

# SUJET DE CONCOURS

---

## Mines et Ponts

*Session 2024*

## MATHÉMATIQUES 2

*Corrigé proposé par SADIK BOUJAIDA*

### TABLE DES MATIÈRES

<b>ÉNONCÉ : Phénomènes de seuil dans les graphes</b>	3
Quelques propriétés algébriques des matrices d'adjacence	5
Une première fonction de seuil	8
Fonction de seuil de la copie d'un graphe	8
<b>CORRIGÉ : Phénomènes de seuil dans les graphes</b>	11
Quelques propriétés algébriques des matrices d'adjacence	11
Une première fonction de seuil	17
Fonction de seuil de la copie d'un graphe	18



## ■ ÉNONCÉ ■

# Phénomènes de seuil dans les graphes

Dans ce problème,  $n$  désigne un entier supérieur à 1. On désigne par  $\llbracket 1 ; n \rrbracket$  l'ensemble des entiers compris entre 1 et  $n$ .

Le groupe symétrique des permutations de  $\llbracket 1 ; n \rrbracket$  est noté  $\mathcal{S}_n$ .

L'ensemble des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients réels est noté  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ .

Le cardinal d'un ensemble fini  $E$  sera noté  $\text{card}(E)$  ou  $|E|$ .

Un graphe  $G$  est un couple  $(S, A)$  où :

- ◆  $S$  désigne un ensemble fini non vide d'éléments appelés sommets du graphe  $G$
- ◆  $A$  désigne un ensemble éventuellement vide d'éléments appelés arêtes du graphe  $G$ , une arête étant un ensemble  $\{s, s'\}$  où  $s$  et  $s'$  sont des sommets distincts de  $S$ .

Un sommet n'appartenant à aucune arête est dit isolé. Par convention, le graphe vide est le couple d'ensembles vides  $(\emptyset, \emptyset)$ .

On peut représenter un graphe non vide dans un plan à l'aide :

- ◆ de disques schématisant les sommets du graphe
- ◆ de segments reliant ces disques pour les arêtes du graphe.

Par exemple, on a représenté sur la FIGURE 1, le graphe  $G = (S, A)$  avec :

$$S = \llbracket 1 ; 9 \rrbracket \text{ et } A = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 3\}, \{2, 9\}, \{2, 8\}\}$$

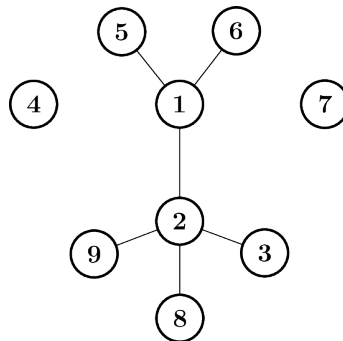


FIGURE 1 – un graphe à 9 sommets et 6 arêtes

On remarquera que les arêtes sont constituées de deux sommets distincts, ce qui interdit la présence de "boucles" reliant un sommet à lui-même.

De plus, une même arête ne peut être présente plusieurs fois dans un graphe.

Un type de graphe utilisé dans ce problème est l'étoile.

Une **étoile** de **centre**  $s$  et à  $d$  **branches** avec  $d$  entier naturel non nul, est un graphe  $(S, A)$  où  $S = \{s, s_1, s_2, \dots, s_d\}$  est de cardinal  $d + 1$ , et  $A$  est du type

$$A = \{\{s, s_1\}, \{s, s_2\}, \dots, \{s, s_d\}\}$$

On a représenté FIGURE 2 une étoile de centre 4 à 5 branches avec  $S = \{1, 3, 4, 5, 6, 8\}$ .

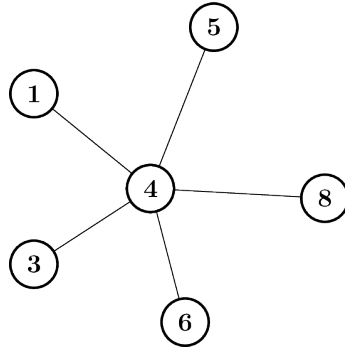


FIGURE 2 – une étoile à 5 branches

Soient  $G = (S, A)$  et  $G' = (S', A')$  deux graphes; on dit que :

- ◆  $G'$  est inclus dans  $G$  si  $S' \subset S$  et  $A' \subset A$
- ◆  $G'$  est une copie de  $G$  s'il existe une bijection  $\sigma$  de  $S'$  dans  $S$  telle que :

$$\forall (s', t') \in S' \times S' \quad \{s', t'\} \in A' \iff \{\sigma(s'), \sigma(t')\} \in A$$

Par exemple, le graphe de la Figure 1 contient plusieurs copies d'étoiles à une branche (correspondant aux segments), plusieurs copies d'étoiles à deux branches, mais aussi une copie d'une étoile à 3 branches (de centre 1) et une copie d'une étoile à 4 branches (de centre 2).

Dans une première partie, on étudie quelques propriétés algébriques des matrices d'adjacence.

On introduit ensuite la notion de fonction de seuil en probabilité des graphes aléatoires. Les deux parties qui suivent la première partie sont indépendantes de celle-ci, et sont consacrées à l'étude de deux exemples.

## PARTIE I. QUELQUES PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES DES MATRICES D'ADJACENCE

Soit  $G = (S, A)$  un graphe non vide où  $|S| = n$ . Indexer arbitrairement les sommets de 1 à  $n$  revient à choisir une bijection (appelée aussi indexation)  $\sigma$  entre  $\llbracket 1; n \rrbracket$  et  $S$ . On pourra alors noter :

$$S = \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)\}$$

où  $\sigma(i)$  est le sommet d'index  $i$ . Une indexation  $\sigma$  étant choisie, on définit la matrice d'adjacence  $M_{G,\sigma}$  du graphe  $G$  associée à  $\sigma$  comme étant la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  dont le coefficient situé sur la  $i^e$  ligne et la  $j^e$  colonne est :

$$(M_{G,\sigma})_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{\sigma(i), \sigma(j)\} \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On remarquera d'une part que la matrice  $M_{G,\sigma}$  est toujours symétrique (car pour tous  $i$  et  $j$  entiers,  $\{i, j\} = \{j, i\}$ ) et d'autre part que les termes de la diagonale sont tous nuls (pas de boucle dans un graphe).

Voici par exemple la matrice d'adjacence  $M_{G,\text{id}}$  du graphe  $G$  représenté sur la FIGURE 1 :

$$M_{G,\text{id}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit  $\rho$  une permutation du groupe symétrique  $S_n$  et  $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ .

- 1** Montrer que les matrices  $M$  et  $(m_{\rho(i),\rho(j)})_{1 \leq i,j \leq n}$  sont semblables. En déduire que si  $G = (S, A)$  est un graphe non vide, et si  $\sigma$  et  $\sigma'$  sont deux indexations de  $S$ , alors  $M_{G,\sigma}$  et  $M_{G,\sigma'}$  sont semblables.
- 2** Justifier qu'une matrice d'adjacence d'un graphe non vide est diagonalisable.
- 3** Montrer qu'une matrice d'adjacence d'un graphe non vide n'est jamais de rang 1.
- 4** Montrer qu'une matrice d'adjacence d'un graphe dont les sommets non isolés forment un graphe de type étoile est de rang 2 et représenter un exemple de graphe dont la matrice d'adjacence est de rang 2 et qui n'est pas du type précédent.

Si  $G = (S, A)$  est un graphe non vide et si  $\sigma$  et  $\sigma'$  sont des indexations de  $S$ , comme les matrices  $M_{G,\sigma}$  et  $M_{G,\sigma'}$  sont semblables, elles ont même polynôme caractéristique

(ce que l'on ne demande pas de démontrer).

On notera  $\chi_G$  ce polynôme caractéristique commun et on dira que  $\chi_G$  est le polynôme caractéristique du graphe  $G$ . Par convention, le polynôme caractéristique du graphe vide est le polynôme constant égal à 1.

**5** Soit  $G$  un graphe et  $G'$  une copie de  $G$ . Justifier que  $\chi_G = \chi_{G'}$ .

**6** Soit  $G = (S, A)$  un graphe avec  $|S| = n \geq 2$ . On note  $\chi_G(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ .

Donner la valeur de  $a_{n-1}$  et exprimer  $a_{n-2}$  à l'aide de  $|A|$ .

**7** En déduire le polynôme caractéristique d'un graphe à  $n$  sommets dont les sommets non isolés forment une étoile à  $d$  branches avec  $1 \leq d \leq n-1$ . Déterminer alors les valeurs et vecteurs propres d'une matrice d'adjacence de ce graphe.

Si  $G = (S, A)$  est un graphe non vide et si  $s$  appartient à  $S$ , on définit le graphe  $G \setminus s$  comme étant le graphe dont l'ensemble des sommets est  $S \setminus \{s\}$  et l'ensemble des arêtes est constitué des arêtes de  $A$  qui ne contiennent pas  $s$ . Voici par exemple FIGURE 3 un graphe  $G$  et le graphe  $G \setminus 2$  :

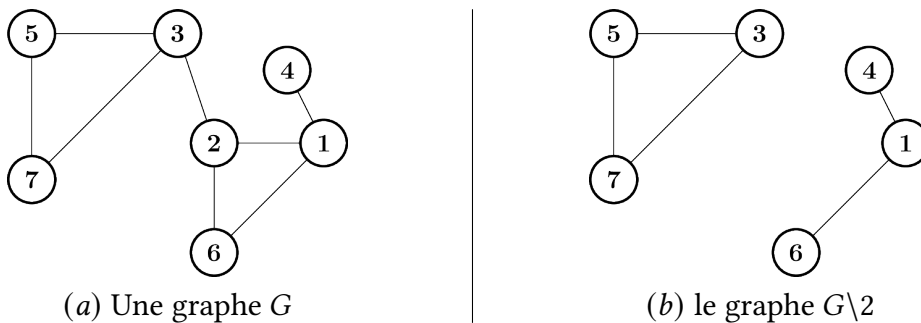


FIGURE 3 – Un graphe  $G$  et le graphe  $G \setminus 2$

Soient  $G_1 = (S_1, A_1)$  et  $G_2 = (S_2, A_2)$  deux graphes non vides tels que  $S_1$  et  $S_2$  soient disjoints, c'est-à-dire tels que  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ . Soit  $s_1 \in S_1$  et soit  $s_2 \in S_2$ . On définit le graphe  $G = (S, A)$  avec  $S = S_1 \cup S_2$  et  $A = A_1 \cup A_2 \cup \{\{s_1, s_2\}\}$ .

**8** Montrer que :

$$\chi_G = \chi_{G_1} \times \chi_{G_2} - \chi_{G_1 \setminus s_1} \times \chi_{G_2 \setminus s_2}$$

**9** Déterminer le polynôme caractéristique de la double étoile à  $d_1 + d_2 + 2$  sommets, constituée respectivement de deux étoiles disjointes à  $d_1$  et  $d_2$  branches, à qui l'on a ajouté une arête supplémentaire reliant les deux centres des deux étoiles. Quel est le rang de la matrice d'adjacence de cette double étoile ?

Dans toute la suite de ce problème, on suppose que  $n$  est supérieur à 2 et on notera :

- ◆ N l'entier  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$
- ◆  $\Omega_n$  l'ensemble des graphes de sommets  $S = \llbracket 1; n \rrbracket$
- ◆  $p_n$  un réel dépendant de  $n$  appartenant à l'intervalle  $]0; 1[$  et  $q_n = 1 - p_n$ .

Pour tous  $i$  et  $j$  appartenant à  $S = \llbracket 1; n \rrbracket$  avec  $i \neq j$ , on note  $X_{\{i,j\}}$  l'application de  $\Omega_n$  dans  $\{0, 1\}$  telle que pour tout  $G \in \Omega_n$  avec  $G = (S, A)$  :

$$X_{\{i,j\}}(G) = \begin{cases} 1 & \text{si } \{i, j\} \in A \\ 0 & \text{si } \{i, j\} \notin A \end{cases}$$

Ainsi,  $(X_{\{i,j\}} = 1) = \{G \in \Omega_n \mid X_{\{i,j\}}(G) = 1\}$  est l'ensemble des graphes de  $\Omega_n$  dont  $\{i, j\}$  est une arête. Réciproquement, on remarquera aussi que pour  $G = (S, A)$ , on peut écrire

$$\{G\} = \bigcap_{\{i,j\} \in A} (X_{\{i,j\}} = 1) \bigcap_{\{i,j\} \notin A} (X_{\{i,j\}} = 0)$$

On admet l'existence d'une probabilité  $\mathbf{P}$  sur  $(\Omega_n, \mathcal{P}(\Omega_n))$  telle que les applications  $X_{\{i,j\}}$  soient des variables aléatoires de Bernoulli de paramètre  $p_n$  et indépendantes. On note  $\mathcal{E}_n = (\Omega_n, \mathcal{P}(\Omega_n), \mathbf{P})$  l'espace probabilisé ainsi construit.

Autrement dit, pour un graphe  $G$  donné appartenant à  $\Omega_n$ , la probabilité qu'une arête  $\{i, j\}$  soit contenue dans  $G$  est  $p_n$ , et les arêtes apparaissent dans  $G$  de façon indépendante.

**10** Soit  $G = (S, A) \in \Omega_n$ . Déterminer la probabilité  $\mathbf{P}(\{G\})$  de l'événement élémentaire  $\{G\}$  en fonction de  $p_n, q_n, N$  et  $a = \text{card}(A)$ . Retrouver alors le fait que  $\mathbf{P}(\Omega_n) = 1$ .

Dans la suite du problème on étudie la notion de fonction de seuil pour une propriété  $\mathcal{P}_n$  vérifiée sur une partie des graphes de  $\Omega_n$ .

Une fonction de seuil pour la propriété  $\mathcal{P}_n$  est une suite  $(t_k)_{k \geq 2}$  de réels strictement positifs tels que :

- ◆ si  $p_n = o(t_n)$  alors la limite, lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , de la probabilité pour que la propriété  $\mathcal{P}_n$  soit réalisée vaut 0
- ◆ si  $t_n = o(p_n)$  alors la limite, lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , de la probabilité pour que la propriété  $\mathcal{P}_n$  soit réalisée vaut 1.

## PARTIE II. UNE PREMIÈRE FONCTION DE SEUIL

### SECTION II.A. DEUX INÉGALITÉS

Soit  $X$  une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  et admettant une espérance  $\mathbf{E}(X)$  et une variance  $\mathbf{V}(X)$ .

**11** Montrer que  $\mathbf{P}(X > 0) \leq \mathbf{E}(X)$ .

**12** Montrer que si  $\mathbf{E}(X) \neq 0$ , alors  $\mathbf{P}(X = 0) \leq \frac{\mathbf{V}(X)}{(\mathbf{E}(X))^2}$ .

► **INDICATION.** on remarquer que  $(X = 0) \subset (|X - \mathbf{E}(X)| \geq \mathbf{E}(X))$ .

### SECTION II.B. UNE FONCTION DE SEUIL

**13** Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire  $A_n$  représentant le nombre d'arêtes d'un graphe de  $\Omega_n$  ?

**14** Montrer que si  $p_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$  au voisinage de  $+\infty$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(A_n > 0) = 0$ .

**15** Montrer que si  $\frac{1}{n^2} = o(p_n)$  au voisinage de  $+\infty$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(A_n > 0) = 1$ .

**16** En déduire une propriété  $\mathcal{P}_n$  et sa fonction de seuil associée.

## PARTIE III. FONCTION DE SEUIL DE LA COPIE D'UN GRAPHE

Si  $G = (S, A)$  est un graphe, on note  $s_G$  (resp.  $a_G$ ) le cardinal de  $S$  (resp.  $A$ ).

Soit  $G_0 = (S_0, A_0)$  un graphe particulier fixé. Par commodité d'écriture, on note  $s_0 = s_{G_0}$  le cardinal de  $S_0$ ,  $a_0 = a_{G_0}$  le cardinal de  $A_0$  et on suppose que  $s_0 \geq 2$  et que  $a_0 \geq 1$ .

On va étudier la fonction de seuil de la propriété  $\mathcal{P}_n$  : "contenir une copie de  $G_0$ ".

On note  $X_n^0$  la variable aléatoire réelle discrète définie sur l'espace probabilisé  $\mathcal{E}_n$  telle que pour  $G \in \Omega_n$ , l'entier  $X_n^0(G)$  est égal au nombre de copies de  $G_0$  contenues dans  $G$ .

On introduit :

- ◆ l'ensemble  $C_0$  des copies de  $G_0$  dont les sommets sont inclus dans  $\llbracket 1 ; n \rrbracket$  :

$$C_0 = \left\{ H \mid H \text{ est une copie de } G_0 \text{ et } H = (S_H, A_H) \text{ avec } S_H \subset \llbracket 1 ; n \rrbracket \right\}$$



- ◆ pour un graphe  $H = (S_H, A_H)$  avec  $S_H \subset \llbracket 1; n \rrbracket$ , la variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli  $X_H$  définie par :

$$\forall G \in \Omega_n \quad X_H(G) = \begin{cases} 1 & \text{si } H \subset G \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- ◆ le réel  $\omega_0$  défini par :

$$\omega_0 = \min_{\substack{H \subset G_0 \\ a_H \geq 1}} \frac{s_H}{a_H}$$

- 17** Montrer que

$$\mathbf{E}(X_H) = p_n^{a_H}.$$

- 18** Soit  $S'_0$  un ensemble fixé de cardinal  $s_0$ . On note  $c_0$  le nombre des graphes dont l'ensemble des sommets est  $S'_0$  et qui sont des copies de  $G_0$ .

Exprimer le cardinal de  $C_0$  à l'aide de  $c_0$  et en utilisant un majorant simple de  $c_0$ , justifier que le cardinal de  $C_0$  est inférieur à  $n^{s_0}$ .

- 19** Exprimer  $X_n^0$  à l'aide de variables aléatoires du type  $X_H$ , et montrer que :

$$\mathbf{E}(X_n^0) = \sum_{H \in C_0} \mathbf{P}(H \subset G) \leq n^{s_0} p_n^{a_0}.$$

- 20** En déduire que si  $p_n = o(n^{-\omega_0})$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(X_n^0 > 0) = 0$ .

► **INDICATION.** on pourra introduire  $H_0 \subset G_0$  réalisant le minimum donnant  $\omega_0$ .

On suppose dorénavant que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^{\omega_0} p_n) = +\infty$ .

- 21** Montrer que l'espérance  $\mathbf{E}\left((X_n^0)^2\right)$  vérifie :

$$\mathbf{E}\left((X_n^0)^2\right) = \sum_{(H, H') \in C_0^2} \mathbf{P}(H \cup H' \subset G) = \sum_{(H, H') \in C_0^2} p_n^{2a_0 - a_{H \cap H'}}.$$

► **ERRATA.** Cette formule est très ambiguë puisqu'elle ne précise pas la nature de  $G$  ni la nature des « graphes »  $H \cup H'$  et  $H \cap H'$ . Le développement dans le corrigé les introduira de façon naturelle.

Pour  $k \in [0, s_0]$ , on note :

$$\Sigma_k = \sum_{\substack{(H, H') \in C_0^2 \\ s_{H \cap H'} = k}} \mathbf{P}(H \cup H' \subset G).$$

22 Montrer que  $\Sigma_0 \leq (\mathbf{E}(X_n^0))^2$ .

23 Soit  $k \in \llbracket 1; s_0 \rrbracket$ ; montrer que :

$$\Sigma_k \leq \sum_{H \in \mathcal{C}_0} \binom{s_0}{k} \binom{n-s_0}{s_0-k} c_0 p_n^{2a_0} p_n^{-\frac{k}{\omega_0}}.$$

24 Justifier que pour tous entiers naturels  $q$  et  $r$  vérifiant  $1 \leq q \leq r$ , on a :

$$\binom{r}{q} r^{-q} \geq \frac{1}{q!} \left(1 - \frac{q-1}{q}\right)^q$$

et en déduire que pour  $k \in [1, s_0]$ , on a  $\Sigma_k = o(\mathbf{E}(X_n^0)^2)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

25 Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbf{V}(X_n^0)}{(\mathbf{E}(X_n^0))^2} = 0$ .

26 Montrer alors que la suite  $(k^{-\omega_0})_{k \geq 2}$  est une fonction de seuil pour la propriété  $\mathcal{P}_n$ .

27 Retrouver le résultat de la question 16 et déterminer une fonction de seuil pour la propriété « contenir une copie de l'étoile à  $d$  branches » avec  $d$  entier fixé supérieur à 1.

## ■ CORRIGÉ ■

# Phénomènes de seuil dans les graphes

### PARTIE I. QUELQUES PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES DES MATRICES D'ADJACENCE

**1** Considérons la matrice  $P = (\delta_{\rho^{-1}(i),j})_{i,j}$ , où  $\delta_{i,j}$  est le symbole de Kronecker d'indice  $(i, j)$ , et posons  $M' = (m_{\rho(i),\rho(j)})_{i,j}$ . Pour tous  $i, j \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$  on a

$$(MP)_{i,j} = \sum_{k=1}^n m_{i,k} \delta_{\rho^{-1}(k),j} = m_{i,\rho(j)}$$

$$(PM')_{i,j} = \sum_{k=1}^n \delta_{\rho^{-1}(i),k} m_{\rho(k),\rho(j)} = m_{i,\rho(j)}$$

On a donc  $MP = PM'$ . Il reste à justifier que la matrice  $P$  est inversible pour pouvoir écrire  $M = PM'P^{-1}$  et ainsi prouver que  $M'$  est semblable à  $M$ . Or si on examine le  $j^{\text{ème}}$  vecteur colonne de  $P$  on voit que Toutes ses coordonnées sont nulles sauf celle pour l'indice  $i = \rho(j)$  qui vaut 1. C'est le vecteur  $E_{\rho(j)}$  de la base canonique  $\mathcal{B} = (E_1, E_2, \dots, E_n)$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . Les vecteurs colonnes de  $P$  s'obtiennent en appliquant la permutation  $\rho$  à la matrice  $I_n$ , ils forment donc une base de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . La matrice  $P$  est donc bien inversible.

$$P = PM'P^{-1} \text{ avec } P = (\delta_{\rho^{-1}(i),j})_{i,j}$$

**2** Une matrice d'adjacence est symétrique réelle. Elle est donc diagonalisable.

**3** Soit  $M$  la matrice d'adjacence d'un graphe non vide. Il existe alors des entiers  $i < j$  tels que  $m_{i,j} = 1$ , et par symétrie,  $m_{j,i} = 1$ . Le déterminant d'ordre 2 extrait de  $M$  :

$$\begin{vmatrix} m_{i,i} & m_{i,j} \\ m_{j,i} & m_{j,j} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

est non nul donc

$$\text{rg } M \geq 2$$

**4** Soit  $M$  la matrice d'adjacence d'un graphe dont les sommets non isolés forment une étoiles. Il existe donc des indices distincts  $k, k_1, \dots, k_d$  dans  $\llbracket 1 ; n \rrbracket$  tels que la  $k^{\text{ème}}$  colonne contienne des 1 sur les positions  $k_1, k_2, \dots, k_d$  et des zéros ailleurs. Par symétrie la  $k^{\text{ème}}$  ligne de  $M$  obéit à la même description. Le reste des coefficients

de  $M$  sont tous nuls. Si on note  $C_1, C_2, \dots, C_n$  les vecteur colonnes de  $M$ , cela signifie que pour tout  $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$

$$C_j = \begin{cases} E_k & \text{si } j \in \{k_1, k_2, \dots, k_d\} \\ E_{k_1} + E_{k_2} + \dots + E_{k_d} & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Puisque  $E_k \notin \text{vect}\{E_{k_1}, E_{k_2}, \dots, E_{k_d}\}$  alors la famille  $(E_k, E_{k_1} + E_{k_2} + \dots + E_{k_d})$  est libre. C'est une famille libre maximale extraite des colonnes de  $M$  donc

$$\text{rg } M = 2$$

**5**  $G' = (A', S')$  est une copie de  $G = (A, S)$  donc par définition il exist une bijection  $\sigma$  de  $S'$  dans  $S$  telle que

$$\forall (s', t') \in S'^2 \quad \{s', t'\} \in A' \iff \{\sigma(s'), \sigma(t')\} \in A \quad (1)$$

Si maintenant  $\rho$  est une indexation de  $S$ , ie une bijection de  $\llbracket 1; n \rrbracket$ , alors  $\sigma^{-1} \circ \rho$  est une indexation de  $S'$  et on a selon (1)

$$\{\sigma^{-1} \circ \rho(i), \sigma^{-1} \circ \rho(j)\} \in A' \iff \{\rho(i), \rho(j)\} \in A$$

Ce qui signifie que  $M_{G, \rho} = M_{G', \sigma^{-1} \circ \rho}$ . Alors

$$\chi_{G'} = \chi_G$$

**6** Soit  $\sigma$  une indexation de  $G$ . On a posé  $\chi_G = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$  donc  $a_{n-1} = -\text{tr } M_{G, \sigma} = 0$  puisque  $M_{G, \sigma}$  est à diagonale nulle.

Posons ensuite  $M_{G, \sigma} = (m_{i,j})_{i,j}$ . Alors

$$\chi_G(X) = \sum_{\rho \in \mathcal{S}_n} (-1)^{\varepsilon(\rho)} P_\rho \quad \text{avec } P_\rho = \prod_{k=1}^n (\delta_{\rho(k), k} X - m_{\rho(k), k})$$

Pour tout  $\rho \in \mathcal{S}_n$  on a

$$\text{deg } P_\rho = \text{card}\{k \in \llbracket 1; n \rrbracket \mid \rho(k) = k\}$$

on voit que seul pour  $\rho = \text{id}$  ou lorsque  $\rho$  est une transposition,  $P_\rho$  est de degré  $\geq 2$  et donc peut contenir potentiellement un terme en  $X^{n-2}$ .

Toutefois  $P_{\text{id}} = \prod_{k=1}^n (X - m_{k,k}) = X^n$  et pour toute transposition  $\tau = (i \ j)$  de  $\mathcal{S}_n$  on a

$$P_\tau = m_{i,j} m_{j,i} \prod_{k \notin \{i,j\}} (X - m_{k,k}) = m_{i,j}^2 X^{n-2} = m_{i,j} X^{n-2}$$

Par identification de coefficients on a donc

$$a_{n-2} = - \sum_{\substack{\{i,j\} \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \\ i \neq j}} m_{i,j}$$

Dans cette somme il ne reste que les coefficients  $m_{i,j}$  qui correspondent à une arête dans  $A$ . Ainsi

$$a_{n-2} = -|A|$$

**7** Soit  $M$  une matrice d'adjacence d'un graphe  $G$  à  $n$  sommets dont les sommets non isolés forment une étoile à  $d$  branches,  $1 \leq d \leq n - 1$ .

D'après la question 4,  $\text{rg } M = 2$ . Donc  $\dim \text{Ker } M = n - 2$ . Alors 0 est une valeur propre (VAP) de  $M$  de multiplicité au moins  $n - 2$ . Signifiant que  $X^{n-2}$  divise  $\chi_G$ . Par ailleurs la question (6) a montré que les coefficients en  $X^{n-1}$  et en  $X^{n-2}$  de  $\chi_G$  sont respectivement 0 et  $-|A|$ . Comme les seuls sommets non isolés de  $G$  forment une étoile à  $d$  branche alors  $|A| = d$  et ainsi

$$\chi_G = X^{n-2}(X^2 - d)$$

Supposons que le graphe  $G$  soit étoilé en un sommet indexé par  $k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$  et soient  $k_1 < k_2 < \dots < k_r$  les autres indices des sommets qui forment une étoile avec celui-ci. Notons  $C_1, C_2, \dots, C_n$  les vecteurs colonnes de la matrice  $M$  de  $G$  qui correspond à cette indexation et reprenons les relations

$$ME_j = C_j = \begin{cases} E_k & \text{si } j \in \{k_1, k_2, \dots, k_d\} \\ E_{k_1} + E_{k_2} + \dots + E_{k_d} & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2)$$

Puisque  $M$  est symétrique réelle, elle est diagonalisable et donc  $\dim \text{Ker } M = n - 2$ . Tout vecteur  $E_j$  avec  $j \notin \{k, k_1, \dots, k_d\}$  est dans  $\text{Ker } M$ . Par ailleurs pour tout  $i \in \llbracket 2 ; d \rrbracket$  on a  $M(E_{k_i} - E_{k_1}) = 0$  et donc  $E_{k_i} - E_{k_1} \in \text{Ker } M$ . La famille des vecteurs  $E_j$  avec  $j \notin \{k, k_1, \dots, k_d\}$  et  $E_{k_i} - E_{k_1}$  avec  $i \in \llbracket 2 ; d \rrbracket$  est libre et contient  $n - 2 = (n - d - 1) + (d - 1)$  vecteurs. Cette famille forme donc une base de  $E_0(M) = \text{Ker } M$ .

Constatons ensuite que si on pose  $V = E_{k_1} + \dots + E_{k_d}$  alors  $(E_k, V)$  est une base de  $\text{Im } M$  et on a selon les relations (2)

$$ME_k = V \quad MV = dE_k$$

$\text{Im } M$  étant stable par  $M$ , les relations précédentes signifient que la matrice de l'endomorphisme induit par  $M$  sur  $\text{Im } M$  dans sa base  $(E_k, V)$  est

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & d \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\chi_{M_1} = X^2 - d$ , les VAP de  $M_1$  sont  $\sqrt{d}$  et  $-\sqrt{d}$  et on a

$$E_{\sqrt{d}}(M_1) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} \sqrt{d} \\ 1 \end{pmatrix} \quad E_{-\sqrt{d}}(M_1) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} \sqrt{d} \\ -1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que  $V_1 = \sqrt{d} E_k + V \in E_{\sqrt{d}}(M)$  et  $V_2 = \sqrt{d} E_k - V \in E_{-\sqrt{d}}(M)$ . Puisque  $\sqrt{d}$  et  $-\sqrt{d}$  sont des vAP simples de  $M$  alors leurs sous-espace propre (SEP) sont de dimension 1 et donc

$$\begin{aligned} E_{\sqrt{d}}(M) &= \text{vect}\{V_1\} & E_{-\sqrt{d}}(M) &= \text{vect}\{V_2\} \\ V_1 &= \sqrt{d} E_k + \sum_{i=1}^d E_{k_i} & V_2 &= \sqrt{d} E_k - \sum_{i=1}^d E_{k_i} \end{aligned}$$

**8** Notons  $n_1$  et  $n_2$  les cardinaux respectifs de  $S_1$  et de  $S_2$  et Soient  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  des indexations respectives de  $S_1$  et de  $S_2$  telles que  $\sigma_1(1) = s_1$  et  $\sigma_2(1) = s_2$ . Considérons l'indexation  $\sigma$  de  $S = S_1 \cup S_2$  définie par

$$\sigma(k) = \begin{cases} \sigma_1(k) & \text{si } k \in \llbracket 1 ; n_1 \rrbracket \\ \sigma(k - n_1) & \text{si } k \in \llbracket n_1 + 1 ; n_1 + n_2 \rrbracket \end{cases}$$

Par définition du graphe  $G$  on a

$$M_{G,\sigma} = \begin{pmatrix} M_{G_1,\sigma_1} & E_{1,1} \\ {}^t E_{1,1} & M_{G_2,\sigma_2} \end{pmatrix}$$

où  $E_{1,1}$  est la première matrice de la base canonique de  $\mathcal{M}_{n_1,n_2}(\mathbb{R})$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Notons pour simplifier les écritures

$$M_1(\lambda) = \lambda I_{n_1} - M_{G_1,\sigma_1} = \left( m_{i,j}^{(1)}(\lambda) \right)_{i,j}$$

$$M_2(\lambda) = \lambda I_{n_2} - M_{G_2,\sigma_2} = \left( m_{i,j}^{(2)}(\lambda) \right)_{i,j}$$

Alors  $M_{G,\sigma} - \lambda I_{n_1+n_2} = \begin{pmatrix} M_1(\lambda) & K \\ {}^t K & M_2(\lambda) \end{pmatrix}$  avec  $K = -E_{1,1} \in \mathcal{M}_{n_1,n_2}(\mathbb{R})$

Soit un scalaire  $\lambda$  qui ne soit pas une vAP de  $M_{G_1,\sigma_1}$ , de telle sorte que la matrice  $M_1(\lambda)$  soit inversible. Nous pouvons alors écrire

$$\left| \begin{array}{cc|cc} I_{n_1} & 0 & M_1(\lambda) & K \\ -{}^t K M_1(\lambda)^{-1} & I_{n_2} & {}^t K & M_2(\lambda) \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc|cc} M_1(\lambda) & K & 0 & M_2(\lambda) - {}^t K M_1(\lambda)^{-1} K \end{array} \right|$$

Le déterminant à gauche vaut 1 donc nous avons

$$\chi_G(\lambda) = \det(M_1(\lambda)) \det(M_2(\lambda) - {}^t K M_1(\lambda)^{-1} K) \quad (3)$$

Maintenant

$${}^t K M_1(\lambda)^{-1} K = {}^t E_{1,1} M_1(\lambda)^{-1} E_{1,1} = \begin{pmatrix} v & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{R})$$

où  $\nu$  est le coefficient d'indice  $(1, 1)$  de la matrice  $M_1(\lambda)^{-1}$ . Par linéarité du déterminant matriciel par rapport à chaque colonne nous avons donc

$$\begin{aligned} \det\left(M_2(\lambda) - {}^tKM_1(\lambda)^{-1}K\right) &= \begin{vmatrix} m_{1,1}^{(2)}(\lambda) - \nu & m_{1,2}^{(2)}(\lambda) & \cdots & m_{1,n_2}^{(2)}(\lambda) \\ m_{2,1}^{(2)}(\lambda) & \cdots & \cdots & m_{2,n_2}^{(2)}(\lambda) \\ \vdots & & & \vdots \\ m_{n_2,1}^{(2)}(\lambda) & \cdots & \cdots & m_{n_2,n_2}^{(2)}(\lambda) \end{vmatrix} \\ &= \chi_{G_2}(\lambda) - \nu \begin{vmatrix} 1 & m_{1,2}^{(2)}(\lambda) & \cdots & m_{1,n_2}^{(2)}(\lambda) \\ 0 & m_{2,2}^{(2)}(\lambda) & \cdots & m_{2,n_2}^{(2)}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & m_{n_2,2}^{(2)}(\lambda) & \cdots & m_{n_2,n_2}^{(2)}(\lambda) \end{vmatrix} \\ &= \chi_{G_2}(\lambda) - \nu \chi_{G_2 \setminus s_2}(\lambda) \end{aligned}$$

L'expression de  $\nu$  peut être prélevée dans la formule  $A^{-1} = (1/\det A) {}^t\text{Com } A$  valable pour toute matrice carrée inversible  $A$  :

$$\nu = \frac{\Delta_{1,1}(M_1(\lambda))}{\det M_1(\lambda)} = \frac{\Delta_{1,1}(M_1(\lambda))}{\chi_{G_1}(\lambda)}$$

$\Delta_{1,1}(M_1(\lambda))$  est le déterminant de la matrice obtenue à partir de  $M_1(\lambda)$  en éliminant la première ligne et la première colonne :

$$\Delta_{1,1}(M_1(\lambda)) = \chi_{G_1 \setminus s_1}(\lambda)$$

soit au final

$$\nu = \frac{\chi_{G_1 \setminus s_1}(\lambda)}{\chi_{G_1}(\lambda)}$$

En revenant maintenant à la relation (3) nous voyons que

$$\chi_G(\lambda) = \chi_{G_1}(\lambda) \times \chi_{G_2}(\lambda) - \chi_{G_1 \setminus s_1}(\lambda) \times \chi_{G_2 \setminus s_2}(\lambda)$$

Égalité qui est valable pour tout  $\lambda$  de l'ensemble infini  $\mathbb{R} \setminus \text{Sp}(M_{G_1, \sigma_1})$ . Elle implique donc l'égalité des polynômes en jeu.

9

Soient  $G_1$  et  $G_2$  deux étoiles disjointes de sommets respectifs  $s_1$  et  $s_2$  et soit  $G$  la réunion des deux graphes en ajoutant l'arête  $\{s_1, s_2\}$ . Selon la question précédente

$$\chi_G = \chi_{G_1} \times \chi_{G_2} - \chi_{G_1 \setminus s_1} \times \chi_{G_2 \setminus s_2}$$

Ici les graphes  $G_1 \setminus s_1$  et  $G_2 \setminus s_2$  ont tous leurs sommets isolés (et donc leurs matrices d'adjacences sont nulles) donc  $\chi_{G_1 \setminus s_1} = X^{d_1-1}$  et  $\chi_{G_2 \setminus s_2} = X^{d_2-1}$ . Avec  $\chi_{G_1} = X^{d_1-2}(X^2 - d_1)$  et  $\chi_{G_2} = X^{d_2-2}(X^2 - d_2)$  on obtient

$$\chi_G = X^{d_1+d_2-4}(X^2 - d_1)(X^2 - d_2) - X^{d_1+d_2-2}$$

soit

$$\chi_G = X^{d_1+d_2-4} \left( X^4 - (d_1 + d_2 + 1)X^2 + d_1d_2 \right)$$

**10** Les événements  $(X_{\{i,j\}} = 1)$  et  $(X_{\{i',j'\}} = 0)$  avec  $i, j, i', j' \in S$  sont tous mutuellement indépendants donc selon l'expression

$$\{G\} = \left( \bigcap_{\{i,j\} \in A} (X_{\{i,j\}} = 1) \right) \cap \left( \bigcap_{\{i,j\} \notin A} (X_{\{i,j\}} = 0) \right) \quad (4)$$

► **N.B.** Attention! Ne pas confondre  $\{G\}$  et  $G$ .

ona 
$$\mathbf{P}(\{G\}) = \prod_{\{i,j\} \in A} \mathbf{P}(X_{\{i,j\}} = 1) \times \prod_{\{i,j\} \notin A} \mathbf{P}(X_{\{i,j\}} = 0)$$

soit

$$\mathbf{P}(\{G\}) = p_n^a q_n^{N-a}$$

le cardinal de  $\bar{A}$  étant effectivement  $N - a$  puisque  $N = \binom{n}{2}$  est le nombre de toutes les paires  $\{i, j\}$  lorsque  $i, j \in S$  et  $i \neq j$ .

Ensuite; notons  $\mathcal{A}$  l'ensemble de toutes les parties à deux éléments de  $S$ . L'ensemble  $\mathcal{A}$  est de cardinal  $N$ . Pour tout  $a \in \llbracket 0; N \rrbracket$ , posons

$$\Omega_{n,a} = \left\{ G = (S, A) \in \Omega_n \mid \text{card } A = a \right\}$$

La famille  $(\Omega_{n,a})_{a \in \llbracket 0; n \rrbracket}$  est une partition de  $\Omega_n$  donc

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\Omega_n) &= \sum_{a=0}^N \sum_{G \in \Omega_{n,a}} \mathbf{P}(\{G\}) \\ &= \sum_{a=0}^N p_n^a q_n^{N-a} \text{card } \Omega_{n,a} \end{aligned}$$

L'application  $A \mapsto G = (S, A)$  est une bijection de l'ensemble  $\mathcal{P}_a(\mathcal{A})$  de toutes les parties de cardinal  $a$  de  $\mathcal{A}$  dans  $\Omega_{n,a}$  donc

$$\text{card } \Omega_{n,a} = \text{card } \mathcal{P}_a(\mathcal{A}) = \binom{N}{a}$$

Ainsi

$$\mathbf{P}(\Omega) = \sum_{a=0}^N \binom{N}{a} p_n^a (1 - p_n)^{N-a} = 1$$



## PARTIE II. UNE PREMIÈRE FONCTION DE SEUIL

### SECTION II.A. DEUX INÉGALITÉS

11 on a

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n \mathbf{P}(X = n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n \mathbf{P}(X = n) \\ &\geq \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n) \\ &= \mathbf{P}(X > 0) \end{aligned}$$

d'où

$$\mathbf{P}(X > 0) \leq \mathbf{E}(X)$$

12 L'inclusion  $(X = 0) \subset (|X - \mathbf{E}(X)| \geq \mathbf{E}(X))$  fournie en indication est évidente puisque pour tout  $\omega \in \Omega$

$$X(\omega) = 0 \implies |X(\omega) - \mathbf{E}(X)| \geq |\mathbf{E}(X)| = \mathbf{E}(X)$$

On en déduit que  $\mathbf{P}(X = 0) \leq \mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geq \mathbf{E}(X))$  et ensuite selon l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\mathbf{P}(X = 0) \leq \frac{\mathbf{V}(X)}{\mathbf{E}(X)^2}$$

### SECTION II.B. UNE FONCTION DE SEUIL

13 La variable  $A_n$  peut être écrite sous la forme

$$A_n = \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{A}} X_{\{i,j\}}$$

où  $\mathcal{A}$  désigne l'ensemble de toutes les paires de  $\llbracket 1; n \rrbracket$ . Les variables  $X_{\{i,j\}}$  sont mutuellement indépendantes et suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre  $p_n$  et on a  $\text{card } \mathcal{A} = N$  donc

La variable  $A_n$  suit la loi binomiale de paramètres  $(N, p_n)$  :

$$A_n \sim \mathcal{B}(N, p_n)$$

14

On a

$$\begin{aligned} P(A_n > 0) &= 1 - P(A_n = 0) = 1 - (1 - p_n)^N \\ &= 1 - \exp\left(\frac{n(n-1)}{2} \ln(1 - p_n)\right) \end{aligned}$$

$$\frac{n(n-1)}{2} \ln(1 - p_n) \sim -\frac{1}{2}n^2 p_n \quad \text{et } n^2 p_n \longrightarrow 0$$

donc

$$\text{si } p_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ alors } P(A_n > 0) \longrightarrow 0$$

15

D'après la question 12. on a

$$P(A_n) \leq \frac{V(A_n)}{E(A_n)^2}$$

La variable  $A_n$  suit la loi  $\mathcal{B}(N, p_n)$  donc

$$E(A_n) = Np_n \quad V(A_n) = Np_n(1 - p_n)$$

Alors

$$\frac{V(A_n)}{E(A_n)^2} = \frac{1 - p_n}{Np_n} \leq \frac{1}{Np_n}$$

Puisque  $1/n^2 = o(p_n)$  alors  $n^2 p_n \longrightarrow +\infty$  et donc  $1/(Np_n) \longrightarrow 0$ . On en déduit que  $P(A_n) \longrightarrow 0$  et ainsi

$$\text{si } \frac{1}{n^2} = o(p_n) \text{ alors } P(A_n > 0) \longrightarrow 1$$

16

$P_n$  est la propriété « le graphe aléatoire  $G$  choisi selon le modèle du sujet possède au moins une arête », sa fonction de seuil est la suite  $(1/n^2)_{n \geq 2}$

### PARTIE III. FONCTION DE SEUIL DE LA COPIE D'UN GRAPHE

17

Sachant que  $S_H \subset \llbracket 1; n \rrbracket$  on a pour tout  $G \in \Omega_n$

$$H \subset G \iff A_H \subset A_G$$

donc

$$(X_H = 1) = \left\{ G \in \Omega_n \mid A_H \subset A_G \right\}$$

On peut donc créer une partition de  $(X_H = 1)$  sous la forme

$$(X_H = 1) = \bigcup_{b=0}^{N-a_H} \left\{ G \in \Omega_n \mid A_H \subset A_G \text{ et } a_G = a_H + b \right\}$$

Or pour tout  $b \in \llbracket 1; N - a_H \rrbracket$ , il y a  $\binom{N-a_H}{b}$  façon de compléter  $A_H$  en une partie de  $\mathcal{A}$  de cardinal  $a_H + b$  et pour chaque partie  $A$  de  $\mathcal{A}$  qui vérifie cette condition on a selon la question 10

$$P(\{(S, A)\}) = p_n^{a_H+b} q_n^{N-a_H-b}$$

donc 
$$\mathbf{P}\left(\left\{G \in \Omega_n \mid A_H \subset A_G \text{ et } a_G = a_H + b\right\}\right) = \binom{N - a_H}{b} p_n^{a_H+b} q_n^{N-a_H-b}$$

par suite 
$$\mathbf{P}(X_H = 1) = p_n^{a_H} \sum_{b=0}^{N-a_H} \binom{N - a_H}{b} p_n^b (1 - p_n)^{N-a_H-b} = p_n^{a_H}$$

La variable  $X_H$  suit une loi de Bernoulli donc

$$\mathbf{E}(X_H) = \mathbf{P}(X_H = 1) = p_n^{a_H}$$

**18** Récapitulons les notations :

- Au départ il y a le graphe  $G_0 = (S_0, A_0)$  avec  $s_0 = \text{card } S_0 \geq 2$  et  $a_0 = \text{card } A_0 \geq 1$ ;
- $C_0$  est l'ensemble des graphes dont les sommets sont contenus dans  $\llbracket 1 ; n \rrbracket$  et qui sont des copies de  $G_0$  (on notera que forcément  $s_0 \leq n$ );
- $S'_0$  est un (autre) ensemble de sommets de même cardinal  $s_0$  que  $S_0$  et  $c_0$  est le nombre de graphes de sommets  $S'_0$  et qui sont des copies de  $G_0$ .

Notons  $C'_0$  l'ensemble des graphes de sommets  $S'_0$  qui sont des copies de  $G_0$ . Soit  $S$  une partie quelconque de  $\llbracket 1 ; n \rrbracket$  de cardinal  $s_0$  et fixons une bijection  $\sigma : S \rightarrow S'_0$ . Définissons ensuite pour tout graphe  $(S, A)$  de sommets  $S$  le graphe  $(S'_0, A_\sigma)$  de sommets  $S'_0$  par

$$A_\sigma = \left\{ \{\sigma(i), \sigma(j)\} \mid \{i, j\} \in A \right\}$$

L'application  $(S, A) \mapsto (S'_0, A_\sigma)$  ainsi construite est une bijection. Le graphe  $(S, A)$  est une copie de  $G_0$  si et seulement si  $(S'_0, A_\sigma)$  en est une. Il y a donc une bijection entre  $C'_0$  et l'ensemble des graphes de sommets  $S$  qui sont des copies de  $G_0$ . Maintenant, si on note  $C(S)$  l'ensemble des graphes de sommets  $S$  qui sont des copies de  $G_0$  alors on vient de justifier que  $|C(S)| = c_0$ . Grâce à la partition :

$$C_0 = \bigcup_{S \in \mathcal{P}_{s_0}(\llbracket 1 ; n \rrbracket)} C(S)$$

on conclut que

$$|C_0| = \binom{n}{s_0} c_0$$

Fixons maintenant un graphe  $(S'_0, B_0)$  dans  $C'_0$  et posons pour toute permutation  $\rho$  de  $S'_0$

$$B_\rho = \left\{ \{\rho(i), \rho(j)\} \mid \{i, j\} \in B_0 \right\}$$

Par définition même des copies d'un graphe, pour tout élément  $(S'_0, B)$  de  $C'_0$  il existe  $\rho$  telle que  $B = B_\rho$ , indiquant que l'application  $\rho \mapsto (S'_0, B_\rho)$  est une surjection de l'ensemble des permutations de  $S'_0$  dans  $C'_0$ . On en déduit que

$$c_0 \leq s_0!$$

Par suite

$$|C_0| = \frac{n(n-1) \cdots (n-s_0+1)}{s_0!} c_0 \leq n^{s_0}$$

**19** Rappelons, pour tout graphe  $G \in \Omega_n$ , les notations

- $X_H(G)$  vaut 1 si  $H \subset G$ , 0 sinon ;
- $X_n^0(G)$  est le nombre de copies de  $G_0$  contenues dans  $G$  ;
- $C_0$  est l'ensemble de toutes les copies de  $G_0$  dont les sommets sont dans  $\llbracket 1 ; n \rrbracket$ .

Visiblement

$$X_n^0 = \sum_{H \in C_0} X_H$$

On en déduit par linéarité de l'espérance que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X_n^0) &= \sum_{H \in C_0} \mathbf{E}(X_H) \\ &= \sum_{H \in C_0} p_n^{a_H} \\ &= \sum_{H \in C_0} p_n^{a_0} \\ &= p_n^{a_0} |C_0| \end{aligned}$$

et donc

$$\mathbf{E}(X_n^0) \leq n^{s_0} p_n^{a_0}$$

**20** Soit  $H_0$  un sous graphe de  $G_0$  tel que

$$\omega_0 = \frac{s_{H_0}}{a_{H_0}}$$

On définit la variable  $Y_0^n$  liée à  $H_0$  de la même façon que  $X_0^n$  est liée à  $G_0$ .

Puisque  $H_0 \subset G_0$ , tout graphe  $G$  de  $\Omega_n$  contient au moins autant de copies de  $H_0$  que de copies de  $G_0$ . C'est à dire que  $X_0^n \leq Y_0^n$  et par croissance de l'espérance on a donc

$$\mathbf{E}(X_n^0) \leq \mathbf{E}(Y_n^0)$$

D'après la question précédente on a donc

$$0 \leq \mathbf{E}(X_n^0) \leq n^{s_{H_0}} p_n^{a_{H_0}} \tag{5}$$

Or par hypothèse  $p_n = o(n^{-\omega_0})$  donc

$$n^{s_{H_0}} p_n^{a_{H_0}} = o\left(n^{s_{H_0} - \omega_0 a_{H_0}}\right) = o(1)$$

D'après la majoration (5) on a donc  $\mathbf{E}(X_n^0) \rightarrow 0$ . D'autre part, comme dans la question

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_n^0 > 0) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X_n^0 = k) \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} k \mathbf{P}(X_n^0 = k) \\ &\leq \mathbf{E}(X_n^0) \end{aligned}$$

at ainsi

$$\lim \mathbf{P}(X_n^0 > 0) = 0$$

21

Rappelons l'expression

$$X_n^0 = \sum_{H \in \mathcal{C}_0} X_H$$

donc

$$\left(X_n^0\right)^2 = \sum_{H, H' \in \mathcal{C}_0} X_H X_{H'}$$

et par linéarité de l'espérance

$$\mathbf{E}\left(\left(X_n^0\right)^2\right) = \sum_{H, H' \in \mathcal{C}_0} \mathbf{E}(X_H X_{H'})$$

Notons pour deux graphes  $H = (S, A)$ ,  $H' = (S', A')$ ,

$$H \cup H' = (S \cup S', A_H \cup A_{H'})$$

$$H \cap H' = (S \cap S', A_H \cap A_{H'})$$

On remarquera dès lors que si  $G$  est un graphe de  $\Omega_n$  alors

$$H \cup H' \subset G \iff S_H \cup S_{H'} \subset S_G \text{ et } A_H \cup A_{H'} \subset A_G$$

$$\iff S_H \subset S_G \text{ et } A_H \subset A_G \text{ et } S_{H'} \subset S_G \text{ et } A_{H'} \subset A_G$$

$$\iff H \subset G \text{ et } H' \subset G$$

et que

$$\begin{aligned} a_{H \cup H'} &= |A_H \cup A_{H'}| \\ &= |A_H| + |A_{H'}| - |A_H \cap A_{H'}| \\ &= a_H + a_{H'} - a_{H \cap H'} \end{aligned}$$

Soient maintenant  $H, H' \in \mathcal{C}_0$ . Alors la variable  $X_H X_{H'}$  ne peut prendre que les valeurs 0 et 1, c'est à dire qu'elle suit une loi de Bernoulli. De plus

$$\begin{aligned} (X_H X_{H'} = 1) &= (X_H = 1) \cap (X_{H'} = 1) \\ &= \{G \in \Omega_n \mid H \subset G\} \cap \{G \in \Omega_n \mid H' \subset G\} \\ &= \boxed{\{G \in \Omega_n \mid H \cup H' \subset G\}} \\ &= (X_{H \cup H'} = 1) \end{aligned}$$

et donc

$$\mathbf{P}(X_H X_{H'} = 1) = \mathbf{P}(X_{H \cup H'} = 1) = p_n^{2a_0 - a_{H \cap H'}}$$

- **N.B.**  $X_H X_{H'}$  et  $X_{H \cup H'}$  étant des variables de Bernoulli, l'égalité  $(X_H X_{H'} = 1) = (X_{H \cup H'} = 1)$  signifie en fait que

$$X_H X_{H'} = X_{H \cup H'} \quad (6)$$

et la relation

$$(X_n^0)^2 = \sum_{H, H' \in C_0} X_{H \cup H'}$$

confirme le fait que  $(X_n^0)^2(G)$  est le nombre de double-copies de  $G_0$  contenues dans le graphe  $G$  (y compris les double-copies de la forme  $H \cup H$ ).

- **N.B.** Finalement le curieux événement  $(H \cup H' \subset G)$  pouvait être écrit de façon plus compréhensible sous la forme

$$\{G \in \Omega_n \mid H \cup H' \subset G\}$$

ou encore mieux

$$(X_H X_{H'} = 1)$$

$X_H X_{H'}$  est donc la variable de Bernoulli  $X_{H \cup H'}$  de paramètre

$$\mathbf{P}(X_{H \cup H'} = 1) = \mathbf{E}(X_{H \cup H'}) = p_n^{a_{H \cup H'}} = p_n^{2a_0 - a_{H \cap H'}}$$

finalement

$$\mathbf{E}\left((X_n^0)^2\right) = \sum_{H, H' \in C_0} p_n^{2a_0 - a_{H \cap H'}}$$

22

On a par définition (après adaptation des notations)

$$\Sigma_0 = \sum_{\substack{(H, H') \in C_0^2 \\ S_H \cap S_{H'} = \emptyset}} \mathbf{P}\left(\{G \in \Omega_n \mid H \cup H' \subset G\}\right) = \sum_{\substack{(H, H') \in C_0^2 \\ S_H \cap S_{H'} = \emptyset}} \mathbf{E}(X_{H \cup H'}) \quad (7)$$

donc

$$\Sigma_0 = \sum_{\substack{(H, H') \in C_0^2 \\ S_H \cap S_{H'} = \emptyset}} p_n^{2a_0 - a_{H \cap H'}}$$

Or si  $S_H \cap S_{H'} = \emptyset$  alors  $A_H \cap A_{H'} = \emptyset$  et donc  $a_{H \cap H'} = 0$ . Ainsi

$$\Sigma_0 = \left| \left\{ (H, H') \in (C_0)^2 \mid S_H \cap S_{H'} = \emptyset \right\} \right| p_n^{2a_0} \leq |(C_0)^2| p_n^{2a_0} = \mathbf{E}(X_n^0)^2$$

$$\Sigma_0 \leq \mathbf{E}(X_n^0)^2$$

- **AUTRE MÉTHODE.** On peut procéder autrement en remarquant que pour tout  $G \in \Omega_n$

$$X_H(G) = 1 \iff \forall \{i, j\} \in A_H \quad X_{\{i, j\}}(G) = 1$$

ce qui signifie que

$$X_H = \prod_{\{i,j\} \in A_H} X_{\{i,j\}}$$

Si maintenant  $S_H \cap S_{H'} = \emptyset$  alors  $A_H \cap A_{H'} = \emptyset$ . Les variables  $X_{\{i,j\}}$  sont mutuellement indépendantes donc par lemme des coalitions les variables  $X_H$  et  $X_{H'}$  sont indépendantes. En particulier  $E(X_H X_{H'}) = E(X_H)E(X_{H'})$ . En reprenant à l'étape (7)

$$\begin{aligned} \Sigma_0 &= \sum_{\substack{(H,H') \in \mathcal{C}_0^2 \\ S_H \cap S_{H'} = \emptyset}} \mathbf{E}(X_H) \mathbf{E}(X_{H'}) \\ &\leq \sum_{(H,H') \in \mathcal{C}_0^2} \mathbf{E}(X_H) \mathbf{E}(X_{H'}) \\ &= \left( \sum_{H \in \mathcal{C}_0} E(X_H) \right)^2 \\ &= (\mathbf{E}(X_n^0))^2 \end{aligned}$$

23

D'après les questions précédentes on a

$$\Sigma_k = \sum_{\substack{H,H' \in \mathcal{C}_0 \\ s_{H \cap H'} = k}} p_n^{2a_0 - a_{H \cap H'}}$$

qu'on peut réécrire sous la forme

$$\Sigma_k = \sum_{H \in \mathcal{C}_0} \sum_{\substack{H' \in \mathcal{C}_0 \\ s_{H \cap H'} = k}} p_n^{2a_0 - a_{H \cap H'}}$$

Fixons maintenant un graphe  $H \in \mathcal{C}_0$  et considérons l'ensemble

$$\Omega_H = \left\{ (S, A) \in \mathcal{C}_0 \mid |S \cap S_H| = k \right\}$$

Considérons ensuite l'application

$$\begin{aligned} \Omega_H &\longrightarrow \mathcal{P}_k(S_H) \times \mathcal{P}_{s_0 - k}(\llbracket 1; n \rrbracket \setminus S_H) \\ (S, A) &\longmapsto (S \cap S_H, S \setminus (S \cap S_H)) \end{aligned}$$

Cette application est surjective car pour tout couple  $(S_1, S_2) \in \mathcal{P}_k(S_H) \times \mathcal{P}_{s_0 - k}(\llbracket 1; n \rrbracket \setminus S_H)$  il y a au moins une copie du graphe  $G_0$  de sommets  $S = S_1 \cup S_2$  (moyennant une bijection  $\sigma : S_0 \rightarrow S$ ) et que  $|S \cap S_H| = |S_1| = k$ . Ensuite toute copie de  $G_0$  de sommets  $S = S_1 \cup S_2$  et un élément de  $\Omega_H$ . Or d'après la question 18, le nombre de ces copies est  $c_0$ . Donc tout élément de  $\mathcal{P}_k(S_H) \times \mathcal{P}_{s_0 - k}(\llbracket 1; n \rrbracket \setminus S_H)$  admet exactement  $c_0$  antécédents par notre application. Alors

$$|\Omega_H| = c_0 |\mathcal{P}_k(S_H) \times \mathcal{P}_{s_0 - k}(\llbracket 1; n \rrbracket \setminus S_H)| = c_0 \binom{s_0}{k} \binom{n - s_0}{s_0 - k}$$

Par définition du nombre  $\omega_0$  on a

$$\forall H' \in \Omega_H \quad a_{H \cap H'} \leq \frac{s_{H \cap H'}}{\omega_0} = \frac{k}{\omega_0}$$

Puisque  $p_n \in ]0; 1[$  on a donc

$$\forall H' \in \Omega_H \quad p_n^{-a_{H \cap H'}} \leq p_n^{-\frac{k}{\omega_0}}$$

Ce qui achève de justifier que

$$\Sigma_k \leq \sum_{H \in C_0} c_0 \binom{s_0}{k} \binom{n-s_0}{s_0-k} p_n^{2a_0 - \frac{k}{\omega_0}}$$

Noter que  $k$  et  $n$  ne dépendent pas de l'indice  $H \in C_0$  donc en fait

$$\Sigma_k \leq |C_0| c_0 \binom{s_0}{k} \binom{n-s_0}{s_0-k} p_n^{2a_0 - \frac{k}{\omega_0}}$$

24

$$\begin{aligned} \binom{r}{q} r^{-q} &= \frac{r(r-1) \cdots (r-q+1)}{q!} r^{-q} \\ &= \frac{1}{q!} \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{r}\right) \left(1 - \frac{2}{r}\right) \cdots \left(1 - \frac{q-1}{r}\right) \\ &\geq \frac{1}{q!} \left(1 - \frac{q-1}{q}\right)^q \end{aligned}$$

Rappelons que  $E(X_n^0) = p_n^{a_0} |C_0|$  et  $|C_0| = \binom{n}{s_0} c_0$ . On a

$$\begin{aligned} \frac{\Sigma_k}{E(X_n^0)^2} &\leq \frac{1}{E(X_n^0)^2} c_0 |C_0| \binom{s_0}{k} \binom{n-s_0}{s_0-k} p_n^{2a_0 - \frac{k}{\omega_0}} \\ &\leq \frac{c_0}{|C_0|} \binom{s_0}{k} \binom{n-s_0}{s_0-k} p_n^{-\frac{k}{\omega_0}} \\ &\leq \frac{1}{\binom{n}{s_0}} \binom{s_0}{k} \binom{n-s_0}{s_0-k} p_n^{-\frac{k}{\omega_0}} \end{aligned}$$

Maintenant  $\binom{n}{s_0} = \frac{n(n-1) \cdots (n-s_0+1)}{s_0!} \geq \frac{1}{s_0!} (n-s_0)^{s_0}$  donc en posant  $M = s_0! \binom{s_0}{k}$  on a

$$\begin{aligned} \frac{\Sigma_k}{E(X_n^0)^2} &\leq M \binom{n-s_0}{s_0-k} (n-s_0)^{-s_0} p_n^{-\frac{k}{\omega_0}} \\ &\leq M \binom{n-s_0}{s_0-k} (n-s_0)^{k-s_0} (n-s_0)^{-k} p_n^{-\frac{k}{\omega_0}} \\ &\leq \frac{M}{(s_0-k)!} \left(1 - \frac{s_0-k-1}{s_0-k}\right)^{s_0-k} (n-s_0)^{-k} p_n^{-\frac{k}{\omega_0}} \end{aligned}$$

et vu que  $(n-s_0)^{-k} \sim n^{-k}$  il existe une constante  $M' > 0$  telle que  $(n-s_0)^{-k} \leq M' n^{-k}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a lors



$$0 \leq \frac{\Sigma_k}{\mathbf{E}(X_n^0)^2} \leq M'' n^{-k} p_n^{-\frac{k}{\omega_0}} = M'' (n^{\omega_0} p_n)^{-k/\omega_0}$$

où  $M'' = \frac{MM'}{(s_0 - k)!} \left(1 - \frac{s_0 - k - 1}{s_0 - k}\right)^{s_0 - k}$ . Puisque  $n^{\omega_0} p_n \rightarrow 0$  cela implique que

$$\Sigma_k = o(\mathbf{E}(X_n^0)^2)$$

**25** En partitionnant l'ensemble  $C_0^2$  sous la forme

$$C_0^2 = \bigcup_{k=0}^{s_0} \left\{ (H, H') \in C_0^2 \mid s_{H \cap H'} = k \right\}$$

les formules de la questions **21** signifient que

$$\mathbf{E}((X_n^0)^2) = \sum_{k=0}^{s_0} \Sigma_k$$

et donc

$$\frac{\mathbf{V}(X_n^0)}{\mathbf{E}(X_n^0)^2} = \frac{\Sigma_0}{\mathbf{E}(X_n^0)^2} - 1 + \sum_{k=1}^{s_0} \frac{\Sigma_k}{\mathbf{E}(X_n^0)^2}$$

Il s'agit donc de montrer que  $\frac{\Sigma_0}{\mathbf{E}(X_n^0)^2} \rightarrow 1$

Or

$$\Sigma_0 = \mathbf{E} \left( \sum_{\substack{H, H' \in C_0 \\ S_H \cap S_{H'} = \emptyset}} X_H X_{H'} \right) = \mathbf{E} \left( \sum_{H \in C_0} X_H \underbrace{\left( \sum_{\substack{H' \in C_0 \\ S_{H'} \subset \llbracket 1; n \rrbracket \setminus S_H}} X_{H'} \right)}_{Y_H} \right)$$

Par lemme des coalitions la variable  $Y_H$  est indépendante de  $X_H$  car toutes les variable  $X_{H'}$  sont indépendante de  $X_H$ . De plus elle suit la même loi que  $X_{n-s_0}^0$ . Donc

$$\begin{aligned} \Sigma_0 &= \sum_{H \in C_0} \mathbf{E}(X_H) \mathbf{E}(Y_H) \\ &= \sum_{H \in C_0} \mathbf{E}(X_H) \mathbf{E}(X_{n-s_0}^0) \\ &= \mathbf{E}(X_n^0) \mathbf{E}(X_{n-s_0}^0) \end{aligned}$$

Des calculs effectués précédemment dans les questions **18** et **19** donnent

$$\mathbf{E}(X_n^0) = |C_0| p_n^{a_0} = c_0 \binom{n}{s_0} p_n^{a_0}$$

$c_0$  étant une constante indépendante de  $n$  on a donc

$$\mathbf{E}(X_{n-s_0}^0) = c_0 \binom{n-s_0}{s_0} p_n^{a_0} \sim c_0 \binom{n}{s_0} p_n^{a_0} = \mathbf{E}(X_n^0)$$

et ainsi  $\Sigma_0 \sim (\mathbf{E}(X_n^0))^2$

Ce qui achève la démonstration.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbf{V}(X_n^0)}{\mathbf{E}(X_n^0)^2} = 0$$

**26** Découle des questions **12**, **20** et **25**

**27** La variable  $A_n$  est en fait égale à  $X_n^0$  lorsque le graphe  $G_0$  est formé de deux sommets et une arête. Dans ce cas le seul graphe  $H \subset G_0$  qui contient au moins une arête est  $G_0$  lui-même et par suite

$$\omega_0 = 2$$

On retrouve ainsi le résultat de la question **16**.

Lorsque  $G_0$  est une étoile à  $d \geq 1$  branches alors un sous graphe  $H \subset G_0$  est soit  $k$  sommets isolés s'il ne contient pas le centre  $s$  de  $G_0$ , soit il est lui-même une étoile s'il le contient. Donc

$$\omega_0 = \min_{2 \leq k \leq d} \frac{k}{k-1}$$

Comme car pour tout  $k \in \llbracket 2; d \rrbracket$ ,

$$\frac{k}{k-1} - \frac{d}{d-1} = \frac{k(d-1) - d(k-1)}{(k-1)(d-1)} = \frac{d-k}{(k-1)(d-1)} \geq 0$$

alors

$$\omega_0 = \frac{d}{d-1}$$