Inégalité de log-Sobolev pour la gaussienne

Notations et résultats admis

— Soit la fonction φ définie sur $\mathbf{R}$ par $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.

— Pour $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, on pose $C^k(\mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions de classe C^k sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$.

— On note $CL(\mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ à croissance lente, c'est-à-dire :

$$CL(\mathbf{R}) = \left\{ f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ \exists C > 0,\ \exists k \in \mathbf{N} \text{ tel que pour tout } x \in \mathbf{R},\ |f(x)| \leq C\left(1 + |x|^k\right) \right\}.$$

— On note $L^1(\varphi) = \{ f \in C^0(\mathbf{R}),\ f\varphi \text{ intégrable sur } \mathbf{R} \}$.

— Soit $t \in \mathbf{R}_+$. Pour une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, on définit si cela est possible la fonction $P_t(f)$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad P_t(f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}\, y\right) \varphi(y)\, dy.$$

— Pour f deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$, on définit sur $\mathbf{R}$ la fonction $L(f)$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad L(f)(x) = f''(x) - x f'(x).$$

— Une fonction $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est dite fonction polynomiale en $|x|$ s'il existe $d \in \mathbf{N}$ et des réels $a_0, \ldots, a_d$ tels que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $P(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k |x|^k$.

— Soient $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ une fonction et $\ell \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$. On admet que $\lim_{t \to +\infty} f(t) = \ell$ si, et seulement si, pour toute suite $(t_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de réels positifs telle que $\lim_{n \to +\infty} t_n = +\infty$, on a $\lim_{n \to +\infty} f(t_n) = \ell$.

Partie 1 : Résultats préliminaires

1 ▷ Montrer que toute fonction majorée en valeur absolue par une fonction polynomiale en $|x|$ est à croissance lente.

2 ▷ Montrer que $C^0(\mathbf{R}) \cap CL(\mathbf{R}) \subset L^1(\varphi)$.

On admet dans toute la suite du problème que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

3 ▷ Montrer que $CL(\mathbf{R})$ est un espace vectoriel. Montrer aussi que $CL(\mathbf{R})$ est stable par produit.

4 ▷ Soit $t \in \mathbf{R}_+$. Vérifier que la fonction $P_t(f)$ est bien définie pour $f \in C^0(\mathbf{R}) \cap CL(\mathbf{R})$ et vérifier que P_t est linéaire sur $C^0(\mathbf{R}) \cap CL(\mathbf{R})$.

5 ▷ Montrer que pour tout $f \in C^0(\mathbf{R}) \cap CL(\mathbf{R})$ et tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\lim_{t \to +\infty} P_t(f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,\varphi(y)\,\mathrm{d}y.$$

6 ▷ Soit $t \in \mathbf{R}_+$. Montrer que si $f \in C^0(\mathbf{R}) \cap CL(\mathbf{R})$, alors $P_t(f) \in C^0(\mathbf{R})$. Montrer aussi que $P_t(f)$ est majorée en valeur absolue par une fonction polynomiale en $|x|$ indépendante de t. En déduire que $P_t(f) \in L^1(\varphi)$.

On admettra dans toute la suite du problème que, si $f \in C^0(\mathbf{R}) \cap CL(\mathbf{R})$, alors

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} P_t(f)(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

7 ▷ Montrer que pour toutes fonctions $f, g \in C^2(\mathbf{R})$ telles que les fonctions f, f', f'' et g soient à croissance lente, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L(f)(x)\,g(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,g'(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Partie 2 : Dérivée de $P_t(f)$

Pour $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et $x \in \mathbf{R}$, on note, si cela a un sens, $\dfrac{\partial P_t(f)(x)}{\partial t}$ la dérivée de la fonction $t \in \mathbf{R}_+ \mapsto P_t(f)(x)$.

Pour $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et $t \in \mathbf{R}_+$ fixé, on note, si cela a un sens, $P_t(f)'$ (resp. $P_t(f)''$) la dérivée de $x \in \mathbf{R} \mapsto P_t(f)(x)$ (resp. la dérivée seconde de $x \in \mathbf{R} \mapsto P_t(f)(x)$).

8 ▷ Montrer que si $f \in C^1(\mathbf{R}) \cap CL(\mathbf{R})$ telle que $f' \in CL(\mathbf{R})$ et $x \in \mathbf{R}$, alors $t \in \mathbf{R}_+ \mapsto P_t(f)(x)$ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+^*$ et montrer que pour tout $t > 0$, on a

$$\frac{\partial P_t(f)(x)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-x\mathrm{e}^{-t} + \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}} y\right) f'\left(\mathrm{e}^{-t}x + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}y\right) \varphi(y)\, \mathrm{d}y.$$

9 ▷ Soient $f \in C^2(\mathbf{R}) \cap CL(\mathbf{R})$ telle que f' et f'' soient à croissance lente et $t \in \mathbf{R}_+$. Montrer que $x \in \mathbf{R} \mapsto P_t(f)(x)$ est de classe C^2 sur $\mathbf{R}$. Montrer aussi que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad P_t(f)'(x) = \mathrm{e}^{-t} \int_{-\infty}^{+\infty} f'\left(\mathrm{e}^{-t}x + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}y\right) \varphi(y)\, \mathrm{d}y$$

et

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad P_t(f)''(x) = \mathrm{e}^{-2t} \int_{-\infty}^{+\infty} f''\left(\mathrm{e}^{-t}x + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}y\right) \varphi(y)\, \mathrm{d}y.$$

10 ▷ En déduire que pour $f \in C^2(\mathbf{R}) \cap CL(\mathbf{R})$ telle que f' et f'' soient à croissance lente, on a

$$\forall t \in \mathbf{R}_+^*, \forall x \in \mathbf{R}, \quad \frac{\partial P_t(f)(x)}{\partial t} = L(P_t(f))(x).$$

Partie 3 : Inégalité de log-Sobolev pour la gaussienne

Pour $f \in C^0(\mathbf{R}) \cap CL(\mathbf{R})$ à valeurs strictement positives telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\, \mathrm{d}x = 1,$$

on définit l'entropie de f par rapport à φ par :

$$\mathrm{Ent}_\varphi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(f(x)) f(x) \varphi(x)\, \mathrm{d}x.$$

Dans la suite de cette partie, f est un élément de $C^2(\mathbf{R})$ à valeurs strictement positives tel que les fonctions f, f', f'' et $\dfrac{f'^2}{f}$ soient à croissance lente. On suppose aussi que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\, \mathrm{d}x = 1$.

11 ▷ Étudier les variations de la fonction $t \mapsto t\ln(t)$ sur $\mathbf{R}_+^*$. On vérifiera que l'on peut prolonger par continuité la fonction en 0.

12 ▷ Justifier que la quantité $\mathrm{Ent}_\varphi(g)$ est bien définie pour tout $g \in C^0(\mathbf{R}) \cap CL(\mathbf{R})$ à valeurs strictement positives telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Indication : On pourra utiliser la question 11.

13 ▷ Pour $t \in \mathbf{R}_+$, on pose $S(t) = \mathrm{Ent}_\varphi(P_t(f))$. Justifier que $S(t)$ est bien définie.

14 ▷ Montrer que S est continue sur $\mathbf{R}_+$.

Indication : On pourra au préalable montrer que, si $x \in \mathbf{R}$, $t \mapsto P_t(f)(x)$ est continue sur $\mathbf{R}_+$.

15 ▷ Vérifier que l'on a $S(0) = \mathrm{Ent}_\varphi(f)$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} S(t) = 0$.

16 ▷ On **admet** que S est de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+^*$ et que

$$\forall t \in \mathbf{R}_+^*, \quad S'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial P_t(f)(x)}{\partial t}\left(1 + \ln\left(P_t(f)(x)\right)\right)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Montrer que

$$\forall t \in \mathbf{R}_+^*, \quad S'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} L(P_t(f))(x)\left(1 + \ln\left(P_t(f)(x)\right)\right)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

17 ▷ En admettant que le résultat de la question 7 est valable pour les fonctions $P_t(f)$ et $1 + \ln(P_t(f))$, montrer que

$$\forall t \in \mathbf{R}_+^*, \quad -S'(t) = \mathrm{e}^{-2t}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_t(f')(x)^2}{P_t(f)(x)}\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

18 ▷ En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que

$$\forall t \in \mathbf{R}_+^*, \quad -S'(t) \leq \mathrm{e}^{-2t}\int_{-\infty}^{+\infty} P_t\left(\frac{f'^2}{f}\right)(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

19 ▷ En déduire que l'on a :

$$\forall t \in \mathbf{R}_+^*, \quad -S'(t) \leq \mathrm{e}^{-2t}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'^2(x)}{f(x)}\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

20 ▷ Établir l'inégalité suivante

$$\mathrm{Ent}_\varphi(f) \leq \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'^2(x)}{f(x)}\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

FIN DU PROBLÈME

IMPRIMERIE NATIONALE – D'après documents fournis