Une correction de l'épreuve Mines Ponts Physique 1 MP 2024

Pour toute suggestion, merci de me contacter à l'adresse suivante : melkimathis@gmail.com.

***

(1) On peut considérer A fixe si et seulement si $m_A \gg m_P$. Si A et P sont assimilés à deux points matériels, la force gravitationnelle $\vec{F}$ exercée par $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{P}$ s'exprime :

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\mathcal{G}\frac{m_A m_P}{\|\vec{r}\|^3}\vec{r} = -\mathcal{G}\frac{m_A m_P}{r^2}\widehat{u_r}$$

(2) Si $\mathcal{A}$ possède une répartition de masse à symétrie sphérique, on applique le théorème de Gauß gravitationnel pour déterminer la valeur du champ gravitationnel $\vec{G}$ créé. Ainsi, on aura $\vec{F} = m_P\vec{G}$ par définition.

On choisit pour surface de Gauß la sphère Σ de centre A et de rayon r passant par P.

- La distribution de masse est invariante sous toute rotation. Le champ $\vec{G}$ ne dépend donc que de la coordonnée radiale r.

- Les plans contenant l'axe $(P, \widehat{u_r})$ sont des plans de symétries pour la distribution de masse. On cherche donc le champ $\vec{G}$ sous la forme $\vec{G}(P) = G_r(r)\widehat{u_r}$.

Le calcul du flux de $\vec{G}$ à travers Σ donne :

$$\iint_{M\in\Sigma}\vec{G}(M)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iint_{\Sigma}G_r(r)\mathrm{d}S \overset{\substack{\text{intégration à}\\ r\text{ constant}}}{=} G_r(r)\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S = G_r(r)\times 4\pi r^2$$

Par le théorème de Gauß gravitationnel, on a donc $(r > R_A)$:

$$G_r(r)4\pi r^2 = -4\pi\mathcal{G}m_A \Rightarrow G_r(r) = -\mathcal{G}\frac{m_A}{r^2}$$

D'où,

$$\vec{G}(\vec{r}) = -\mathcal{G}\frac{m_A}{r^2}\widehat{u_r}$$

Finalement, on tire :

$$\vec{F}(\vec{r}) = m_P\vec{G}(\vec{r}) = -\mathcal{G}\frac{m_A m_P}{r^2}\widehat{u_r}$$

On retrouve l'expression de la question 1 !

(3) On vient de montrer que la force exercée par $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{P}$ ne dépend pas de la modélisation de $\mathcal{A}$ (sphérique, ou point matériel). De la même manière, on peut montrer que la force exercée par $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{A}$ ne dépend pas de la modélisation de $\mathcal{P}$. Par le principe des actions réciproques, on conclut que l'expression de la force $\vec{F}$ ne dépend pas de la modélisation de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{P}$.

(Merci à Guillaume Pages pour la correction de cette question !)

(4) Le moment de la force gravitationnelle subie par P est nul car ladite force est radiale. Par le théorème du moment cinétique, il vient que le moment cinétique $\overrightarrow{L_A}$ est constant. Ainsi, à tout instant, $\vec{r}$ est orthogonal à $\overrightarrow{L_A}$ – qui est constant –, donc le mouvement est contenu dans le plan contenant A et orthogonal à $\overrightarrow{L_A}$, ici noté (Axy).

Par définition, $\overrightarrow{L_A} \coloneqq \vec{r} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = mr^2\dot{\theta}\widehat{u_z} = \overrightarrow{\text{constante}}$. On définit alors $C = r^2\dot{\theta}$ (constante des aires).

(5) Par la règle de la chaîne :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

Or, par le principe fondamental de la dynamique,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -\mathcal{G}\frac{m_A}{r^2}\widehat{u_r}$$

Par conséquent,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}\theta} = -\mathcal{G}\frac{m_A}{r^2\dot{\theta}}\widehat{u_r} = -\mathcal{G}\frac{m_A}{C}\widehat{u_r}$$

En posant $p = C^2/\mathcal{G}m_A$, il vient :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{C}{p}\widehat{u_r}$$

En outre, une nouvelle fois par la règle de la chaîne :

$$\frac{\mathrm{d}\widehat{u_\theta}}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\widehat{u_\theta}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\dot{\theta}}\frac{\mathrm{d}\widehat{u_\theta}}{\mathrm{d}t}$$

Et, par la formule de dérivation des vecteurs :

$$\frac{\mathrm{d}\widehat{u_\theta}}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\widehat{u_z} \wedge \widehat{u_\theta} = -\dot{\theta}\widehat{u_r} \Rightarrow -\widehat{u_r} = \frac{1}{\dot{\theta}}\frac{\mathrm{d}\widehat{u_\theta}}{\mathrm{d}t}$$

Ainsi, on a :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{C}{p}\widehat{u_\theta}\right)$$

Par intégration, on obtient finalement :

$$\vec{v}(\theta) = C\frac{\widehat{u_\theta} + \vec{e}}{p}$$

Où $\vec{e}$ est une $\overrightarrow{\text{constante}}$ d'intégration (adimensionnée comme $\widehat{u_\theta}$ en vertu de l'expression ci-dessus).

Le mouvement est plan, donc le vecteur $\vec{v}$ reste dans le plan (Axy). De même pour le vecteur $\widehat{u_\theta}$. Donc le vecteur $\vec{e}$, combinaison linéaire des deux vecteurs précédents, reste aussi dans le plan (Axy).

(6) Par ce qui précède,

$$\vec{v}(\theta) = C\frac{\widehat{u_\theta} + \vec{e}}{p} = C\frac{\widehat{u_\theta} + e\widehat{u_y}}{p} \overset{(\widehat{u_y} = \cos\theta\,\widehat{u_\theta} - \sin\theta\,\widehat{u_r})}{=} - C\frac{e\sin\theta}{p}\widehat{u_r} + C\frac{1 + e\cos\theta}{p}\widehat{u_\theta}$$

Or, par définition, on a :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{(\widehat{u_r},\widehat{u_\theta},\widehat{u_z})}$$

En identifiant les coordonnées, on obtient :

$$\dot{r} \underset{(*)}{=} - C\frac{e\sin\theta}{p}, \qquad r\dot{\theta} \underset{(**)}{=} C\frac{1 + e\cos\theta}{p}$$

En exploitant l'équation $(**)$, et par définition de $C \coloneqq r^2\dot{\theta}$, on supprime $\dot{\theta}$ pour obtenir :

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos(\theta)}$$

Si $e \geq 1$, alors le dénominateur $1 + e\cos\theta$ peut devenir très proche de 0 quand θ varie, donc la trajectoire n'est pas bornée. Par contraposée, une trajectoire bornée n'est envisageable que si e est strictement inférieur à 1.

Si $e < 1$, on obtient l'équation polaire d'une ellipse d'excentricité e.

(7) En exploitant l'équation $(**)$ ainsi que l'expression de $r(\theta)$, on tire :

$$\dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = C\frac{(1 + e\cos\theta)^2}{p^2}$$

On sépare les variables puis on intègre sur une période T, soit pour θ parcourant l'intervalle $[0,2\pi]$.

$$\mathrm{d}t = \frac{p^2}{C}\frac{\mathrm{d}\theta}{(1 + e\cos\theta)^2} \Rightarrow T = \frac{p^2}{C}\underbrace{\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(1 + e\cos\theta)^2}}_{\coloneqq\mathcal{I}}$$

Puis, en utilisant l'expression de p :

$$p \coloneqq \frac{C^2}{\mathcal{G}m_A} \Rightarrow C = p^{\frac{1}{2}}\sqrt{\mathcal{G}m_A}$$

D'où finalement,

$$T = \mathcal{I}\frac{p^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mathcal{G}m_A}}$$

<u>(8)</u> On suppose ici que $e = 0$. Le rayon est alors constant égal à p ; la trajectoire est un cercle de rayon p.

L'expression de la période T devient :

$$T = 2\pi \frac{p^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mathcal{G} m_A}} \Rightarrow \frac{T^2}{p^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G} m_A}$$

On retrouve alors la troisième loi de Kepler, ou « loi des périodes », dans le cas particulier d'une trajectoire circulaire. Historiquement, on l'énonce comme suit : « le carré de la période sidérale d'une planète est proportionnel au cube du demi-grand axe de sa trajectoire elliptique ».

<u>(9)</u> Cf Python (voir la syntaxe dans les données à la fin du sujet).

<u>(10)</u> Cf faire le schéma.

<u>(11)</u> On a :

$$\alpha \coloneqq \frac{l}{D}, \qquad D = a_1 - a_0$$

Où D désigne la distance Terre-Mars.

$$\Rightarrow a_1 = a_0 + \frac{l}{\alpha}$$

Or, par la troisième de loi de Kepler, on a :

$$\frac{T_0^2}{a_0^3} = \frac{T_1^2}{a_1^3} \Rightarrow a_0 = a_1 \left(\frac{T_0}{T_1}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Ainsi,

$$a_0 = \left(a_0 + \frac{l}{\alpha}\right)\left(\frac{T_0}{T_1}\right)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow a_0 \left(1 - \left(\frac{T_0}{T_1}\right)^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{l}{\alpha}\left(\frac{T_0}{T_1}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Finalement,

$$a_0 = \frac{l}{\alpha} \frac{1}{\left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{\frac{2}{3}} - 1}$$

<u>(12)</u> La valeur annoncée donne $a_0 \approx 1{,}98 \times 10^{11}$ m. C'est relativement proche de la valeur exacte 1 UA = $1{,}50 \times 10^{11}$ m !!

<u>(13)</u> Le travail W_g est négatif, il correspond à une interaction globalement attractive (c'est bien le cas de l'interaction gravitationnelle). L'énergie de liaison $E_l \coloneqq -W_g$ correspond au contraire à l'énergie qu'il faudrait fournir à l'étoile pour la disloquer.

(14) Par définition :

$$M = \iiint_{\text{Étoile}} \rho \mathrm{d}V \overset{\rho \text{ constant}}{=} \rho \frac{4}{3}\pi R^3$$

Ainsi,

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

On déduit :

$$m = \rho \times \frac{4}{3}\pi r^3 = M\left(\frac{r}{R}\right)^3, \qquad \mathrm{d}m = \rho \times \underbrace{4\pi r^2 \mathrm{d}r}_{\substack{\text{volume d'une couche} \\ \text{d'épaisseur } \mathrm{d}r}} = \frac{3Mr^2\mathrm{d}r}{R^3}$$

(15) On considère pour système la couche d'épaisseur $\mathrm{d}r$. Les forces subies par ce système sont la force de l'opérateur $\overrightarrow{F_{\text{op}}}$ qui permet d'amener cette couche, ainsi que la force gravitationnelle $\overrightarrow{F_{\text{grav}}}$ induite par le champ gravitationnel créé par par la masse m déjà constituée. Comme on travaille en régime quasi-statique, le principe fondamental de la dynamique devient :

$$\overrightarrow{F_{\text{op}}} + \overrightarrow{F_{\text{grav}}} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{F_{\text{op}}} = -\overrightarrow{F_{\text{grav}}}$$

Par définition du travail d'une force, il vient :

$$\delta W_g = \delta W\left(\overrightarrow{F_{\text{op}}}\right) = -\delta W\left(\overrightarrow{F_{\text{grav}}}\right)$$

Or, la force gravitationnelle est conservative, donc dérive d'une énergie potentielle gravitationnelle $\mathcal{E}_p$ de sorte que :

$$\delta W_g = -\delta W\left(\overrightarrow{F_{\text{grav}}}\right) = \mathrm{d}\mathcal{E}_p = \underbrace{-\mathcal{G}\frac{m\mathrm{d}m}{r}}_{\substack{\text{énergie potentielle gravitationnelle} \\ \text{subie par la couche de masse } \mathrm{d}m \\ \text{dans le champ créé par la masse } m \\ \text{déjà constituée}}}$$

On déduit :

$$\delta W_g = -\mathcal{G}\frac{M\left(\frac{r}{R}\right)^3 \frac{3Mr^2\mathrm{d}r}{R^3}}{r} = -3\frac{\mathcal{G}M^2}{R^6}r^4\mathrm{d}r$$

D'où, par intégration pour $r \in [0, R]$,

$$W_g = -\frac{3}{5}\frac{\mathcal{G}M^2}{R}$$

(16) On considère la situation « locale », i.e. on s'intéresse à l'équilibre de la colonne de fluide d'aire S, située entre les altitudes z et $z + \mathrm{d}z$.

Les forces subies par cette colonne sont de deux types :

- D'une part, les forces de pression :

$$\overrightarrow{F_1} = -P(z+\mathrm{d}z)S\widehat{u_z}, \qquad \overrightarrow{F_2} = +P(z)S\widehat{u_z}$$

(Les forces de pression s'exerçant sur les côtés de la colonne (selon $\widehat{u_x}$ et $\widehat{u_y}$) se compensent par symétrie.)

- D'autre part, la force gravitationnelle :

$$\overrightarrow{F_{\text{grav}}} = \underbrace{\rho(z)S\mathrm{d}z}_{\substack{\text{masse de la colonne}\\ \text{de fluide}}} \times G(z)$$

À l'équilibre, les forces se compensent, soit :

$$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_{\text{grav}}} = \vec{0}$$

Ainsi, en projetant sur l'axe (Oz) :

$$-P(z+\mathrm{d}z)S + P(z)S + \rho(z)S\mathrm{d}zG(z) = 0$$

On simplifie par S et on fait un développement de Taylor au premier ordre :

$$-\underbrace{\big(P(z+\mathrm{d}z) - P(z)\big)}_{=\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}(z)\mathrm{d}z} + \rho(z)G(z)\mathrm{d}z = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}(z) = \rho(z)G(z) < 0$$

(17) Dans le modèle de la statistique de Maxwell-Boltzmann, pour un gaz parfait monoatomique de N particules, on a par le théorème d'équipartition de l'énergie :

$$\mathcal{E}_c = N \times \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = N \times \frac{3}{2}k_BT \overset{k_B=\frac{R}{\mathcal{N}_A}}{=} N \times \frac{3}{2}\frac{RT}{\mathcal{N}_A} \overset{\substack{\text{loi des gaz}\\ \text{parfaits}}}{=} N \times \frac{3}{2}\frac{PV}{\underbrace{n\mathcal{N}_A}_{=N}}$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_c = \frac{3}{2}PV$$

(18) La symétrie sphérique conduit (l'analyse a déjà été effectuée) à chercher le champ $\vec{G}$ sous la forme $\vec{G}(\vec{r}) = G_r(r)\widehat{u_r}$.

On considère pour surface de Gauß la sphère Σ de rayon r. On note τ le volume engendré par Σ.

La masse contenue dans Σ est :

$$m_{\text{int}} \coloneqq \iiint_\tau \rho \mathrm{d}V \underset{\substack{\text{masse volumique}\\ \text{constante}}}{=} \rho \iiint_\tau \mathrm{d}V = \rho \times \frac{4}{3}\pi r^3 \underset{\rho=\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}}{=} M\left(\frac{r}{R}\right)^3$$

Le flux du champ $\vec{G}$ à travers Σ est :

$$\iint_{M\in\Sigma} \vec{G}(M)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iint_{\Sigma} G_r(r)\mathrm{d}S \overset{\substack{\text{intégration à } r\\ \text{constant}}}{=} G_r(r)\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S = G_r(r)4\pi r^2$$

Par le théorème de Gauß gravitationnel, on obtient :

$$G_r(r)4\pi r^2 = -4\pi\mathcal{G}M\left(\frac{r}{R}\right)^3$$

$$\Rightarrow G_r(r) = -\frac{\mathcal{G}M}{R^3}r$$

Par conséquent, d'après la question **(16)** et compte tenu de la généralisation sphérique, on tire :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r}(r) = \rho\times -\frac{\mathcal{G}M}{R^3}r = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}\times -\frac{\mathcal{G}M}{R^3}r = -\frac{3}{4}\frac{\mathcal{G}M^2}{\pi R^6}r$$

Par intégration, il en résulte :

$$P(r) = -\frac{3}{8}\frac{\mathcal{G}M^2}{\pi R^6}r^2 + A,\qquad A = \text{constante}$$

Or, $P(R) = 0$ car P désigne la pression dans le fluide. On obtient alors :

$$P(r) = \frac{3}{8}\frac{\mathcal{G}M^2}{\pi R^6}(R^2 - r^2)$$

(19) On peut calculer la pression moyenne dans l'étoile :

$$P = \langle P(r)\rangle_{r\in[0,R]} := \frac{1}{R}\int_0^R P(r)\mathrm{d}r = \frac{1}{R}\times\frac{3}{8}\frac{\mathcal{G}M^2}{\pi R^6}\int_0^R (R^2 - r^2)\mathrm{d}r = \frac{1}{R}\times\frac{3}{8}\frac{\mathcal{G}M^2}{\pi R^6}\left(R^3 - \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R\right)$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{R}\times\frac{3}{8}\frac{\mathcal{G}M^2}{\pi R^6}\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{\mathcal{G}M^2}{4\pi R^4}$$

D'après la question **(17)** il vient :

$$\mathcal{E}_c = \frac{3}{2}PV = \frac{3}{2}\times\frac{\mathcal{G}M^2}{4\pi R^4}\times\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\mathcal{G}M^2}{2R}$$

(20) On peut loisiblement approximer $M \approx N\times m_p$ car la masse d'un proton est nettement plus grande que celle d'un électron. En outre, $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Ainsi :

$$a^3 := \mathcal{V} := \frac{V}{N} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{M}{m_p}} = \frac{4}{3}\pi R^3\frac{m_p}{M}$$

D'où,

$$a = \left(\frac{4}{3}\pi\frac{m_p}{M}\right)^{\frac{1}{3}}R$$

(21) Il est commode de modéliser cette situation de confinement quantique par un puits de potentiel infini de largeur a. C'est ce que nous allons mettre en place.

On injecte l'expression de Ψ dans l'équation de Schrödinger :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}(x)e^{-j\omega t} = j\hbar\psi(x) \times -j\omega e^{-j\omega t}$$

D'où, après simplification, en posant $e = \hbar\omega > 0$ l'énergie de la particule étudiée :

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}(x) + \underbrace{\frac{2me}{\hbar^2}}_{:=k^2}\psi(x) = 0$$

Les solutions de cette équation différentielle sont de la forme :

$$\psi(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)\,, \qquad A, B \in \mathbb{C}$$

Écrivons à présent les conditions de continuité aux bords du puits. Déjà, $\psi(0) = 0$ car il n'y a pas de terme divergent dans l'équation de Schrödinger ; donc $A = 0$. Pour la même raison, $\psi(a) = 0$, donc $\sin(ka) = 0$. Cela induit une quantification de k :

$$k_n a = n\pi \Rightarrow \sqrt{\frac{2me_n}{\hbar^2}}a = n\pi \Rightarrow e_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}, \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

On déduit alors l'énergie e_1 de l'état fondamental $n = 1$:

$$e_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

La fonction d'onde de l'état fondamental est donc :

$$\psi_1(x) = B\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

On détermine B par la condition de normalisation :

$$1 = \int_0^a |\psi_1(x)|^2\mathrm{d}x = |B|^2\int_0^a \left|\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right|^2\mathrm{d}x$$

Or, le sinus est positif sur l'intervalle $[0, \pi]$, donc :

$$1 = |B|^2\int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\mathrm{d}x = |B|^2\int_0^a \frac{1-\cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)}{2}\mathrm{d}x = \frac{|B|^2}{2}\left(a - \int_0^a \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\mathrm{d}x\right)$$

Or,

$$\int_0^a \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{a}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right]_0^a = 0$$

Donc,

$$|B|^2 = \frac{2}{a}$$

Quitte à placer une phase dans la partie « temporelle » de la fonction d'onde Ψ, on peut supposer B réel, de sorte que :

$$B = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

Finalement :

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right), \qquad e_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

Afin de vérifier le principe d'indétermination de Heisenberg, on calcule séparément les variances Δx et Δp_x.

D'une part, $\Delta x \sim a$ car le puits a pour taille caractéristique a.

D'autre part, on calcule Δp_x en utilisant la formule $(\Delta p_x)^2 = \langle p_x^2 \rangle - \langle p_x \rangle^2$. En effet, on a déjà que $\langle p_x \rangle = 0$ car aucune direction n'est privilégiée (on peut s'en convaincre quantitativement en remarquant que la fonction d'onde d'une particule confinée se décompose comme superposition d'ondes de De Broglie se propageant dans des sens contraires). Par conséquent, $(\Delta p_x)^2 = \langle p_x^2 \rangle$.

Or, l'énergie totale d'une particule dans le puits de potentiel, dans l'état fondamental s'écrit :

$$e_1 = \frac{\langle p_x^2 \rangle}{2m} + \underbrace{0}_{\substack{\text{potentiel nul} \\ \text{dans le puits}}}$$

Par conséquent, $\langle p_x^2 \rangle = 2me_1$, et $\Delta p_x = \sqrt{2me_1}$. On utilise l'expression de e_1 trouvée :

$$\Delta p_x = \sqrt{2m \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}} = \frac{\pi \hbar}{a}$$

Finalement,

$$\Delta x \Delta p_x = a \times \frac{\pi \hbar}{a} = \frac{h}{2} \geq \frac{\hbar}{2}$$

Le principe d'indétermination de Heisenberg est vérifié !

(22) Dans le cas d'un puits cubique de côté a, on cherche une fonction d'onde sous la forme :

$$\Psi(x, y, z, t) = \alpha(x)\beta(y)\delta(z)e^{-j\omega t}, \qquad \alpha, \beta, \delta \text{ des fonctions suffisamment régulières}$$

Par symétrie, on itère le raisonnement précédent, de sorte que la fonction d'onde de l'état fondamental soit :

$$\Psi_1(x, y, z, t) = \sqrt{\frac{2}{a^3}} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{a}\right) e^{-j\omega t}$$

L'énergie devient :

$$e_{n_1,n_2,n_3} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi^2 n_1^2}{a^2} + \frac{\pi^2 n_2^2}{a^2} + \frac{\pi^2 n_3^2}{a^2}\right), \qquad n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}^*$$

L'état fondamental est donc :

$$e_{1,1,1} = \frac{3h^2}{8ma^2}$$

(23) L'énergie cinétique totale due au confinement s'écrit comme la somme des énergies cinétiques des protons et des électrons :

$$\mathcal{E}_c = N \times \frac{3h^2}{8m_e a^2} + N \times \frac{3h^2}{8m_p a^2} = N \times \left(\frac{1}{m_p} + \frac{1}{m_e}\right)\frac{3h^2}{8a^2}$$

Par la question **(20)**, il vient :

$$\mathcal{E}_c = N \times \frac{m_p + m_e}{m_p m_e} \frac{3h^2}{8\left(\frac{4}{3}\pi\frac{m_p}{M}\right)^{\frac{2}{3}} R^2}$$

Or, $N = \frac{M}{m_p + m_e}$ (on omet l'équivalent ici afin de simplifier par la suite). On tire :

$$\mathcal{E}_c = \underbrace{\frac{3}{8}\left(\frac{4}{3}\pi\right)^{-\frac{2}{3}} \frac{h^2}{m_e m_p^{\frac{5}{3}}}}_{=\gamma} \times \frac{M^{\frac{5}{3}}}{R^2}$$

On obtient la forme voulue.

(24) L'énergie totale s'exprime :

$$\mathcal{E} = \gamma \frac{M^{\frac{5}{3}}}{R^2} - \frac{3}{5}\frac{\mathcal{G}M^2}{R}$$

On cherche R_{eq} qui minimise $\mathcal{E}$:

$$0 = \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}R}(R_{\text{eq}}) = -2\gamma \frac{M^{\frac{5}{3}}}{R_{\text{eq}}^3} + \frac{3}{5}\frac{\mathcal{G}M^2}{R_{\text{eq}}^2} \Rightarrow R_{\text{eq}} = \frac{10\gamma}{3\mathcal{G}M^{\frac{1}{3}}}$$

(25) Application numérique : $R_{\text{eq}} = 6{,}34 \times 10^6$ m. Le rayon est quasi 100 fois plus petit que celui du Soleil, mais la masse est la même ! Les naines blanches sont des objets célestes très denses.

(26) On a :

$$\mathcal{E}_c = \gamma \frac{M^{\frac{5}{3}}}{R_{\text{eq}}^2} = \frac{1}{2} m_e v^2 \Rightarrow v = \sqrt{2\gamma \frac{M^{\frac{5}{3}}}{m_e R_{\text{eq}}^2}} \approx 3{,}50 \times 10^{16} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Soit une vitesse nettement supérieure à celle de la lumière, ce qui est impossible ! Des corrections relativistes doivent être effectuées.