Proposition de correction : Mines Maths 1 MP 2024

Thomas Chen
t.chen.thomas1[at]gmail.com

15 mai 2024

Attention. Ceci est une proposition de corrigé fait de manière impulsive. Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur ou une imprécision, vous pouvez me contacter par mail.

Partie I : Calcul d'une intégrale

1. Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$. Alors $t \in]0, +\infty[\mapsto 1 + te^{i\theta}$ est continue et ne s'annule pas. Ainsi, f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$. Au voisinage de 0, on a
$$f(t) \in O_{t\to 0^+}(t^{x-1})$$
et par le critère de Riemann, $t \mapsto t^{x-1}$ est intégrable au voisinage de $0 - x - 1 > -1$. Enfin, pour t au voisinage de $+\infty$,
$$f(t) = \frac{t^{x-1}}{1+t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = t^{x-2}\frac{1}{\frac{1}{t} + \mathrm{e}^{i\theta}} \in O_{t\to+\infty}(t^{x-2}).$$
Puisque $x - 2 < -1$, par le critère de Riemann, f est intégrable au voisinage de $+\infty$. Ainsi, f est bien définie et intégrable sur $]0, +\infty[$.

2. Il s'agit d'une intégrale à paramètre. Notons $g(t,\theta) = \dfrac{t^{x-1}}{1+t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$.
   - Pour tout $t \in \mathbb{R}^{+*}, \theta \mapsto g(t,\theta)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi, \pi[$ et
   $$\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \forall \theta \in]-\pi,\pi[, \frac{\partial g}{\partial \theta}(t,\theta) = -\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{t^x}{(1+t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^2}.$$
   - Pour tout $\theta \in]-\pi, \pi|$, $t \mapsto g(t,\theta)$ et $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial \theta}(t,\theta)$ sont continues sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   - **Domination** : soit $\beta \in]0, \pi[$ et $\theta \in [-\beta, \beta]$. Soit $t \geq 0$.
   $$|1 + t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|^2 = (t + \cos(\theta))^2 + \sin(\theta)^2 = t^2 + 2t\cos(\theta) + 1.$$
   Or, $\cos(\theta) \geq \cos(\beta)$ et par positivité de t, on a donc $t^2 + 2t\cos(\theta) + 1 \geq t^2 + 2t\cos(\beta) + 1$ ce qui donne
   $$|1 + t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|^2 \geq |1 + t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}|^2.$$
   Ainsi,
   $$\forall \beta \in]-\pi,\pi[, \forall \theta \in [-\beta,\beta], \forall t > 0, \left|\frac{\partial g}{\partial \theta}(t,\theta)\right| = \frac{t^x}{|1+t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|^2} \leq \frac{t^x}{|1+t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}|^2} = g(t,\beta) \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^{+*}).$$
   Ainsi, par le théorème de dérivation sous le signe intégral, r est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout compact de $]-\pi,\pi[$ donc elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi,\pi[$ et on sait de plus que
   $$\forall \theta \in]-\pi,\pi[, r'(\theta) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial \theta}(t,\theta)\mathrm{d}t = -\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(1+t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^2}\mathrm{d}t.$$

3. On remarque que $\forall\theta\in]-\pi,\pi[, g(\theta)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\theta}r(\theta)$. Puisque r est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi,\pi[$ par la question précédente et que $\theta\in]-\pi,\pi[\mapsto \mathrm{e}^{ix\theta}\in\mathbb{C}$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi,\pi[$, g l'est aussi et on a

$$\begin{aligned}\forall\theta\in]-\pi,\pi[, g'(\theta)&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\theta}\left(ixr(\theta)+r'(\theta)\right)\\&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\theta}\left(\mathrm{i}x\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\mathrm{d}t-\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\theta}\int_0^{+\infty}\frac{t^x}{(1+t\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\theta})^2}\mathrm{d}t\right)\\&=\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\theta}\int_0^{+\infty}x\frac{t^{x-1}}{1+t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{t^x}{(1+t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^2}.\end{aligned}$$

Or, h est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et par la formule de dérivée d'un produit,

$$\forall t>0, h'(t)=x\frac{t^{x-1}}{1+t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{t^x}{(1+t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^2}.$$

On a donc

$$\forall\theta\in]-\pi,\pi[, g'(\theta)=\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\theta}\int_0^{+\infty}h'(t)\mathrm{d}t.$$

Par ailleurs, h est prolongeable par continuité en 0 par 0 ($x>0$) et

$$\forall t>0, |h(t)|\leq\frac{1}{|t^{-x}+t^{1-x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|}$$

et le dénominateur du membre de droite tend vers $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$ donc $h(t)\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0$. On a alors

$$\int_0^{+\infty}h'(t)\mathrm{d}t=\lim_{A\to+\infty}\int_0^A h'(t)\mathrm{d}t=\lim_{A\to+\infty}(h(A)-h(0))=0.$$

Ainsi, $g'(\theta)=0$ et ce, pour tout $\theta\in]-\pi,\pi[$. g est donc constante sur $]-\pi,\pi[$.

4. Soit $\theta\in]0,\pi[$. Alors

$$g(\theta)\sin(x\theta)=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(g(\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\theta}-g(\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\theta}\right).$$

Or, g est constante sur $]-\pi,\pi[$ donc $g(\theta)=g(-\theta)$. On a donc

$$g(\theta)\sin(x\theta)=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(g(-\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\theta}-g(\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\theta}\right).$$

De plus,

$$\begin{aligned}g(-\theta)\mathrm{e}^{ix\theta}-g(\theta)\mathrm{e}^{-ix\theta}&=\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}\mathrm{d}t-\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{+\infty}t^{x-1}\frac{1+t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-1-t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{|1+t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|^2}\mathrm{d}t\\&=2\mathrm{i}\sin(\theta)\int_0^{+\infty}\frac{t^x}{|1+t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|^2}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Puisque $|1+t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|^2=t^2+2t\cos(\theta)+1$, en divisant par $2\mathrm{i}$, on a bien

$$\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(g(-\theta)\mathrm{e}^{ix\theta}-g(\theta)\mathrm{e}^{-ix\theta}\right)=\sin(\theta)\int_0^{+\infty}\frac{t^x}{t^2+2t\cos(\theta)+1}\mathrm{d}t.$$

Ainsi,

$$g(\theta)\sin(x\theta)=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(g(-\theta)\mathrm{e}^{ix\theta}-g(\theta)\mathrm{e}^{-ix\theta}\right)=\sin(\theta)\int_0^{+\infty}\frac{t^x}{t^2+2t\cos(\theta)+1}\mathrm{d}t.$$

5. Soit $\theta\in]0,\pi[$. Le changement de variable $t(u)=u\sin(\theta)-\cos(\theta)$ est affine. En vu du théorème de changement de variables, procédons à quelques calculs.

- $\mathrm{d}t = \sin(\theta)\mathrm{d}u$. Si $t = 0$, alors $u = \text{cotan}(\theta)$ qui est définie car $\sin > 0$ sur $]0, \pi[$. Si $t \to +\infty$, $u \to +\infty$.
- De plus, $t^2 + 2t\cos(\theta) + 1 = t(t + 2\cos(\theta)) + 1 = (u\sin(\theta) - \cos(\theta))(u\sin(\theta) + \cos(\theta)) + 1 = u^2\sin^2(\theta) - \cos^2(\theta) + 1 = \sin^2(\theta)(1 + u^2)$.

Le théorème de changement de variable donne donc

$$\sin(\theta)\int_0^{+\infty}\frac{t^x}{t^2+2t\cos(\theta)+1}\mathrm{d}t = \sin^2(\theta)\int_{\text{cotan}(\theta)}^{+\infty}\frac{(u\sin(\theta)-\cos(\theta))^x}{\sin^2(\theta)(1+u^2)}\mathrm{d}u = \int_{\text{cotan}(\theta)}^{+\infty}\frac{(u\sin(\theta)-\cos(\theta))^x}{1+u^2}\mathrm{d}u.$$

On a donc, avec la question 4,

$$\forall\theta\in]0,\pi[, g(\theta)\sin(x\theta) = \int_{\text{cotan}(\theta)}^{+\infty}\frac{(u\sin(\theta)-\cos(\theta))^x}{1+u^2}\mathrm{d}u.$$

6. On veut faire tendre θ vers π^- mais θ se trouve dans l'intégrale et sur les bornes. Par la question précédente,

$$\forall\theta\in]0,\pi[, g(\theta)\sin(x\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty}\phi(u,\theta)\mathrm{d}u$$

avec

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times]0,\pi[& \to & \mathbb{R} \\ (u,\theta) & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{(u\sin(\theta)-\cos(\theta))^x}{1+u^2} & \text{si } u\in[\text{cotan}(\theta),+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

- Pour tout $\theta\in]0,\pi[$, $u\in\mathbb{R}\mapsto\phi(u,\theta)\in\mathbb{C}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $u\in\mathbb{R}$
$$\frac{(u\sin(\theta)-\cos(\theta))^x}{1+u^2}\underset{\theta\to\pi^-}{\longrightarrow}\frac{1}{1+u^2}.$$
(On rappelle que x est fixé.) De plus, $\text{cotan}(\theta)\underset{\theta\to\pi^-}{\longrightarrow}-\infty$ donc $\forall u\in\mathbb{R}, \phi(u,\theta)\underset{\theta\to\pi^-}{\longrightarrow}\dfrac{1}{1+u^2}$.
- Domination : soit $\theta\in]0,\pi[, u\in\mathbb{R}$. Alors si $u<\text{cotan}(\theta), \phi(u,\theta)=0$. Sinon,
$$|u\sin(\theta)-\cos(\theta)|\leq|u|+1$$
donc
$$|(u\sin(\theta)-\cos(\theta))^x| = |u\sin(\theta)-\cos(\theta)|^x\leq(|u|+1)^x.$$
Ainsi, par disjonction de cas,
$$\forall\theta\in]0,\pi[,\forall u\in\mathbb{R}, |\phi(u,\theta)|\leq\frac{(|u|+1)^x}{1+u^2} =: \psi(u).$$
Vérifions l'intégrabilité de ψ. C'est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $\psi(u)\in O_{u\to\pm\infty}(u^{2-x})$ donc ψ est intégrable par comparaison. Ainsi, ψ est bien intégrable. On a la domination voulue.

Par le théorème de convergence dominée, on a finalement

$$g(\theta)\sin(x\theta)\underset{\theta\to\pi^-}{\longrightarrow}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}.$$

7. Déjà,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \pi$$

puisque $\forall x\in\mathbb{R}, \arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Ensuite, puisque g est constante sur $]-\pi,\pi[$, elle est prolongeable par continuité en π par la gauche par $g(0)$. On note encore g la fonction ainsi prolongée. Ainsi,

$$\lim_{\theta\to\pi^-}g(\theta)\sin(x\theta) = \lim_{\theta\to\pi^-}g(\theta)\lim_{\theta\to\pi^-}\sin(x\theta) = g(0)\sin(\pi x).$$

Or,

$$g(0) = \mathrm{e}^0 \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t\mathrm{e}^0}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t$$

et donc, par la question précédente,

$$\sin(\pi x) \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t = \pi$$

ce qui donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

Remarque : on peut montrer que l'intégrale de gauche est égale à $\Gamma(x)\Gamma(1-x)$ avec Γ la fonction Gamma d'Euler. La méthode standard utilise le théorème de Fubini pour les intégrales, pas au programme de Mathématiques Spéciales. L'identité ainsi obtenue s'appelle alors « la formule des compléments ». Elle a été établie dans le sujet CCP MP Maths 1 2023 en fin de partie par exemple – sans Fubini –.

Partie II : Une expression (utile) de la fonction sinus

8. $t \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \frac{t^{x-1}}{1+t}$ étant intégrable (question 1 avec $\theta = 0$), on peut en particulier utiliser la relation de Chasles pour écrire

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t = \int_0^{1} \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t.$$

Dans la deuxième intégrale, on réalise le changement de variable $u(t) = 1/t$ qui est un changement de variable $\mathcal{C}^1$ bijectif[1] de $[1, +\infty[$ dans $]0, 1]$. On a $\mathrm{d}u = -\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = -u^2\mathrm{d}t$. Ainsi,

$$\int_1^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t = \int_0^{1} \frac{u^{1-x}}{1+u^{-1}}u^{-2}\mathrm{d}u = \int_0^{1} \frac{u^{1-x}u^{-1}}{u+1}\mathrm{d}u = \int_0^{1} \frac{u^{-x}}{1+u}\mathrm{d}u.$$

Ainsi,

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t = \int_0^{1} \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t + \int_0^{1} \frac{u^{-x}}{1+u}\mathrm{d}u = \int_0^{1} \frac{t^{x-1}}{1+t} + \frac{t^{-x}}{1+t}\mathrm{d}t.$$

9. Soit A un réel dans $[0, 1[$. Alors

$$\int_0^{A} \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t = \int_0^{A} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{n+x-1}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^{A} t^{n+x-1}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{A^{n+x}}{n+x}.$$

L'interversion est justifiée puisqu'on a la convergence normale de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n t^{n+x-1}$: elle provient de

$$\forall t \in [0, A], \forall n \in \mathbb{N}^*, |t^{n+x-1}| \leq A^{n+x-1}$$

avec $A \in [0, 1[$. Il reste maintenant à faire tendre A vers 1. Dans le membre de gauche, c'est par définition. dans le membre de droite, par décroissance de la fonction $t \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \frac{u^t}{t}$ avec $u \in [0, 1]$ – produit de deux fonctions décroissantes positives –, le critère spécial des séries alternées donne la convergence uniforme de la série de fonctions associée sur $[0, 1]$. Par interversion série-limite, on a donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{A^{n+x}}{n+x} \underset{A \to 1^-}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n+x}.$$

[1]. puisque le mot difféomorphisme n'est pas au programme, cette « locution » semble suffisamment explicite pour justifier le changement de variable.

Ainsi,

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}.$$

10. On pose $y = 1-x$. Alors $y \in]0,1[$ et la question précédente assure donc que

$$\int_0^1 \frac{t^{y-1}}{1+t}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+y}.$$

Il suffit maintenant de remplacer y par $1-x$ pour obtenir

$$\int_0^1 \frac{t^{-x}}{1+t}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1-x}.$$

Par la question 8, on a donc finalement

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{t^{-x}}{1+t}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1-x}.$$

11. Dans l'égalité précédente, le terme de gauche égale $\dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}$ par la question 7. Par ailleurs, par somme de séries convergentes,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1-x} &= \frac{(-1)^0}{0+x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n-x} \\ &= \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n-x-(n+x)}{n^2-x^2} \\ &= \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n x}{n^2-x^2}.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n x}{n^2-x^2}.$$

12. Soit $y \in]0,\pi[$ et $u = y/\pi$. u est alors dans $]0,1[$ et par la question précédente,

$$\frac{\pi}{\sin(\pi u)} = \frac{1}{u} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n u}{n^2-u^2}.$$

Ainsi,

$$\frac{\pi}{\sin(y)} = \frac{\pi}{y} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n \frac{y}{\pi}}{n^2 - \frac{y^2}{\pi^2}} = \frac{\pi}{y} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\pi(-1)^n y}{y^2-n^2\pi^2}.$$

En multipliant l'égalité par $\dfrac{\sin(y)}{\pi}$, on obtient finalement

$$1 - \frac{\sin(y)}{y} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n y \sin(y)}{y^2-n^2\pi^2}.$$

Partie III : Calcul d'une intégrale de Dirichlet généralisée

On va supposer que p est un entier naturel – ce n'est pas précisé par l'énoncé mais vu la question 17 ... –.

13. Alors $f : t \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \dfrac{1-\cos^{2p+1}(t)}{t^2} \in \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$. De plus,

- au voisinage de 0, on a $1-\cos^{2p+1}(t) = 1-(1-t^2/2+o_{t\to 0}(t^2))^{2p+1} = 1-\left(1-\dfrac{2p+1}{2}t^2+o_{t\to 0}(t^2)\right) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{2p+1}{2}t^2$. Ainsi, $f(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 2p+1$ donc f est prolongeable par continuité en 0.
- Au voisinage de $+\infty$, on a $f(t) \in O_{t\to+\infty}(1/t^2)$ [2] donc par le critère de Riemann, f est intégrable au voisinage de $+\infty$ par comparaison.

Ainsi, f est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos^{2p+1}(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ converge. Soit $A, B > 0$ avec $A < B$. Par intégration par parties, on a

$$\int_A^B \frac{1-\cos^{2p+1}(t)}{t^2}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1-\cos^{2p+1}(t)}{t}\right]_A^B + \int_A^B (2p+1)\frac{\sin(t)\cos^{2p}(t)}{t}\mathrm{d}t.$$

Le crochet converge vers 0 lorsque $A \to 0$ [3] et $B \to +\infty$ [4]. Ainsi, comme l'intégrale de départ converge quand $A \to 0, B \to +\infty$, on a finalement,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos^{2p+1}(t)}{t^2}\mathrm{d}t = (2p+1)\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)\cos^{2p}(t)}{t}\mathrm{d}t.$$

14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Réalisons le changement de variable affine $u = t - n\pi$:

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}+n\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi} \cos^{2p}(t)\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2p}(u+n\pi)\frac{\sin(u+n\pi)}{u+n\pi}\mathrm{d}u \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-1)^{2pn}\cos^{2p}(u)\frac{\sin(u)(-1)^n}{u+n\pi}\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{\pi/2} \cos^{2p}(u)\frac{\sin(u)(-1)^n}{u+n\pi}\mathrm{d}u + \int_{-\pi/2}^{0} \cos^{2p}(u)\frac{\sin(u)(-1)^n}{u+n\pi}\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

On réalise alors le changement de variable $t = -u$ dans la deuxième intégrale pour obtenir

$$\int_{-\pi/2}^{0} \cos^{2p}(u)\frac{\sin(u)(-1)^n}{u+n\pi}\mathrm{d}u = \int_0^{\pi/2} \cos^{2p}(t)\frac{\sin(t)(-1)^{n+1}}{-t+n\pi}\mathrm{d}t.$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}+n\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi} \cos^{2p}(t)\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t &= \int_0^{\pi/2} \cos^{2p}(t)\frac{\sin(t)(-1)^n}{t+n\pi} - \cos^{2p}(t)\frac{\sin(t)(-1)^n}{-t+n\pi}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi/2} \cos^{2p}(t)\sin(t)(-1)^n\frac{-2t}{n^2\pi^2-t^2}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi/2} \cos^{2p}(t)\sin(t)(-1)^n\frac{2t}{t^2-n^2\pi^2}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

2. produit d'une fonction bornée par $t \mapsto 1/t^2$
3. par l'équivalent obtenu en début de question, ce quotient tend vers 0
4. car produit d'une fonction bornée par une fonction tendant vers 0

15. En sommant, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{-\frac{\pi}{2}+n\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi}\cos^{2p}(t)\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t=\int_{\pi/2}^{+\infty}\cos^{2p}(t)\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$$
$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{0}^{\pi/2}\cos^{2p}(t)\sin(t)(-1)^n\frac{2t}{t^2-n^2\pi^2}\mathrm{d}t$$
$$=\int_{0}^{\pi/2}\sum_{n=1}^{+\infty}\cos^{2p}(t)\sin(t)(-1)^n\frac{2t}{t^2-n^2\pi^2}\mathrm{d}t.$$

Il suffit donc de justifier l'interversion série-intégrale. On cherche alors à montrer que

$$\int_{0}^{\pi/2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{t^2-n^2\pi^2}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{0}^{\pi/2}\frac{(-1)^n}{t^2-n^2\pi^2}\mathrm{d}t$$

que l'on peut obtenir avec de la convergence uniforme. Or

$$\forall t\in[0,\pi/2],\forall n\geq 1,(n\pi)^2\geq t^2$$

donc

$$\forall t\in[0,\pi/2],\forall n\geq 1,|t^2-n^2\pi^2|=n^2\pi^2-t^2\geq n^2\pi^2-\pi^2/4.$$

Ainsi,

$$\forall t\in[0,\pi/2],\forall n\geq 1,\left|\frac{(-1)^n}{t^2-n^2\pi^2}\right|\leq\frac{1}{n^2\pi^2-\pi^2/4}$$

et la série de terme général le terme de droite converge. Ainsi, on a la convergence uniforme de la série de fonctions considérée et l'interversion est justifiée.

16. On utilise la question 12. On a alors

$$\int_{0}^{\pi/2}\sum_{n=1}^{+\infty}\cos^{2p}(t)\sin(t)(-1)^n\frac{2t}{t^2-n^2\pi^2}\mathrm{d}t=\int_{0}^{\pi/2}\cos^{2p}(t)\left(1-\frac{\sin(t)}{t)}\right)\mathrm{d}t$$
$$=\int_{0}^{\pi/2}\cos^{2p}(t)\mathrm{d}t-\int_{0}^{\pi/2}\cos^{2p}(t)\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t.$$

Par la question précédente, on en déduit donc que

$$\int_{0}^{\pi/2}\cos^{2p}(t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{\pi/2}\cos^{2p}(t)\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t+\int_{\pi/2}^{+\infty}\cos^{2p}(t)\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t=\int_{0}^{+\infty}\cos^{2p}(t)\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t.$$

Remarque : comme le précise l'énoncé, c'est l'intégrale de Dirichlet pour $p=0$*. On vient donc de montrer que l'intégrale du sinus cardinal sur* $\mathbb{R}$ *vaut* $\frac{\pi}{2}$*. Ce thème est super classique et aussi peut tomber sous la forme d'un exercice d'oral. On pourra trouver diverses façons de la calculer, par exemple dans le sujet CCP PC 2020.*

17. Suivons l'indication. Soit $t\in\mathbb{R}$. On a

$$\cos^{2p}(t)=\left(\frac{\mathrm{e}^{it}+\mathrm{e}^{-it}}{2}\right)^{2p}=\frac{1}{2^{2p}}\sum_{k=0}^{2p}\binom{2p}{k}\mathrm{e}^{ikt}\mathrm{e}^{-i(2p-k)t}.$$

On a

$$\sum_{k=0}^{2p}\binom{2p}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2p-k)t}=\sum_{k=0}^{p-1}\binom{2p}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2p-k)t}+\sum_{k=p+1}^{2p}\binom{2p}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2p-k)t}+\binom{2p}{p}\mathrm{e}^{ipt}\mathrm{e}^{-ipt}$$
$$=\sum_{k=0}^{p-1}\binom{2p}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\mathrm{e}^{-i(2p-k)t}+\sum_{k=0}^{p-1}\binom{2p}{2p-k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2p-k)t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2p-2p+k)t}+\binom{2p}{p}$$
$$=\binom{2p}{p}+\sum_{k=0}^{p-1}\binom{2p}{k}\underbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2p-k)t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2p-k)t}}_{=2\cos(kt-2pt+kt)=2\cos(2(p-k)t)}.$$

Ainsi,

$$\cos^{2p}(t) = \frac{1}{2^{2p}}\left(\binom{2p}{p} + 2\sum_{k=0}^{p-1}\binom{2p}{k}\cos(2(p-k)t)\right).$$

18. Il s'agit essentiellement de calculer l'intégrale sur $[0, \pi/2]$ de la quantité précédente. On a

$$\int_0^{\pi/2}\cos^{2p}(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2^{2p}}\left(\binom{2p}{p}\frac{\pi}{2} + 2\sum_{k=0}^{p-1}\binom{2p}{k}\int_0^{\pi/2}\cos(2(p-k)t)\mathrm{d}t\right).$$

Or, pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$,

$$\int_0^{\pi/2}\cos(2(p-k)t)\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin(2(p-k)t)}{2(p-k)}\right]_0^{\pi/2} = 0.$$

Ainsi,

$$\int_0^{\pi/2}\cos^{2p}(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2^{2p}}\binom{2p}{p}\frac{\pi}{2}.$$

Remarque : ce sont des intégrales de Wallis ! Par 13 et 16, on a donc

$$\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos^{2p+1}(t)}{t^2}\mathrm{d}t = (2p+1)\frac{1}{2^{2p}}\binom{2p}{p}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2^{2p}}\frac{(2p)!}{p!^2} = \frac{\pi}{2}\frac{(2p+1)!}{2^{2p}p!^2}.$$

Partie IV : Calcul de $\mathbb{E}(|S_n|)$

19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. S_n est à valeurs dans $[-n, n]$ donc admet une espérance et une variance. On a

$$\mathbb{E}[S_n] = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[X_k] = 0$$

car $\mathbb{E}[X_k] = -\mathbb{P}(X_k = -1) + \mathbb{P}(X_k = 1) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. De plus, par indépendance des $(X_k)_{k\geq 1}$, elles sont en particulier non corrélées donc

$$\mathrm{Var}(S_n) = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Var}(X_k) = n$$

puisque

$$\mathrm{Var}(X_k) = \mathbb{E}[X_k^2] - \mathbb{E}[X_k]^2 = (-1)^2\mathbb{P}(X_k = -1) + (1)^2\mathbb{P}(X_k = 1) = 1.$$

20. S et T sont à support fini donc $S, T, \cos(S), \cos(T)$ admettent une espérance – les cos par formule de transfert –. Par ailleurs, le cours assure que si X et Y sont indépendantes, $f(X)$ et $g(Y)$ le sont dès lors que f est définie sur $X(\Omega)$, g sur $Y(\Omega)$. On a donc

$$\mathbb{E}[\cos(S+T)] = \mathbb{E}[\cos(S)\cos(T) - \sin(S)\sin(T)] = \mathbb{E}[\cos(S)\cos(T)] - \mathbb{E}[\sin(S)\sin(T)].$$

Par indépendance,

$$\mathbb{E}[\cos(S+T)] = \mathbb{E}[\cos(S)]\mathbb{E}[\cos(T)] - \mathbb{E}[\sin(S)]\mathbb{E}[\sin(T)].$$

T et $-T$ suivent la même loi donc $\sin(T)$ et $\sin(-T)$ aussi et ont la même espérance. Or, $\mathbb{E}[\sin(-T)] = \mathbb{E}[-\sin(T)] = -\mathbb{E}[\sin(T)]$ donc $\mathbb{E}[\sin(T)] = 0$. Ainsi,

$$\mathbb{E}[\cos(S+T)] = \mathbb{E}[\cos(S)]\mathbb{E}[\cos(T)].$$

21. Soit t réel. On applique la question précédente avec une récurrence. Pour $n = 1$, $\mathbb{E}[\cos(tS_1)] = \mathbb{E}[\cos(tX_1)]$ mais $\mathbb{E}[\cos(tX_k)] = \cos(-t)\mathbb{P}(X_k = -1) + \cos(t)\mathbb{P}(X_k = -1) = \cos(t)$ par la formule de transfert puis par parité de cos, et ce, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathbb{E}[\cos(tS_n)] = \cos^n(t)$. Alors

$$\mathbb{E}[\cos(tS_{n+1})] = \mathbb{E}[\cos(tS_n + tX_{k+1})] \underset{Q20}{=} \mathbb{E}[\cos(tS_n)]\mathbb{E}[tX_{k+1}] = \cos^n(t)\cos(t) = \cos^{n+1}(t).$$

Par principe de récurrence, on en déduit donc que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}[\cos(tS_n)] = \cos^n(t)$$

et ce, pour tout t réel.

22. Soit a, b deux réels avec $|b| \leq |a|$. Si a et b sont de même signe, alors $|a+b| = |a| + |b|$ et comme a et b sont de même signe, $\operatorname{sgn}(a)b$ est positif donc égal à sa valeur absolue et on a $|a+b| = |a| + \operatorname{sgn}(a)b$.

Si a et b sont de signe opposé, alors $|a+b| = ||a| - |b|| = |a| - |b|$ car on a l'inégalité $|b| \leq |a|$. Mais a et b sont de signe opposé donc $|b| = \operatorname{sgn}(a)b$.

Dans tous les cas,
$$|a+b| = |a| + \operatorname{sgn}(a)b.$$

Soit maintenant $n \in \mathbb{N}^*$. Mettons que $\operatorname{sgn}(0) = 1$. Alors

$$\mathbb{E}[|S_{2n}|] = \mathbb{E}[|S_{2n-1}| + \operatorname{sgn}(S_{2n-1})X_{2n}].$$

En effet, soit $\omega \in \Omega$. Si $|X_{2n}(\omega)| \leq |S_{2n-1}(\omega)|$, la question précédente l'assure. Sinon, alors $S_{2n-1}(\omega) = a$ et $X_{2n}(\omega) = b$ avec $a = -1, 0$ ou 1 et $b = -1$ ou 1. Dans les 6 cas possibles, il est clair que

$$|a+b| = |a| + \operatorname{sgn}(a)b$$

avec la convention $\operatorname{sgn}(0) = 1$ comme annoncé avant.

Maintenant, par linéarité de l'espérance, on a

$$\mathbb{E}[|S_{2n}|] = \mathbb{E}[|S_{2n-1}|] + \mathbb{E}[\operatorname{sgn}(S_{2n-1})X_{2n}].$$

Or, S_{2n-1} et X_{2n} sont indépendantes. En effet, en notant $f : (x_1, \cdots, x_{2n-1}) \in \mathbb{R}^{2n-1} \mapsto \sum_{k=1}^{2n-1} x_k \in \mathbb{R}$, on a, par le lemme des coalitions, $S_{2n-1} = f(X_1, \cdots, X_{2n-1})$ et X_{2n} sont indépendantes donc S_{2n-1} et X_{2n} le sont. Ainsi, $\operatorname{sgn}(S_{2n-1})$ et X_{2n} sont indépendantes et

$$\mathbb{E}[|S_{2n}|] = \mathbb{E}[|S_{2n-1}|] + \mathbb{E}[\operatorname{sgn}(S_{2n-1})]\underbrace{\mathbb{E}[X_{2n}]}_{=0} = \mathbb{E}[|S_{2n-1}|].$$

23. Soit s réel. Si $s = 0$, l'identité voulue est vérifiée. Par parité du membre de gauche et droite, on peut supposer que $s > 0$ et conclure par parité. Soit donc $s > 0$. Le changement de variable $u = st$ est alors $\mathcal{C}^1$ bijectif de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$, ne change pas la nature de l'intégrale et on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(st)}{t^2} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} s \frac{1 - \cos(u)}{u^2} \mathrm{d}u = s\frac{\pi}{2}$$

par la question 18 et on a, de surcroît, la convergence de l'intégrale. Ainsi, par parité, on a

$$\forall s \in \mathbb{R}, \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(st)}{t^2} \mathrm{d}t = |s|\frac{\pi}{2}.$$

24. Par précédent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tS_n)}{t^2} \mathrm{d}t = |S_n|\frac{\pi}{2}.$$

On a envie de passer à l'espérance cette égalité. Cela est possible car l'espérance, ici, induit une somme finie puisque S_n est à support fini. On obtient alors par linéarité de l'intégrale

$$\mathbb{E}[|S_n|]\frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \mathbb{E}\left[\frac{1-\cos(tS_n)}{t^2}\right] \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1-\mathbb{E}[\cos(tS_n)]}{t^2}\mathrm{d}t \underset{Q21}{=} \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos^n(t)}{t^2}\mathrm{d}t.$$

En multipliant par $\frac{2}{\pi}$, on a finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{E}[|S_n|] = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos^n(t)}{t^2}\mathrm{d}t.$$

25. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en notant $p = n-1$, on a

$$\mathbb{E}[|S_{2n}|] = \mathbb{E}[|S_{2n-1}|] \underset{Q24}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos^{2p+1}(t)}{t^2}\mathrm{d}t \underset{Q18}{=} \frac{(2p+1)!}{2^{2p}(p!)^2} = \frac{(2n-1)!}{2^{2n-2}[(n-1)!]^2}.$$

FIN DU SUJET