

Mines Ponts MP 2024 : physique 2

Proposition de corrigé

clementpicard69000@gmail.com

I. Refroidissement des supraconducteurs

I.A. Refroidissement progressif d'un supraconducteur

1. A l'aide de la relation donnée, on écrit : $k = \frac{j_{par}}{T-T_f}$.

Or, j_{par} est un flux surfacique, il est donc en W.m^{-2} . On en conclut que l'unité de k est le $\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$.

De même, avec la loi de Fourier pour la conduction : $j_{cond} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T)$. On en déduit de même que λ est en $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$

2. L'équation de la chaleur écrite avec la diffusivité thermique D_{th} est $\frac{\partial T}{\partial t} = D_{th} \Delta T$. En reprenant l'équation de la chaleur donnée en introduction, on en déduit que :

$$D_{th} = \frac{\lambda}{\rho c}$$

D_{th} étant en $\text{m}^2.\text{s}^{-1}$, on peut définir un temps caractéristique de diffusion : $\tau_{diff} = \frac{R^2}{D_{th}}$. Pour s'assurer que la température soit uniforme, il faut refroidir pendant un temps plus long que le temps caractéristique de diffusion donc $\Delta t \gg \frac{R^2}{D_{th}}$.

3.

$$C_{th} = mc = \frac{4}{3} \rho \pi R^3 c$$

Par définition de la résistance thermique associé aux échanges conducto-convectifs $R_{th} = \frac{T-T_f}{\Phi_{par}} = \frac{T-T_f}{j_{par} S}$.

A l'aide de la loi phénoménologique donnée en introduction, on obtient :

$$R_{th} = \frac{1}{4\pi R^2 k}$$

4. On se place en régime quasi-stationnaire. L'équation de la chaleur devient alors $\Delta T_f = 0$. A l'aide du formulaire en fin d'énoncé, et sachant que T_f ne dépend que de r , on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial T_f}{\partial r}) = 0$$

$$r^2 \frac{\partial T_f}{\partial r} = A \text{ avec } A \text{ une constante} \Rightarrow \frac{\partial T_f}{\partial r} = \frac{A}{r^2}.$$

$$T_f = -\frac{A}{r} + B.$$

Or, pour $r \rightarrow +\infty$, $T_f \rightarrow T_0$, donc $B = T_0$.

De plus, la température à la surface de la boule est noté $T_s(t)$, donc on peut écrire que :

$$T_s(t) = -\frac{A}{R} + T_0 \Rightarrow A = R[T_0 - T_s(t)].$$

$$\text{D'où } T_f(r, t) = T_0 + [T_s(t) - T_0] \frac{R}{r}$$

5. Comme on se place en régime quasi-stationnaire, le raisonnement par résistance thermique est licite.

On calcule dans un premier temps le flux thermique associé au transfert conductif :

$$\begin{aligned} \Phi_{cond}(r) &= -\lambda' \frac{\partial T}{\partial r} \times 4\pi r^2 \\ \Rightarrow \Phi_{cond}(r) &= \lambda' [T_s - T_0] \frac{R}{r^2} \times 4\pi r^2 = -4\pi \lambda' [T_s - T_0] R. \text{ (flux constant)} \end{aligned}$$

En utilisant la définition de la résistance thermique $R'_{th} = \frac{T_s - T_0}{\Phi_{cond}(r)}$, on obtient :

$$R'_{th} = \frac{1}{4\pi \lambda' R}$$

6. En appliquant le premier principe à la boule pendant une durée infinitésimale dt , on obtient :

$$U(t + dt) - U(t) = \frac{4}{3} \rho c \pi R^3 \frac{\partial T}{\partial t} dt = -\Phi dt \text{ la boule se refroidit donc perd de l'énergie.}$$

Pour exprimer le flux Φ , on utilise une association des deux résistances en série, soit $\Phi = \frac{T - T_0}{R_{th} + R'_{th}}$

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{T - T_0}{R_{th} + R'_{th}} \\ \Rightarrow \Phi &= \frac{T - T_0}{\frac{1}{4\pi k R^2} + \frac{1}{4\pi \lambda' R}} \\ \Rightarrow \Phi &= \frac{4[T - T_0] \pi \lambda' R^2 k}{[\lambda' + Rk]} \end{aligned}$$

Or, on se place dans le cas $\lambda' \gg Rk$, donc $\lambda' + Rk \simeq \lambda'$. On en conclut que :

$$\Phi = 4[T - T_0] \pi R^2 k$$

On injecte dans le premier principe pour obtenir :

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \rho c \pi R^3 \frac{\partial T}{\partial t} dt &= -4[T - T_0] \pi R^2 k dt \\ \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{3k}{\rho R c} T &= \frac{3k}{\rho R c} T_0. \end{aligned}$$

En posant $\tau = \frac{\rho R c}{3k}$, on obtient l'équation différentielle :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{T}{\tau} = \frac{T_0}{\tau}.$$

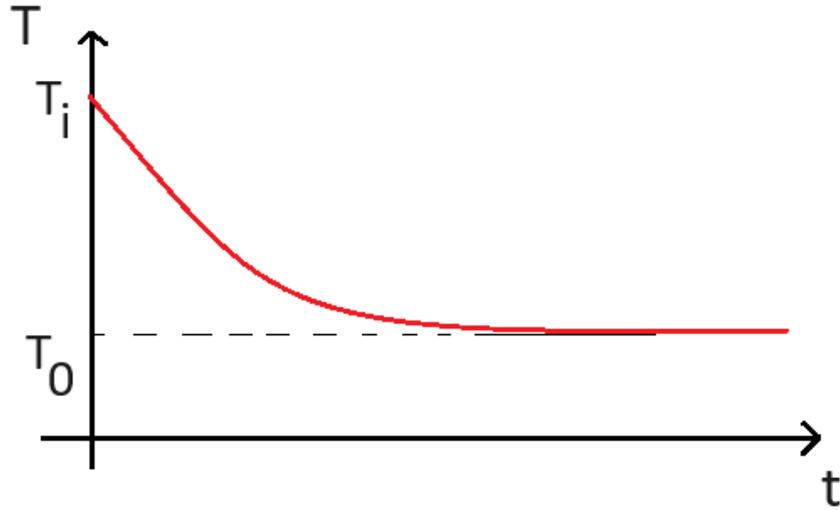
7. Une solution de l'équation différentielle précédente est de la forme $T(t) = Ae^{-t/\tau} + T_0$

Or à $t = 0$, $T(0) = T_i$, d'où :

$$\begin{aligned} T_i &= Ae^{-0/\tau} + T_0 \\ \Rightarrow A &= T_i - T_0. \end{aligned}$$

Ainsi, la solution de l'équation différentielle est :

$$T(t) = (T_i - T_0)e^{-t/\tau} + T_0$$



La transition débute lorsque $T(\Delta t) = T_{sc}$. En utilisant l'expression précédente de $T(t)$ et en isolant Δt , on a :

$$\Delta t = -\tau \ln\left(\frac{T_{sc} - T_0}{T_i - T_0}\right)$$

I.B. Refroidissement stationnaire d'un fil supraconducteur

8. p_u étant une densité volumique de puissance constante et uniforme, on peut écrire directement que :

$$P_s(r) = \pi r^2 H p_u$$

9. On se place dans un cylindre de rayon r et de hauteur H . En régime stationnaire, par conservation du flux, on peut alors écrire que la puissance créée à l'intérieur du cylindre est égale au flux sortant des parois latérales du cylindre, donc :

$$\begin{aligned} P_s(r) &= j_{th}(r) \times 2\pi r H \\ \Rightarrow j_{th}(r) &= \frac{P_s(r)}{2\pi r H} \end{aligned}$$

En reprenant l'expression précédente de $P_s(r)$, on obtient :

$$j_{th}(r) = \frac{p_u r}{2}$$

10. En écrivant qu'à la surface du cylindre, par conservation du flux, le flux surfacique conducto-convectif est égal au flux $j_i h R$, on a :

$$k(T_s - T_0) = \frac{p_u R}{2}$$

$$\Rightarrow T_s = T_0 + \frac{p_u R}{2k}$$

11. Déterminons la température $T(r)$ dans le cylindre en partant de la loi de Fourier $j_{th}(r) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}$. Avec l'expression de $j_{th}(r)$ trouvé en question 9, on obtient :

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{p_u r}{2\lambda}$$

$$\Rightarrow T(r) = -\frac{p_u r^2}{4\lambda} + A$$

Or la condition aux limites est que $T(R) = T_s$. Avec l'expression de la question 10, on a donc :

$$T_0 + \frac{p_u R}{2k} = -\frac{p_u R^2}{4\lambda} + A$$

$$\Rightarrow A = T_0 + \frac{p_u R[\lambda + kR]}{4\lambda k}$$

Ainsi, l'expression de $T(r)$ est :

$$T(r) = -\frac{p_u r^2}{4\lambda} + T_0 + \frac{p_u R[\lambda + kR]}{4\lambda k}$$

$T(r)$ décroît avec r , la température est maximale en $r = 0$ et vaut :

$$T_{max} = T_0 + \frac{p_u R[\lambda + kR]}{4\lambda k}$$

Pour éviter le quench, il faut alors que $T_{max} < T_{sc}$, soit :

$$T_0 + \frac{p_u R[\lambda + kR]}{4\lambda k} < T_{sc}$$

$$\Rightarrow p_u < \frac{4\lambda k[T_{sc} - T_0]}{R[\lambda + kR]} = p_{max}$$

II. Réfrigérateur à détente de gaz

II.A. Thermodynamique des gazs parfaits

12. En notant $p(\epsilon_j)$ la probabilité d'atteindre l'état d'énergie ϵ_j , on a :

$$p(\epsilon_j) = \frac{e^{-\beta \epsilon_j}}{Z(\beta)}$$

13. Par définition : $\bar{\epsilon} = \sum_{j=1}^p \epsilon_j p(\epsilon_j) = \frac{1}{Z} \sum_{j=1}^p \epsilon_j e^{-\beta \epsilon_j}$.

Or, si on calcule $\frac{\partial Z}{\partial \beta}$, on obtient

$$\frac{\partial Z}{\partial \beta} = \sum_{j=1}^p \frac{\partial}{\partial \beta} (e^{-\beta \epsilon_j})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial Z}{\partial \beta} = -\sum_{j=1}^p \epsilon_j e^{-\beta \epsilon_j}$$

On en déduit alors que :

$$\bar{\epsilon} = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta}$$

Chaque particule ayant la même énergie moyenne, on peut alors écrire que :

$$U(\beta) = N\bar{\epsilon} = -\frac{N}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta}$$

14. On peut définir la variance V_ϵ d'un tel système. Par définition :

$$V_\epsilon = \sum_{j=1}^p (\epsilon_j - \bar{\epsilon})^2 p(\epsilon_j)$$

$$\Rightarrow \sigma_\epsilon = \sqrt{V_\epsilon} = \sqrt{\sum_{j=1}^p (\epsilon_j - \bar{\epsilon})^2 p(\epsilon_j)}$$

La variance d'une somme aléatoire étant égale à la somme des variances donc $V_u = NV_\epsilon$ et $\sigma_u = \sqrt{N}\sigma_\epsilon$

Si on calcule la fluctuation relative de l'énergie du système on obtient :

$$\frac{\sigma_U}{U} = \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\sigma_\epsilon}{\bar{\epsilon}}$$

Cela signifie que plus le système est composé de particules, plus la fluctuation relative sur l'énergie est faible.

15. $Z(\beta)$ étant sans unité, $q(\epsilon)$ doit être homogène à l'inverse d'une énergie.

16. Pour un gaz parfait à 3 dimensions, le nombre d'états Φ dont l'énergie est inférieur à ϵ est proportionnel à $\epsilon^{3/2}$.

Or $q(\epsilon)d\epsilon$ est le nombre d'états dont l'énergie est comprise entre ϵ et $\epsilon + d\epsilon$. On a donc :

$$q(\epsilon)d\epsilon = \Phi(\epsilon + d\epsilon) - \Phi(\epsilon) = \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon} d\epsilon \text{ au 1er ordre en } \epsilon.$$

Comme Φ est proportionnel à $\epsilon^{3/2}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon}$ est proportionnel à $\sqrt{\epsilon}$, donc $q(\epsilon)$ aussi.

17. A l'aide de la question 16, on réécrit $Z(\beta) = Q \int_0^\infty \sqrt{\epsilon} e^{-\beta \epsilon} d\epsilon$

On effectue le changement de variable $x = \beta \epsilon$ soit $dx = \beta d\epsilon$, donc :

$$Z(\beta) = \frac{Q}{\beta} \int_0^\infty \sqrt{x/\beta} e^{-x} dx$$

$$\Rightarrow Z(\beta) = \frac{Q}{\beta^{3/2}} \int_0^\infty \sqrt{x} e^{-x} dx$$

$$\Rightarrow Z(\beta) = \frac{QA}{\beta^{3/2}}$$

18. On reprend la formule de la question 13 : $U(\beta) = -\frac{N}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta}$. Or :

$$\frac{\partial Z}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{QA}{\beta^{3/2}} \right) = -\frac{3QA}{2\beta^{5/2}}$$

On en déduit alors :

$$U(\beta) = \frac{N\beta^{3/2}}{QA} \times \frac{3QA}{2\beta^{5/2}}$$

$$\Rightarrow U(\beta) = \frac{3N}{2\beta} = \frac{3}{2} Nk_B T$$

On retrouve l'expression vue en thermodynamique pour un gaz parfait monoatomique. Pour un gaz parfait diatomique $U(\beta) = \frac{5}{2}Nk_B T$.

II.B. Le modèle de Van der Waals

19. C'est un modèle d'interactions de sphères dures. Ici $\alpha > 0$.

20. La densité particulaire n^* (nombre de particules par unité de volume) étant uniforme, il suffit de multiplier n^* par le volume compris entre r et $r + dr$, d'où :

$$dN = 4\pi r^2 n^* dr$$

Par définition $\bar{\epsilon}_1 = \int \epsilon_p dN$

Pour les bornes d'intégration, on prend pour borne inférieure $2r_0$ car aucune sphère ne peut se situer dans la sphère centrée en O. Pour la borne supérieure, comme $V \gg r_0^3$, on choisira ∞ . Ainsi :

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_1 &= -4\pi n^* \alpha \int_{2r_0}^{\infty} r^{-4} dr \\ \Rightarrow \bar{\epsilon}_1 &= -\frac{\pi n^* \alpha}{6r_0^3} \end{aligned}$$

21. U est la somme des énergies cinétique et potentielle, donc :

$$\begin{aligned} U &= \overline{E_c} + N\bar{\epsilon}_1 = \frac{Nk_B T}{\gamma-1} - \frac{N\pi n^* \alpha}{6r_0^3} \\ \Rightarrow U &= \frac{Nk_B T}{\gamma-1} - \frac{N^2 \pi \alpha}{6V r_0^3} \text{ car } n^* = N/V \end{aligned}$$

On identifie $a = \frac{\pi \alpha}{6r_0^3}$

22. L'entropie doit naturellement augmenter avec la température, ainsi $c > 0$.

23. A l'aide de l'identité thermodynamique de l'énoncé, on peut écrire que $\frac{\partial U}{\partial S}|_V = T$. Or $\frac{\partial U}{\partial S}|_V = \frac{\partial U}{\partial T}|_V \frac{\partial T}{\partial S}|_V$. Calculons ces deux dérivées partielles :

$$\frac{\partial U}{\partial T}|_V = \frac{Nk_B}{\gamma-1} \text{ et } \frac{\partial T}{\partial S}|_V = \frac{T}{Nk_B c}$$

Remarque : Pour calculer $\frac{\partial T}{\partial S}|_V$, soit on isole T dans l'expression de l'entropie de l'énoncé, soit on écrit $\frac{\partial T}{\partial S}|_V = (\frac{\partial S}{\partial T}|_V)^{-1}$ et dériver l'expression de S de l'énoncé.

Ainsi, en remplaçant dans l'équation $\frac{\partial U}{\partial S}|_V = T$, on obtient, après simplification :

$$c = \frac{1}{\gamma-1}$$

Pour déterminer la pression P , à l'aide de l'identité thermodynamique, on a :

$$-P = \frac{\partial U}{\partial V}|_S = \frac{Nk_B}{\gamma-1} \frac{\partial T}{\partial V}|_S + \frac{N^2 a}{V^2}$$

Or, à l'aide de l'expression de l'entropie, on peut écrire $T = T_0 \left(\frac{V_0 - u}{V - u}\right)^{1/c} \exp\left(\frac{S - S_0}{k_B N c}\right)$ donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial V}|_S &= \frac{-T}{c(V-u)} \\ \Rightarrow P &= \frac{Nk_B T}{V-u} - \frac{N^2 a}{V^2} \end{aligned}$$

Remarque : Il faut faire attention dans les calculs de dérivées à bien faire attention à ce qui est constant ou non !

Si vous avez la question **24.**, je suis preneur :) !

FIN DU CORRIGÉ