibniz :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{d^p}{dx^p}(\psi(x)(e^x-1)) = \frac{d^p}{dx^p}(x)$$

$$\text{Donc} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ (e^x-1)\psi^{(p)}(x) + \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} \psi^{(n-k)}(x) e^x = 0$$

En évaluant en 0, on obtient $\sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} \psi^{(n-k)}(0) = 0$
En appliquant cela on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^1 A_n(t)dt = \frac{1}{n+1}\int_0^1 A_{n+1}'(t)dt &= \frac{1}{n+1}\left[A_{n+1}(t)\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}\psi^{(n-k)}(0) \\ &= 0 \text{ (car } n+1 \geq 2)\end{aligned}$$

Pour conclure, d'après **Q 18.** , $\boxed{\text{pour tout entier n} \in \mathbb{N},\ A_n = B_n}$

IV Solution entière de l'équation (E_h)

Q 23.

La négation de la propriété $\mathcal{P}$ s'écrit

$$\forall c > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \exists z \in \mathbb{C}, (|z| = (2n+1)\pi \text{ et } |e^z - 1| < c)$$

En particuler en prenant la suite $(c_p)_{p\in\mathbb{N}} = (2^{-p})_{p\in\mathbb{N}}$, on a

$$\forall p > 0, \exists n_p \in \mathbb{N}, \exists z_p \in \mathbb{C}, \left(|z_p| = (2n_p+1)\pi \text{ et } |e^{z_p} - 1| < 2^{-p}\right)$$

On définit ainsi (via l'axiome du choix) deux suites $(n_p)_{p\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ et $(z_p)_{p\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tel que

$$\forall p \in \mathbb{N}, |z_p| = (2n_p+1)\pi \text{ et } e^{z_p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 1$$

Q 24.

On a $e^{z_p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 1$
Donc $e^{a_p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 1$ (continuité du module)
Puis $\boxed{a_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0}$ (continuité du logarithme)

D'après l'inégalité triangulaire renversée, on a $\forall p \in \mathbb{N},\ |a_p| = |z_p - ib_p| \geq ||z_p| - |b_p||$

Par comparaison, $\boxed{|z_p| - |b_p| \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0}$

Q 25.

On a pour tout $p \in \mathbb{N}, b_p = \epsilon_p |b_p|$ (définition de b_p)

D'où pour tout $p \in \mathbb{N},\ z_p - i\epsilon_p|z_p| = a_p + i(b_p - \epsilon_p|z_p|) = a_p + i\epsilon_p(|b_p| - |z_p|)$

Or, $|z_p| - |b_p| \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ et $(i\epsilon_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc $i\epsilon_p(|b_p| - |z_p|) \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$

Enfin, la continuité de exp en 0 donne $e^{z_p - i\epsilon_p|z_p|} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 1$

Or, $\forall p \in \mathbb{N},\ e^{z_p - i\epsilon_p|z_p|} = e^{z_p}e^{-i\epsilon_p(2n_p+1)\pi} = e^{z_p}(-1)^{\epsilon_p(2n_p+1)} = e^{z_p}(-1)^{\epsilon_p}$

Ainsi, $(-1)^{\epsilon_p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 1$ car $\begin{cases} e^{-z_p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 1 \\ e^{z_p - i\epsilon_p|z_p|} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 1 \end{cases}$

Cela est absurde car pour tout entier naturel p, $(-1)^{\epsilon_p} = -1$.

Ainsi, $\boxed{\text{la proposition } \mathcal{P} \text{ est vraie.}}$

<u>Pour la suite du sujet on fixe $c > 0$ qui vérifie la propriété $\mathcal{P}$</u>

Q 26.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$.

On définit pour tout $k \in \mathbb{N},\ f_k : t \in [0,1] \mapsto \dfrac{\gamma_n^{k+1-n}(t)}{e^{\gamma_n(t)} - 1}\dfrac{z^k}{k!}$. f_k est continue et bien définie.

On a pour tout $k \in \mathbb{N},\ t \in [0,1],\ |f_k(t)| \leq \dfrac{((2n+1)\pi)^{1-n}}{c}\dfrac{((2n+1)\pi|z|)^k}{k!}$

Et $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{((2n+1)\pi|z|)^k}{k!}$ converge donc $\displaystyle\sum_{k\geq 0} f_k$ converge normalement donc uniformément sur $[0,1]$.

Par interversion somme intégrale on obtient :

$$\begin{aligned} Q_n(z) = n!\int_0^1 \frac{e^{z\gamma_n(t)}}{(e^{\gamma_n(t)} - 1)\gamma_n^{n-1}(t)}dt &= n!\int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\gamma_n^{k+1-n}(t)}{e^{\gamma_n(t)} - 1}\frac{z^k}{k!}dt \\ &= n!\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\int_0^1 \frac{\gamma_n^{k+1-n}(t)}{e^{\gamma_n(t)} - 1}dt\right)\frac{z^k}{k!} \end{aligned}$$

Cela étant vrai pour tout $z \in \mathbb{C}$, on obtient bien $\boxed{Q_n \in \mathcal{E}}$

Q 27.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$. Utilisons la définition de $Q_n(z)$:

$$\begin{aligned}
Q_n(z+1) - Q_n(z) &= n! \int_0^1 \frac{e^{z\gamma_n(t)} e^{\gamma_n(t)}}{\left(e^{\gamma_n(t)} - 1\right)\gamma_n(t)^{n-1}} dt - n! \int_0^1 \frac{e^{z\gamma_n(t)}}{\left(e^{\gamma_n(t)} - 1\right)\gamma_n(t)^{n-1}} dt \\
&= n! \int_0^1 \frac{e^{z\gamma_n(t)}\left(e^{\gamma_n(t)} - 1\right)}{\left(e^{\gamma_n(t)} - 1\right)\gamma_n(t)^{n-1}} dt \\
&= n! \int_0^1 e^{z\gamma_n(t)} \gamma_n(t)^{1-n} dt \\
&= n!((2n+1)\pi)^{1-n} \int_0^1 e^{z(2n+1)\pi\omega(t)} \omega(t)^{1-n} dt \quad \text{car } \gamma_n(t) = (2n+1)\pi\omega(t)
\end{aligned}$$

Or, $z' \in \mathbb{C} \mapsto e^{z(2n+1)\pi z'} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z(2n+1)\pi)^k z'^k}{k!}$ appartient à $\mathcal{E}$ donc d'après **Q 9.**

on a $\displaystyle\int_0^1 e^{z(2n+1)\pi\omega(t)} \omega(t)^{1-n} dt = ((2n+1)\pi)^{n-1} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}$

Finalement, $\boxed{Q_{n+1}(z) - Q_n(z) = n!((2n+1)\pi)^{1-n}((2n+1)\pi)^{n-1} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = nz^{n-1}}$

Q 28.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $z \in \mathbb{C}$. On a montré en **Q 26.** que $Q_n(z) = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 \frac{\gamma_n^{k+1-n}(t)}{e^{\gamma_n(t)} - 1} dt \right) \frac{z^k}{k!}$

L'inégalité triangulaire donne,

$$\begin{aligned}
|Q_n(z)| &\leq n! \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{((2n+1)\pi)^{k+1-n}}{c} \frac{|z|^k}{k!} \qquad (|\gamma_n(t)| = (2n+1)\pi) \\
&\leq \frac{n!}{c((2n+1)\pi)^{n-1}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{((2n+1)\pi|z|)^k}{k!} \\
&\leq \frac{n!}{c((2n+1)\pi)^{n-1}} \exp\left((2n+1)\pi|z|\right) \\
&\leq \frac{n!}{c((2n+1)\pi)^{n-1}} e^{3\pi n|z|} \qquad (\ (2n+1)\pi|z| \leq 3n\pi|z|\ )
\end{aligned}$$

Puis, $(2n+1)\pi \geq n\pi$ donc $((2n+1)\pi)^{n-1} \geq (n\pi)^{n-1}$.
Ainsi :

$$\begin{aligned}
\frac{n!}{((2n+1)\pi)^{n-1}} &\leq \frac{n!}{n^{n-1}\pi^{n-1}} \\
&\sim \frac{n^n\sqrt{2\pi n}}{e^n n^{n-1}\pi^{n-1}} \qquad \text{(formule de Stirling)} \\
&\sim \frac{\pi n\sqrt{2\pi n}}{(e\pi)^n}
\end{aligned}$$

D'où $\displaystyle\frac{n!}{((2n+1)\pi)^{n-1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (croissance comparée)

La suite $\left(\dfrac{n!}{c((2n+1)\pi)^{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente, donc bornée.

$\boxed{\text{On peut donc fixer } a>0}$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $0\leq \dfrac{n!}{((2n+1)\pi)^{n-1}}\leq a$

En posant $\boxed{b:=3\pi}$ on obtient bien pour tout $n\in\mathbb{N}^*,\ z\in\mathbb{C},\ \boxed{|Q_n(z)|\leq ae^{bn|z|}}$

Q 29.

Fixons $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tel que pour tout $z\in\mathbb{C},\ h(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$ et définissons

$f:z\in\mathbb{C}\mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}Q_{n+1}(z)$. Montrons que f est bien définie et appartient à $\mathcal{E}$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, notons $(b_{k,n})_{k\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tel que
$\forall z\in\mathbb{C}\ \ Q_n(z)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}b_{k,n}z^k$ ($Q_n\in\mathcal{E}$ d'après **Q 26.**)
Soit $z\in\mathbb{C}$. Etudions la sommabilité de $\left(\dfrac{a_n}{n+1}b_{k,n+1}z^k\right)_{(k,n)\in\mathbb{N}^2}$

Nous remarquons en examinant les majorations et raisonnements effectués à **Q 28.** (qui ont été effectuées sur les modules des quantités présentes) qu'il existe $a,b>0$ tel que
$\forall n\in\mathbb{N},z\in\mathbb{C},\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}|b_{k,n}||z^k|\leq ae^{bn|z|}$. Fixons a,b

Ensuite, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k\geq0}\frac{|a_n|}{n+1}|b_{k,n+1}||z|^k$ converge et sa somme vaut

$$\frac{|a_n|}{n+1}\sum_{k=0}^{+\infty}|b_{k,n+1}||z|^k\leq\frac{ae^{b|z|}|a_n|}{n+1}\left(e^{|z|}\right)^n$$

Puisque la série entière $\displaystyle\sum_{k\geq0}\frac{a_n}{n+1}z^n$ a un rayon de convergence infini (série primitive), par comparaison

on en déduit la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq0}\frac{|a_n|}{n+1}\sum_{k=0}^{+\infty}|b_{k,n+1}||z|^k$ et la sommabilité de $\left(\dfrac{a_n}{n+1}b_{k,n+1}z^k\right)_{(k,n)\in\mathbb{N}^2}$
Ainsi, d'après le théorème de Fubini (ou théorème de sommation paquet), on obtient

$$\forall z\in\mathbb{C},\ f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_nb_{k,n+1}}{n+1}\right)z^k$$

On a donc $f\in\mathcal{E}$ et pour tout $z\in\mathbb{C}$

$$\begin{aligned}f(z+1)-f(z)&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}\left(Q_{n+1}(z+1)-Q_{n+1}(z)\right)\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n&&\text{(d'après }\mathbf{Q\ 27.}\text{)}\\&=h(z)\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est une solution dans } \mathcal{E} \text{ de } (E_h).}$