Préambule n'engageant que son auteur : N'ayant pas jugé satisfaisante ma prestation lors de la composition officielle de l'épreuve, j'ai décidé d'en rédiger une correction. Je tiens à remercier Adrien pour le template LaTeX et certains membres du serveur Discord de Maths* (qui se reconnaîtront) pour l'aide qu'ils m'ont apportée pour résoudre certaines questions du sujet !
Pour toute remarque éventuelle, merci de les adresser à l'adresse suivante : tibomatlou3[at]gmail[dot]com

NOTATIONS

- Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
- On note $\mathbb{K}[X]$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- Pour tout $d \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_d[X]$ désigne le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à d.
- On note $\mathbb{U}$ le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1.

Le sujet s'intéresse au problème suivant :
Soit h une fonction de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$. On dit qu'une fonction f de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ est solution de (E_h), et l'on note $f \in S_h$ si f vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{K}, f(x+1) - f(x) = h(x) \tag{E$_h$}$$

PARTIE I ÉTUDE DE L'OPÉRATEUR DIFFÉRENCE FINIE

On considère l'application

$$\Delta : \begin{cases} \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X] \\ P \longmapsto P(X+1)-P(X) \end{cases}$$

Q 1. Soit P, Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a alors :

$$\begin{aligned}\Delta(P+\lambda Q) &= (P+\lambda Q)(X+1)-(P+\lambda Q)(X) \\ &= (P(X+1)-P(X))+\lambda(Q(X+1)-Q(X)) \\ &= \Delta(P)+\lambda\Delta(Q)\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\Delta \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{K}[X]}$$

Q 2. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On commence d'abord par distinguer deux cas triviaux :

- Si $P=0$, alors $\Delta(P)=0=P$ d'où $\boxed{\deg(\Delta(P))=\deg(P)=-\infty}$
- Si P est constant, disons égal à une constante $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\Delta(P)=0$ d'où $\boxed{\deg(\Delta(P))=-\infty}$

Supposons donc que P est non constant. Notons d son degré. On peut alors écrire : $P=\sum\limits_{k=0}^{d} a_k X^k$ où $(a_0, a_1, ..., a_d) \in \mathbb{K}^{d+1}$ et $a_d \neq 0$.
On a donc, en mettant de côté les termes d'indice d et $d-1$:

$$\begin{aligned}\Delta(P) &= a_d((X+1)^d - X^d) + \sum_{k=0}^{d-1} a_k((X+1)^k - X^k) \\ &= a_d \sum_{j=0}^{d-1}\binom{d}{j}X^j + \sum_{k=0}^{d-1} a_k \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}X^j \\ &= \underbrace{da_d}_{\neq 0} X^{d-1} + \underbrace{a_d\sum_{j=0}^{d-2}\binom{d}{j}X^j + \sum_{k=0}^{d-1} a_k \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}X^j}_{\in \mathbb{K}_{d-2}[X]}\end{aligned}$$

On en déduit alors :

$$\boxed{\deg \Delta(P) = \deg P - 1}$$

Q 3. La question précédente démontre que le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}_d[X]$ est stable par Δ (le degré chute de 1), donc

$$\boxed{\Delta \text{ induit un endomorphisme sur } \mathbb{K}_d[X] \text{ noté } \Delta_d}$$

Q 4. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(\Delta_d) &= Vect(\Delta(1), \Delta(X), ..., \Delta(X^d)) \\ &= Vect(0, 1, 2X+1, ..., \sum_{j=0}^{d-1}\binom{d}{j}X^j) \\ &= \mathbb{K}_{d-1}[X]\end{aligned}$$

La dernière égalité provenant du fait que xla famille $(1, 2X+1, ..., \sum_{j=0}^{d-1} \binom{d}{j} X^j)$ est une famille de polynômes tous non nuls, échelonnée en degré, dont le vecteur de degré maximal est de degré $d-1$, donc est une famille libre de $\mathbb{K}_{d-1}[X]$ de cardinal $d = \dim \mathbb{K}_{d-1}[X]$, c'est-à-dire forme une base de $\mathbb{K}_{d-1}[X]$.
Donc :

$$\boxed{\operatorname{Im}(\Delta_d) = \mathbb{K}_{d-1}[X]}$$

Déterminons le noyau de Δ_d. On a l'inclusion (évidente) :

$$\mathbb{K}_0[X] \subset \operatorname{Ker}(\Delta_d)$$

De plus, par le théorème du rang, on a :

$$\begin{aligned}\dim \mathbb{K}_d[X] &= \dim \operatorname{Ker}(\Delta_d) + \operatorname{rg}(\Delta_d)\\ &= \dim \operatorname{Ker}(\Delta_d) + d\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\dim \operatorname{Ker}(\Delta_d) = 1 = \dim \mathbb{K}_0[X]$$

Donc, par inclusion et égalité des dimensions, on a finalement : $\boxed{\mathbb{K}_0[X] = \operatorname{Ker}(\Delta_d)}$

Q 5. Grâce à la question précédente, on a $\mathbb{K}_0[X] = \operatorname{Ker}(\Delta_d) \subset \operatorname{Ker} \Delta$.
Soit $P \in \operatorname{Ker} \Delta$. On a donc $P(X+1) = P(X)$ donc par récurrence immédiate (on évalue en "$X = X+1$" dans l'hérédité) on obtient : $\forall k \in \mathbb{N}, P(X+k) = P(X)$, d'où en évaluant en 0 :

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(k) - P(0) = 0$$

Le polynôme $P(X) - P(0)$ admet donc une infinité de racines (l'ensemble $\mathbb{N}$ est infini), donc est nul. Autrement dit P est constant donc par double inclusion, on a finalement :

$$\boxed{\operatorname{Ker}(\Delta) = \mathbb{K}_0[X]}$$

Montrons que $\operatorname{Im} \Delta = \mathbb{K}[X]$.

L'inclusion directe est claire. De plus le polynôme nul est sa propre image par Δ car ce dernier est un (endo)morphisme d'espaces vectoriels.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Notons d son degré.

A l'aide de la question précédente, on a alors $P \in \operatorname{Im} \Delta_{d+1}$, donc il existe $Q \in \mathbb{K}_{d+1}[X]$ tel que $\Delta(Q) = P$, ce qui clôt :

$$\boxed{\operatorname{Im} \Delta = \mathbb{K}[X]}$$

Soit h une fonction polynomiale. On en déduit alors :

- Si h est l'application nulle : $\boxed{S_h = \operatorname{Ker}(\Delta) = \mathbb{K}_0[X]}$
- Sinon : $\boxed{S_h = \operatorname{Im}(\Delta) = \mathbb{K}[X]}$

Q 6.
Résoudre (E_h) revient à déterminer les solutions de l'équation $\Delta(P) = X$ d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$.

Je vous laisse vérifier que le polynôme $P_1 = \frac{1}{2}(X^2 - X)$ vérifie alors (E_h). (E_h) étant une équation affine (donc linéaire), le principe de superposition s'applique, et dès lors, comme le noyau de Δ est égal à $\mathbb{K}_0[X]$, on en déduit que :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], (\Delta(P) = X \Leftrightarrow P \in \{P_1\} + \operatorname{Ker}\Delta \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, P = \frac{1}{2}(X^2 - X + c)$$

D'où :

$$\boxed{S_h = \{x \mapsto \tfrac{1}{2}(x^2 - x + c) \mid c \in \mathbb{R}\}}$$

En effet, $\mathbb{K}$ étant infini, on identifie polynôme et application polynomiale.

Remarques :

- ▷ On remarque que (E_h) se résout au final comme une équation différentielle **linéaire** ordinaire. Il vaut bien de retenir qu'on suit ici une démarche naturelle de résolution d'une équation linéaire : On détermine d'abord une solution particulière, puis on détermine toutes les solutions de l'équation homogène associée.

- ▷ Si le corps de base des polynômes est fini, comme $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, alors on ne peut pas conclure. Le lecteur intéressé pourra étudier $X^2 + X$ dans ce corps.

Q 7. Δ est nilpotent, donc son spectre est réduit à 0. On en déduit que $\boxed{X^d \text{ est un polynôme annulateur de } \Delta}$ par le théorème de Cayley-Hamilton.

On en déduit que si Δ était diagonalisable, alors il existerait une base de $\mathbb{K}_d[X]$ telle que sa matrice dans cette base serait nulle, donc Δ serait l'endomorphisme nul, ce qui est absurde. Donc $\boxed{\Delta \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

PARTIE II FONCTIONS ENTIÈRES

On note

$$\omega : \begin{cases} [0,1] \longrightarrow \mathbb{C} \\ t \longmapsto e^{2i\pi t} \end{cases}$$

II.A - Généralités

Q 8. **Stabilité par combinaison linéaire** : Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ et $f, g \in \mathcal{E}$.

Notons $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence infinis, dont les sommes sont respectivement f et g.
Par un théorème du cours, la série entière $\sum\limits_{n\geq 0}(a_n+b_n)z^n$ est de rayon de convergence $R \geqslant \min(+\infty, +\infty) = +\infty$
Et on a donc $R = +\infty$ et :

$$\forall z \in \mathbb{C}, (f+g)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

D'où on déduit, par linéarité de la somme :

$$\forall z \in \mathbb{C}, (\lambda f + \mu g)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda a_n + \mu b_n)z^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

Donc :

$$\boxed{\lambda f + \mu g \in \mathcal{E}}$$

Stabilité par produit :

Par un produit de Cauchy, la série entière $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

a un rayon de convergence R' tel que $R' \geqslant \min(+\infty, +\infty) = +\infty$, donc on a $R' = +\infty$ et :

$$\forall z \in \mathbb{C}, (fg)(z) = f(z)g(z) = (\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n) \times (\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$$

Donc :

$$\boxed{fg \in \mathcal{E}}$$

Q 9. Soit $k \in \mathbb{Z}$. On a :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 f(\omega(t))\omega(t)^{-k} dt \\ &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{2i\pi t(n-k)} dt \end{aligned}$$

Posons donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_{n,k} : t \mapsto a_n e^{2i\pi t(n-k)}$$

définie sur $[0,1]$.
Montrons que l'on peut permuter somme et intégrale.

- $f_{n,k}$ est continue sur le segment $[0,1]$.
- On a :

$$\|f_{n,k}\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |a_n e^{2i\pi t(n-k)}| = |a_n|$$

  f est la somme d'une série entière de rayon de convergence infini, donc en particulier, $\sum a_n 1^n$ converge absolument, c'est-à-dire par ce qui précède, que la série $\sum_{n\geq 0} f_{n,k}$ converge normalement sur le segment $[0,1]$.

On peut donc intégrer terme-à-terme, donc :

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 a_n e^{2i\pi t(n-k)} dt = \begin{cases} a_k & \text{si } k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si } k \in \mathbb{Z}_-^* \end{cases}$$

Car on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 e^{2i\pi t(n-k)} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

D'où on déduit finalement :

$$\boxed{\int_0^1 f(\omega(t))\omega(t)^{-k} dt = \begin{cases} a_k & \text{si } k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si } k \in \mathbb{Z}_-^* \end{cases}}$$

II.B - Une intégrale

Q 10. Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, l'application :

$$\begin{cases} [0,1] \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \frac{\omega(t)^{p+1}}{e^{w(t)}-1} = \frac{e^{2i\pi t(p+1)}}{e^{e^{2i\pi t}}-1} \end{cases}$$

est continue sur **le segment** $[0,1]$, et son dénominateur ne s'annule pas sur $[0,1]$:

- $\forall t \in [0,1], |\omega(t)| = 1$, donc $\omega(t)$ ne peut pas être un multiple de $2i\pi$, donc $e^{\omega(t)} \neq 1$.

donc $\boxed{I_p \text{ est définie pour tout } p \in \mathbb{Z}}$

Q 11. L'exponentielle est développable en série entière sur $\mathbb{C}$ tout entier. Pour tout $\zeta \in \mathbb{U}$, on a :

$$\begin{aligned} e^{\zeta} - 1 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\zeta^n}{n!} \\ &= \zeta(1 + \zeta \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta^{n-2}}{n!}) \end{aligned}$$

Posons dès lors :

$$\beta : \zeta \longmapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta^{n-2}}{n!}$$

qui est donc bien une fonction développable en série entière, de rayon de convergence infini (série exponentielle).

On a donc, par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \forall \zeta \in \mathbb{U}, |\beta(\zeta)| &= |\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta^{n-2}}{n!}| \\ &\leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{|\zeta|^{n-2}}{n!} \\ &\leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e - 2 < 1 \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\exists \beta \in \mathcal{E}, \exists C \in]0,1[, e^{\zeta} - 1 = \zeta(1 + \zeta\beta(\zeta)) \text{ et } |\beta(\zeta)| \leq C}$$

Q 12. Soit $\zeta \in \mathbb{U}$ et $p \in \mathbb{Z}$.

Grâce à la question précédente, on a :

$$\frac{\zeta^p}{e^{\zeta} - 1} = \zeta^{p-1} \frac{1}{1 - (-\zeta\beta(\zeta))}$$

Comme on a : $|-\zeta\beta(\zeta)| = |\beta(\zeta)| \leqslant C < 1$, on peut développer cette expression en série géométrique :

$$\begin{aligned} \frac{\zeta^p}{e^{\zeta} - 1} &= \zeta^{p-1} \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \zeta^j \beta(\zeta)^j \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \zeta^{j+p-1} \beta(\zeta)^j \end{aligned}$$

Ce qui établit le résultat souhaité.

Q 13. On aimerait écrire, sous réserve d'existence des objets mis en jeu :

$$I_p = \int_0^1 \frac{\omega(t)^{p+1}}{e^{\omega(t)}-1}dt = \int_0^1 \sum_{j=0}^{+\infty}(-1)^j\omega(t)^{j+p}\beta(\omega(t))^j dt \overset{(*)}{=} \sum_{j=0}^{+\infty}\int_0^1 (-1)^j\omega(t)^{j+p}\beta(\omega(t))^j dt$$

Et ensuite utiliser la question 9. Justifions l'égalité $(*)$.

Notons

$$\forall j \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,1], f_j(t) = (-1)^j\omega(t)^{j+p}\beta(\omega(t))^j$$

- $\forall j \in \mathbb{N}, f_j$ est continue sur le segment $[0,1]$, par produit, composition et continuité des fonctions développables en série entière sur leur intervalle ouvert de convergence, ici $\mathbb{C}$, pour β.
- On a :

  $$\forall j \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,1], |f_j(t)| = |\omega(t)|^{j+p}|\beta(\omega(t))|^j \leqslant C^j$$

  Donc, par convergence des séries géométriques de raison strictement inférieure à 1 :

  $$\sum_{j=0}^{+\infty}\|f_j\|_\infty \leqslant \sum_{j=0}^{+\infty}C^j < +\infty$$

  ce qui établit la convergence normale, donc uniforme, de $\sum\limits_{j\geqslant 0} f_j$ sur $[0,1]$.

Par le théorème d'intégration terme-à-terme, on a donc la convergence de $\sum\limits_{j\geqslant 0}\int_0^1 f_j$ et

$$\int_0^1\sum_{j=0}^{+\infty}f_j(t) = \sum_{j=0}^{+\infty}\int_0^1 f_j(t)$$

Soit, par les calculs précédents :

$$I_p = \sum_{j=0}^{+\infty}(-1)^j\int_0^1 \omega(t)^{-(-j-p)}\beta(\omega(t))^j dt$$

β est développable en série entière sur $\mathbb{C}$, donc par récurrence, en appliquant la question 8, β^j est développable en série entière sur $\mathbb{C}$ aussi. Si $p \geqslant 1$, on a : $\forall j \in \mathbb{N}, -j-p \in \mathbb{Z}-\mathbb{N}$, donc par la question 9 : $\int\limits_0^1 \omega(t)^{-(-j-p)}\beta(\omega(t))^j dt = 0$ Mais si $p=0$, avec $j=0$ on a bien $-j-p\in\mathbb{N}$, ce qui donne une intégrale non nulle égale à

$$\int_0^1 dt = 1$$

et si $j \geqslant 1$ alors $-j-p$ est strictement négatif donc l'intégrale est encore nulle. On a donc :

$$\boxed{\mathrm{I}_0 = 1 + \sum_{j=0}^{+\infty}(-1)^j \times 0 = 1}$$

et :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}-\{0\}, I_p = \sum_{j=0}^{+\infty}(-1)^j \times 0 = 0}$$

PARTIE III POLYNÔMES DE BERNOULLI

III.A - Lien avec l'équation (E_h)

Q 14.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$. On a, par linéarité de l'intégrale (on isole les $n+1$ premiers termes, donc par finitude de ladite somme, la linéarité de l'intégrale est licite) :

$$\begin{aligned}
B_n(z) &= n! \int_0^1 \frac{1}{\left(e^{\omega(t)}-1\right)\omega(t)^{n-1}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z\omega(t))^k}{k!} \mathrm{d}t \\
&= n! \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \int_0^1 \frac{\omega(t)^{k-n+1}}{e^{\omega(t)}-1} \, \mathrm{d}t + n! \int_0^1 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \frac{\omega(t)^{k-n+1}}{e^{\omega(t)}-1} \, \mathrm{d}t \\
&= n! \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} I_{k-n} + n! \int_0^1 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \frac{\omega(t)^{k-n+1}}{e^{\omega(t)}-1} \, \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Intervertissons somme et intégrale, afin de reconnaître les intégrales I_{k-n} avec $k > n$. La question Q 13 permettra alors de conclure. Posons :

$$\forall k \geqslant n+1, \quad \forall t \in [0,1], \quad h_k(t) = \frac{z^k}{k!} \frac{\omega(t)^{k-n+1}}{e^{\omega(t)}-1}$$

Alors :

- pour tout entier $k \geqslant n+1$, l'application h_k est continue sur $[0,1]$ par les arguments déjà invoqués à la question **Q**10
- L'application $t \mapsto \frac{\omega(t)}{e^{\omega(t)}-1}$ étant continue sur le compact $\mathbb{U}$ (en effet, $\mathbb{U}$ est la sphère unité de $\mathbb{C}$ muni de la norme définie par le module), on peut choisir, via le **théorème des bornes atteintes**, une constante $M > 0$ majorant son module, de sorte que pour tout entier $k \geqslant n+1$ et tout $t \in [0,1]$, on ait :

$$|h_k(t)| = \frac{|z|^k}{k!} \cdot \left| \frac{\omega(t)}{e^{\omega(t)}-1} \right| \cdot |\omega(t)|^{k-n} \leqslant \frac{|z|^k}{k!} M$$

et donc, par convergence (absolue) de la série exponentielle sur $\mathbb{C}$:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \|h_k\|_\infty \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{|z|^k}{k!} M \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|z|^k}{k!} M = e^{|z|} M < +\infty$$

ce qui établit la convergence normale, donc uniforme sur le segment $[0,1]$, de la série de fonctions $\sum\limits_{k \geqslant n+1} h_k$.
Par le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, on a donc la convergence de la série $\sum\limits_{k \geqslant n+1} \int_0^1 h_k$, et :

$$\int_0^1 \sum_{k=n+1}^{+\infty} h_k(t) \mathrm{d}t = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_0^1 h_k(t) \mathrm{d}t$$

ce qui nous permet d'aboutir dans le calcul de $B_n(z)$ précédent :

$$B_n(z) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} I_{k-n} + n! \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{z^k}{k!} \frac{\omega(t)^{k-n+1}}{e^{\omega(t)}-1} \, \mathrm{d}t = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} I_{k-n} + n! \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} I_{k-n}$$

Pour tout entier $k \geqslant n+1$, on a : $k-n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$, donc par la question précédente : $I_{k-n} = 0$. Cela permet de simplifier cette dernière somme et de conclure :

$$B_n(z) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} I_{k-n}$$

Ceci vaut pour tout $z \in \mathbb{C}$. Dès lors le polynôme $B_n - n! \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!} I_{k-n}$ admet une infinité de racines, donc il est nul, et donc finalement:

$$B_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!} I_{k-n}$$

Comme le coefficient en facteur de X^n est : $I_0 = 1$ (question 13), on a : $\deg(B_n) = n$, et B_n est unitaire et de degré n.

Q 15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a, grâce à la question précédente (dérivée formelle d'un polynôme) :

$$\begin{aligned} B_n' &= n! \sum_{k=1}^{n} \frac{kX^{k-1}}{k!} I_{k-n} \\ &= n \times (n-1)! \sum_{k=1}^{n} \frac{X^{k-1}}{(k-1)!} I_{k-n} \\ &= nB_{n-1} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, B_n' = nB_{n-1}}$$

Q 16. Soient $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$\begin{aligned} B_n(z+1) - B_n(z) &= n! \int_0^1 \frac{e^{(z+1)\omega(t)} - e^{z\omega(t)}}{\left(e^{\omega(t)} - 1\right)\omega(t)^{n-1}} \,\mathrm{d}t \\ &= n! \int_0^1 \frac{e^{z\omega(t)}\left(e^{\omega(t)} - 1\right)}{\left(e^{\omega(t)} - 1\right)\omega(t)^{n-1}} \,\mathrm{d}t \\ &= n! \int_0^1 \frac{e^{z\omega(t)}}{\omega(t)^{n-1}} \,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

La question **Q** 9, appliquée à $f : w \mapsto e^{zw} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} w^n$, permet de calculer cette intégrale et d'obtenir :

$$\boxed{\mathrm{B}_n(z+1) - B_n(z) = n! \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = nz^{n-1}}$$

Q 17. L'identité de la question précédente établit que si $z \mapsto z^k$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors $\frac{1}{k+1} B_{k+1}$ est une application polynomiale vérifiant (E_h), donc comme cette dernière équation est affine, on peut appliquer le principe de superposition : si l'on note $h : x \mapsto \sum_{k=0}^{d} a_k x^k$, alors :

$$\boxed{\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{d} \frac{a_k}{k+1} B_{k+1} \text{ est solution de } (E_h)}$$

III.B - Unicité

Q 18. Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de polynômes vérifiant les mêmes propriétés que $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$
Montrons par récurrence simple que pour tout entier naturel $n, P_n = B_n$.

- **Initialisation :** On a $P_0 = 1 = B_0$. Donc l'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P_n = B_n$. Montrons que $P_{n+1} = B_{n+1}$.
  On a, par hypothèse de récurrence :
  $$(n+1)P_n = (n+1)B_n$$
  Donc par la deuxième hypothèse :
  $$P_{n+1}' = B_{n+1}'$$

Par intégration, on a alors :

$$\exists\lambda \in \mathbb{K}, P_{n+1} = B_{n+1} + \lambda$$

Donc par la troisième hypothèse (intégrale nulle sur [0, 1]) :

$$0 = \int_0^1 P_{n+1}(t)dt = \int_0^1 (B_{n+1} + \lambda)dt = \int_0^1 B_{n+1}(t)dt + \lambda$$

D'où $\lambda = 0$ et $P_{n+1} = B_{n+1}$

Donc $\mathcal{P}$ est héréditaire.

- **Conclusion :** Par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P_n = B_n$

$$\boxed{\text{Ce qui établit l'unicité souhaitée.}}$$

Q 19. Grâce à la question précédente, il suffit de démontrer que $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les mêmes propriétés que $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a bien :

- $H_0 = B_0$
- On a

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, H_n'(X) &= (-1)^{n+1}B_n'(1-X)\\ &= n(-1)^{n-1}B_{n-1}(1-X)\\ &= nH_{n-1}(X)\end{aligned}$$

- On a aussi, via la troisième propriété des polynômes de Bernoulli, et via le $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $u \mapsto 1-u$:

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 H_n(t)dt &= \int_0^1 (-1)^n B_n(1-t)dt\\ &= (-1)^n \int_1^0 B_n(u)(-du)\\ &= (-1)^n \int_0^1 B_n(u)du\\ &= 0\end{aligned}$$

Par unicité :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, H_n = B_n}$$

III.C - Une application analytique

Q 20. Comme $(x,t) \mapsto e^{tx}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$, il suffit de démontrer que ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Nous allons le montrer en établissant que $\frac{1}{\psi}$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, car ψ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ par prolongement.

On a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{1}{\psi(x)} &= \frac{e^x - 1}{x}\\ &= \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}\end{aligned}$$

D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{\psi(x)} = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$$

Donc : $\frac{1}{\psi}$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, donc finalement :

$$\boxed{u \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}^2}$$

Q 21. Soit $(x,t) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = xu(x,t)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. u est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ (en particulier), donc on peut appliquer le théorème de Schwarz :

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t) = \frac{\partial^n}{\partial x^n}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^n}{\partial x^n}\frac{\partial}{\partial t}((x,t) \mapsto xu(x,t))(x,t)$$

Et par la formule de dérivation de Leibniz (les dérivées d'ordre strictement supérieur à 1 de $x \mapsto x$ étant nulles) :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}, \tfrac{\partial}{\partial t}\tfrac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t) = \tbinom{n}{0} x \tfrac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t) + \tbinom{n}{1} x \tfrac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}}(x,t) = x\tfrac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t) + n\tfrac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}}(x,t)}$$

Q 22. Montrons que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les trois identités de la question **Q** 18. On définit bien une suite de polynômes, en effet, par la formule de Leibniz on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, \quad A_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \psi^{(n-k)}(0) t^k e^{t\cdot 0} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \psi^{(n-k)}(0) t^k$$

Puis, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad A_0 = u(0,t) = \psi(0) = 1$$

De plus la question précédente implique, en posant $x = 0$:

$$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, \forall t \in \mathbb{R}, \quad A_n'(t) = nA_{n-1}(t)$$

Montrons que le membre de gauche de l'égalité de la question précédente donne bien A_n'. Soit g l'application $t \mapsto (0,t)$, alors on a : $A_n = \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \circ g$. Par la règle de la chaîne, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned}
A_n'(t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n} \circ g\right) \\
&= \left(0 \times \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^n u}{\partial x^n} \circ g(x,t)\right) + \left(1 \times \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^n u}{\partial x^n} \circ g(x,t)\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(0,t)
\end{aligned}$$

car g' est l'application $t \mapsto (0,1)$.
Donc, en utilisant ce que l'on vient de démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, \int_0^1 A_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{A_{n+1}'(t)}{n+1}\,\mathrm{d}t = \frac{A_{n+1}(1) - A_{n+1}(0)}{n+1}$$

Il suffit donc de démontrer que $A_{n+1}(1) - A_{n+1}(0) = 0$ pour tout entier $n \geqslant 1$ pour conclure. Pour cela, remarquons :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad u(x,t+1) - u(x,t) = \psi(x)e^{tx}\left(e^x - 1\right) = xe^{tx}$$

le calcul devant être fait à part pour $x=0$ (mais il donne bien 0 , qui est égal à xe^{tx}). En dérivant $n+1$ fois par rapport à x, on a par la formule de dérivation de Leibniz :

$$\begin{aligned}\forall (x,t)\in\mathbb{R}^2,\quad \frac{\partial^{n+1}u}{\partial x^{n+1}}(x,t+1)-\frac{\partial^{n+1}u}{\partial x^{n+1}}(x,t) &= \binom{n+1}{0}xt^{n+1}e^{tx}+\binom{n+1}{1}t^ne^{tx}\\ &=(xt+(n+1))t^ne^{tx}\end{aligned}$$

En prenant $x=0$ on obtient alors :

$$\forall n\in\mathbb{N}\backslash\{0\},\forall t\in\mathbb{R},\quad A_{n+1}(t+1)-A_{n+1}(t)=(n+1)t^n$$

donc, pour $t=0$, comme $n\neq 0$ on a : $\forall n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}, A_{n+1}(1)-A_{n+1}(0)=0$, ce qu'il fallait démontrer.

Par unicité de la suite de polynômes vérifiant les trois égalités de la question **Q18**, on a donc : $\forall n\in\mathbb{N},\quad A_n=B_n$

Partie IV Solution entière de l'équation (E_h)

IV.A - Une inégalité de contrôle

Q 23. Prenons la négation de $\mathcal{P}$. On a donc :

$$\forall p\in\mathbb{N},\exists n_p\in\mathbb{N},\exists z_p\in\mathbb{C},|z_p|=(2n_p+1)\pi \text{ et } |e^{z_p}-1|<\frac{1}{p+1}$$

Ce qui donne exactement ce qui est souhaité.

Remarques :

▷ J'opte pour une rédaction concise par souci de temps (et cause de flemme aussi). J'estime qu'à ce stade de votre composition, le correcteur a déjà une bonne idée de votre niveau. Ainsi, si les questions précédentes ont (au moins) été aussi bien traitées que ce que je propose (en terme de rédaction surtout), vous pouvez vous permettre ce raccourci. Sinon, démontrez bien (même si cela ne prend que 2 lignes) pourquoi est-ce que les suites obtenues conviennent en effet. Si vous n'êtes pas convaincus de votre production arrivé à cette étape du sujet, alors faites-le quoi qu'il arrive, dans le bénéfice du doute.

Q 24. Fixons une telle suite $(z_p)_{p\in\mathbb{N}}$. On a : $\forall p\in\mathbb{N}, e^{z_p}=e^{a_p+ib_p}=e^{a_p}\times e^{ib_p}$, donc $|e^{z_p}|=e^{a_p}$. Or par la question précédente, $e^{z_p}\xrightarrow[p\to+\infty]{}1$ donc par continuité de l'application module sur $\mathbb{C}$, on a : $|e^{z_p}|=\xrightarrow[p\to+\infty]{}1$. Soit que $e^{a_p}\xrightarrow[p\to+\infty]{}1$. Donc par continuité du logarithme népérien sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{\mathrm{a}_p\xrightarrow[p\to\infty]{}0}$$

Deuxièmement, on a, pour tout $p\in\mathbb{N}$:

$$|z_p|\geqslant|\mathrm{Im}(z_p)|=|b_p|$$

et par inégalité triangulaire :

$$|z_p|\leqslant|\mathrm{Re}(z_p)|+|\mathrm{Im}(z_p)|=|a_p|+|b_p|$$

On en déduit alors :

$$\forall p\in\mathbb{N},0\leqslant|z_p|-|b_p|\leqslant|a_p|$$

D'où par encadrement :

$$\boxed{|z_p|-|b_p|\xrightarrow[p\to\infty]{}0}$$

Q 25. Soit $p\in\mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}\exp(z_p-i\varepsilon_p|z_p|)&=\exp(z_p-i\varepsilon|b_p|-i\varepsilon_p(|z_p|-|b_p|))\\ &=\exp(z_p-ib_p-i\varepsilon_p(|z_p|-|b_p|))\\ &=\exp(a_p-i\varepsilon_p(|z_p|-|b_p|)\end{aligned}$$

D'après la question précédente (et en écrivant $|\varepsilon_p| = 1$), on a :

$$\lim_{p\to+\infty} \varepsilon_p\left(|z_p| - |b_p|\right) = 0$$

Donc, par continuité de l'exponentielle :

$$\lim_{p\to+\infty} \exp\left(z_p - i\varepsilon_p\,|z_p|\right) = \lim_{p\to+\infty} \exp\left(a_p - i\varepsilon_p\left(|z_p| - |b_p|\right)\right) = 1$$

Comme $\left(e^{z_p}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers 1 par la question **Q23**, la propriété de morphisme de l'exponentielle permet d'en déduire :

$$\lim_{p\to+\infty} \exp\left(-i\varepsilon_p\,|z_p|\right) = 1$$

Or : $\forall p \in \mathbb{N}, |z_p| = (2n_p + 1)\,\pi$, donc :

$$\lim_{p\to+\infty} \exp\left(-i\varepsilon_p\,(2n_p+1)\,\pi\right) = 1$$

Or, on a pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\exp\left(-i\varepsilon_p\,(2n_p+1)\,\pi\right) = \exp\left(-\varepsilon_p 2n_p\pi\right)\exp\left(-i\varepsilon_p\pi\right) = -1$$

Par **unicité de la limite**, on obtient dès lors par ce qui précède : $-1 = 1$, ce qui est absurde.

$\boxed{\text{Par l'absurde, on a montré la propriété } \mathcal{P} \text{ de l'énoncé.}}$

IV.B - UNE SOLUTION $\dot{a}$ (E_h)

IV.B - Une solution à (E_h)

Q 26. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$. En raisonnant comme dans la question **Q**14, on montre :

$$\boxed{\mathrm{Q}_n(z) = n!\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{k!}\int_0^1 \frac{\gamma_n(t)^{k-n+1}}{e^{\gamma_n(t)}-1}\,\mathrm{d}t\right)z^k}$$

ce qui prouve que Q_n est développable en série entière sur $\mathbb{C}$, donc appartient à $\mathcal{E}$.
En revanche, la différence entre les deux questions réside dans la vérification de la convergence normale. On l'obtient ici via la majoration :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,1], \qquad \left|\frac{\gamma_n(t)^{k-n+1}}{\left(e^{\gamma_n(t)}-1\right)}\frac{z^k}{k!}\right| \leqslant \frac{1}{c}\frac{((2n+1)\pi|z|)^k}{k!}$$

où $c > 0$ est la constante dont l'existence est donnée par la propriété $\mathcal{P}$, démontrée dans la partie précédente.

On reconnaît ici le terme général du développement en série entière de $\frac{1}{c}exp((2n+1)\pi|z|)$, donc :

La convergence (absolue) sur $\mathbb{C}$ de la série exponentielle assure, par comparaison, la convergence normale donc uniforme sur $[0,1]$ de la série de fonctions $\sum_{k\geqslant 0}\left(t \mapsto \frac{\gamma_n(t)^{k-n+1}}{\left(e^{\gamma_n(t)}-1\right)}\frac{z^k}{k!}\right)$. On conclut alors la démonstration de l'identité précédente via un calcul analogue à celui de la question **Q14**.

Q 27. Soient $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $z \in \mathbb{C}$. En reprenant le raisonnement de la question Q 16, on a :

$$\begin{aligned}
Q_n(z+1) - Q_n(z) &= n!\int_0^1 \frac{e^{z\omega_n(t)}}{\omega_n(t)^{n-1}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{n!}{((2n+1)\pi)^{n-1}}\int_0^1 e^{z(2n+1)\pi\omega(t)}\omega(t)^{-(n-1)}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Appliquons la question **Q**9 à $f : w \mapsto e^{z(2n+1)\pi w} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z(2n+1)\pi)^n}{n!} w^n$. On a alors :

$$Q_n(z+1) - Q_n(z) = \frac{n!}{((2n+1)\pi)^{n-1}} \frac{(z(2n+1)\pi)^{n-1}}{(n-1)!} = nz^{n-1}$$

$\boxed{\text{d'où le résultat.}}$

Q 28. Soit $c > 0$ la constante donnée par la propriété $\mathcal{P}$ démontrée dans la partie IV.A, et soit $(n, z) \in (\mathbb{N}\backslash\{0\}) \times \mathbb{C}$. On a par l'inégalité triangulaire, comme $|\gamma_n(t)| = (2n+1)\pi$ pour tout $t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} |Q_n(z)| &\leqslant \frac{n!}{c} \int_0^1 \frac{\left|e^{z\omega_n(t)}\right|}{|\gamma_n(t)|^{n-1}} \, \mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{n!}{c((2n+1)\pi)^{n-1}} \int_0^1 e^{|z\omega_n(t)|} \mathrm{d}t \\ &= \frac{n!}{c((2n+1)\pi)^{n-1}} e^{|z|(2n+1)\pi} \end{aligned}$$

Comme : $2n+1 \leqslant 3n$ (on a supposé $n \geqslant 1$), ce calcul montre que pour $b = 3\pi > 0$ on a :

$$|Q_n(z)| \leqslant \frac{n!}{c((2n+1)\pi)^{n-1}} e^{bn|z|}$$

Or on a

$$n! = \prod_{k=2}^{n} k \leqslant \prod_{k=2}^{n} n = n^{n-1}$$

donc :

$$|Q_n(z)| \leqslant \frac{1}{c\pi^{n-1}} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n-1} e^{bn|z|} = \frac{1}{c(2\pi)^{n-1}} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^{n-1} e^{bn|z|} \leqslant \frac{1}{c} e^{bn|z|}$$

En posant $a = \frac{1}{c}$, on obtient donc ce qui est souhaité :

$$\exists a, b > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall z \in \mathbb{C}, |Q_n(z)| \leq a e^{bn|z|}$$

Remarques :

▷ On pouvait également démontrer l'existence de a, car le terme en facteur de $e^{bn|z|}$ est de limite nulle lorsque n tend vers $+\infty$, par la formule de Stirling.

Q 29. S'inspirant de la question Q 17, montrons que si $h \in \mathcal{E}$, alors :

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \frac{h^{(n)}(0)}{n!} Q_{n+1}(x)$$

est dans $\mathcal{E}$ et vérifie (E_h). Pour l'appartenance à $\mathcal{E}$, on développe f en série entière grâce au théorème de Fubini (dont on justifiera qu'il s'applique plus bas) :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{C}, \quad f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \frac{h^{(n)}(0)}{n!} \cdot (n+1)! \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{k!} \int_0^1 \frac{\gamma_{n+1}(t)^{k-n}}{e^{\gamma_{n+1}(t)} - 1} \, \mathrm{d}t \right) z^k && \text{(Q26)} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} h^{(n)}(0) \left(\frac{1}{k!} \int_0^1 \frac{\gamma_{n+1}(t)^{k-n}}{e^{\gamma_{n+1}(t)} - 1} \, \mathrm{d}t \right) \right] z^k && \text{(Fubini)} \end{aligned}$$

Justifions que le théorème de Fubini s'applique (notons que vérifier ses hypothèses implique en outre l'existence et finitude des sommes ci-dessus). On a :

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\left|\frac{1}{n+1}\frac{h^{(n)}(0)}{n!}\cdot(n+1)!\left(\frac{1}{k!}\int_0^1\frac{\gamma_{n+1}(t)^{k-n}}{e^{\gamma_{n+1}(t)}-1}\,\mathrm{d}t\right)z^k\right|\\
&=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}\left|\frac{h^{(n)}(0)}{n!}\right|\cdot\left|(n+1)!\left(\frac{1}{k!}\int_0^1\frac{\gamma_{n+1}(t)^{k-n}}{e^{\gamma_{n+1}(t)}-1}\,\mathrm{d}t\right)z^k\right|\\
&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}\left|\frac{h^{(n)}(0)}{n!}\right|\sum_{k=0}^{+\infty}\left|(n+1)!\left(\frac{1}{k!}\int_0^1\frac{\gamma_{n+1}(t)^{k-n}}{e^{\gamma_{n+1}(t)}-1}\,\mathrm{d}t\right)z^k\right|\\
&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}\left|\frac{h^{(n)}(0)}{n!}\right|\cdot|Q_{n+1}(z)|\\
&\leqslant a\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}\left|\frac{h^{(n)}(0)}{n!}\right|\left(e^{b|z|}\right)^n
\end{aligned}$$

or h appartient à $\mathcal{E}$ donc sa série de Taylor $\sum_{n\geqslant 0}\frac{h^{(n)}(0)}{n!}x^n$ est de rayon de convergence infini, et il en est donc aussi de même de sa série entière primitive. La série entière $\sum_{n\geqslant 0}\frac{h^{(n)}(0)}{n!}\frac{x^{n+1}}{n+1}$ converge donc absolument en tout point du plan complexe et en particulier en $e^{b|z|}$. On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\left|\frac{1}{n+1}\frac{h^{(n)}(0)}{n!}\cdot(n+1)!\left(\frac{1}{k!}\int_0^1\frac{\gamma_{n+1}(t)^{k-n}}{e^{\gamma_{n+1}(t)}-1}\,\mathrm{d}t\right)z^k\right|\leqslant ae^{-b|z|}\sum_{n=0}^{+\infty}\left|\frac{h^{(n)}(0)}{n!}\frac{\left(e^{b|z|}\right)^{n+1}}{n+1}\right|<+\infty$$

Ceci montre la sommabilité de la famille $\left(\frac{1}{n+1}\frac{h^{(n)}(0)}{n!}\cdot(n+1)!\left(\frac{1}{k!}\int_0^1\frac{\gamma_{n+1}(t)^{k-n}}{e^{\gamma_{n+1}(t)}-1}\,\mathrm{d}t\right)z^k\right)_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$, par conséquent le théorème de Fubini s'applique et les calculs ayant démontré que f appartient à $\mathcal{E}$ sont valables.
De plus, pour tout $x\in\mathbb{C}$ on a :

$$\begin{aligned}
f(x+1)-f(x)&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}\frac{h^{(n)}(0)}{n!}\left(Q_{n+1}(x+1)-Q_{n+1}(x)\right)\\
&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}\frac{h^{(n)}(0)}{n!}\cdot(n+1)x^n\\
&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{h^{(n)}(0)}{n!}x^n\\
&=h(x)
\end{aligned}\tag{Q27}$$

parce qu'une fonction développable en série entière est somme de sa série de Taylor. Ainsi f vérifie (E_h), d'où le résultat.