Correction Maths 2 Mines Ponts

Tommy Deswarte

Juillet 2024

1)

- (1)
- $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

2)
Soit Hune matrice de Hadamard
Quitte à considérer la transposée (qui reste de hadamard), on démontre les résultats sur les lignes.

Multiplier une ligne i par -1 revient à considérer L_iH où $L_i = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$ avec -1 à ligne i.

On a :
$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
\left\langle (\frac{1}{\sqrt{n}}L_iH)x | (\frac{1}{\sqrt{n}}L_iH)y \right\rangle &= \mathrm{Tr}({}^t(\frac{1}{\sqrt{n}}L_iHx)\frac{1}{\sqrt{n}}L_iHy) \\
&= \mathrm{Tr}(\frac{1}{\sqrt{n}}^t x \frac{1}{\sqrt{n}}^t H({}^tL_iL_i)Hy) \\
&= \mathrm{Tr}(\frac{1}{\sqrt{n}}^t x^t H(I_n)\frac{1}{\sqrt{n}}Hy) \\
&= \mathrm{Tr}({}^t(\frac{1}{\sqrt{n}}Hx)\frac{1}{\sqrt{n}}Hy) \\
&= \left\langle \frac{1}{\sqrt{n}}Hx | \frac{1}{\sqrt{n}}Hy \right\rangle \\
&= \langle x|y \rangle
\end{aligned}$$

De la même manière, échanger deux lignes revient à considérer $M_{i,j}H$

où $M_{i,j} = \begin{pmatrix} I_p & & & & \\ & 0 & \cdots & 1 & \\ & \vdots & I_m & \vdots & \\ & 1 & \cdots & 0 & \\ & & & & I_q \end{pmatrix}$

Et on a également :

$$\begin{aligned}
\left\langle (\frac{1}{\sqrt{n}}M_{i,j}H)x | \frac{1}{\sqrt{n}}(M_{i,j}H)y \right\rangle &= \mathrm{Tr}({}^t(\frac{1}{\sqrt{n}}M_{i,j}Hx)\frac{1}{\sqrt{n}}M_{i,j}Hy) \\
&= \mathrm{Tr}({\frac{1}{\sqrt{n}}}^t\, x^t H({}^t M_{i,j}\frac{1}{\sqrt{n}}M_{i,j})Hy) \\
&= \mathrm{Tr}({\frac{1}{\sqrt{n}}}^t\, x^t H(I_n)\frac{1}{\sqrt{n}}Hy) \\
&= \mathrm{Tr}({\frac{1}{\sqrt{n}}}^t\,(Hx)\frac{1}{\sqrt{n}}Hy) \\
&= \left\langle \frac{1}{\sqrt{n}}Hx | \frac{1}{\sqrt{n}}Hy \right\rangle \\
&= \langle x|y\rangle
\end{aligned}$$

Ainsi, $\frac{1}{\sqrt{n}}M_{i,j}H$ et $\frac{1}{\sqrt{n}}L_iH$ sont orthogonales puis de Hadamard.

3) Il suffit de multiplier toutes les colonnes avec comme première coordonnée
-1 par -1 pour obtenir la première ligne égale à 1 (ce qui conserve la nature de la matrice de Hadamard par 2)).

Soit $L_i = (l_{i,1}, \dots, l_{i,n})$ une ligne distincte de la première (licite car $n \geq 2$) de H.
Les lignes étant orthogonales entre elles, on a :
$\langle L_i|(1,\dots,1)\rangle = 0$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} l_{i,k} = 0, \forall k \in [\![1,n]\!]\ l_{i,k} \in \{-1,1\}$.
Donc n est pair sinon la somme ne peut pas valoir zéro.

4) Échanger des lignes, des colonnes ou en multiplier par -1
ne change pas l'ordre de la matrice et conserve son statut de Hadamard.
On peut donc supposer sa première ligne avec que des 1.
Aussi, comme c'est une matrice orthogonale, sa deuxième ligne est orthogonale à la première.
Puis, en premutant les colonnes pour mettre les 1 en première position puis les
-1 à la suite, on obtient une matrice avec une première ligne constituée de 1 et une deuxième ligne constituée de $n/2$ 1 et $n/2$ -1. On obtient la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & -1 & \cdots & -1 \\ & & & & & \\ (l_{i,1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & l_{i,n}) \\ & & & & & \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\hphantom{1 \quad \cdots \quad 1}}_{n/2}$$

On veut montrer que les n/2 premiers 1 sont en nombre pairs.
On reprends les mêmes notations et on choisit une ligne L_i qui doit être orthogonale aux deux premières.

Ce qui donne : $\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{n/2} l_{i,k} + \sum_{k=n/2+1}^{n} l_{i,k} = 0 & (1) \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n/2} l_{i,k} - \sum_{k=n/2+1}^{n} l_{i,k} = 0 & (2) \end{cases} \quad , \forall k \in [\![1, n]\!],\ l_{i,k} \in \{-1, 1\}.$

$(1) + (2) \implies \displaystyle\sum_{k=1}^{n/2} l_{i,k} = 0$ donc n/2 est pair car $l_{i,k} \in \{-1, 1\}$

Finalement, n est un multiple de 4.

5) Par le théorème spectral, f est diagonalisable en base orthonormée.

6)Par le théorème de Grassman,

$$\begin{aligned} \dim(S_k \cap T_k) &= \dim(S_k) + \dim(T_k) - \dim(\mathbb{R}^n) \\ &= n - k + 1 + k - n \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{S_k \cap T_k \neq \{0\}}$

7) Soit $x \in S_k \cap T_k,$ on a $x = \displaystyle\sum_{i=k}^{n} \langle x|e_i\rangle\, e_i$ tel que $\|x\| = 1.$

$$\begin{aligned}
\langle x|f(x)\rangle &= \left\langle \sum_{i=k}^{n} \langle x|e_i\rangle\, e_i | f\big(\sum_{i=k}^{n} \langle x|e_i\rangle\, e_i\big) \right\rangle \\
&= \sum_{i=k}^{n}\sum_{j=k}^{n} \langle x|e_i\rangle \langle x|e_j\rangle \underbrace{\langle e_i|f(e_j)\rangle}_{\langle e_i|\lambda_j e_j\rangle} \\
&= \sum_{i=k}^{n}\sum_{j=k}^{n} \langle x|e_i\rangle \langle x|e_j\rangle \lambda_j \underbrace{\langle e_i|e_j\rangle}_{\delta_{i,j}} \\
&= \sum_{i=k}^{n} \langle x|e_i\rangle^2 \lambda_i \\
&\geq \lambda_k \underbrace{\sum_{i=k}^{n} \langle x|e_i\rangle^2}_{\|x\|^2=1}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\max_{x\in S_k\ \|x\|=1} \{\langle x|f(x)\rangle\} \geq \lambda_k}$

8) On considère $S = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k) \in \pi_k$.
Soit $x \in S$, on a $S \cap T_k = \mathrm{Vect}(e_k)$ donc $\max_{x\in S\ \|x\|=1} \{\langle x|f(x)\rangle\} = \langle e_k|f(e_k)\rangle = \lambda_k$.
Donc $\min_{S\in\pi_k} \left\{ \max_{x\in S\ \|x\|=1} \{\langle x|f(x)\rangle\} \right\} \leq \lambda_k$.
Or $\forall S \in \pi_k$, $\max_{x\in S\ \|x\|=1} \{\langle x|f(x)\rangle\} \geq \lambda_k$ (indépendant de S).
λ_k est donc un minorant de $\max_{x\in S\ \|x\|=1} \{\langle x|f(x)\rangle\}$ et finalement :
$\min_{S\in\pi_k} \left\{ \max_{x\in S\ \|x\|=1} \{\langle x|f(x)\rangle\} \right\} \geq \lambda_k$.
Il en résulte alors que $\boxed{\lambda_k = \min_{S\in\pi_k} \left\{ \max_{x\in S\ \|x\|=1} \{\langle x|f(x)\rangle\} \right\}}$

9) M est diagonalisable en base orthonormée et on peut écrire :

$$M =^t P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} P$$

Comme M est positive, 8) $\implies \forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_k \geq 0$

On peut donc poser $A = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$ puis $B = AP$.

et on a bien $\boxed{M =^t BB}$.

Si désormais M admet une unique valeur propre λ_1 positive de vecteur propre u, alors la matrice de passage ${}^tP$ est de la forme :
$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} & Q \end{pmatrix}$ avec $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$.
On a

$$M =^t P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} P$$

$$=^t P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} P \ + \ {}^tP \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} P$$

$$= \lambda_1 u.{}^tu -^t P \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \underbrace{-\lambda_2}_{\geq 0} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \underbrace{-\lambda_n}_{\geq 0} \end{pmatrix} P$$

On pose le même type de matrice B que tout à l'heure et on obtient :
$\boxed{M = \lambda_1 u.{}^tu -^t BB}$.

10) Soit p l'endomorphisme canoniquement associé à P.
On a clairement ${}^tP = P$ donc P est symétrique.
De plus, on a $Pe = (I_n - \dfrac{1}{n}e^te)e = e - \dfrac{1}{n}e\underbrace{\|e\|^2}_{n} = 0$

Aussi $\forall x \in \text{Vect}(e)^\perp,\ Px = (I_n - \dfrac{1}{n}e^te)x = x - \dfrac{1}{n}e\underbrace{\langle e|x\rangle}_{0} = x$.

p est donc la projection orthogonale sur $\text{Vect}(e)^\perp$.

11) $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ d(A_i,A_j)^2 = \|x_i - x_j\|^2 = \|x_i\|^2 + \|x_j\|^2 - 2\langle x_i|x_j\rangle$.

$$*)\ C^te = \begin{pmatrix} \|x_1\|^2 \\ \vdots \\ \|x_n\|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|x_1\|^2 & \cdots & \|x_1\|^2 \\ \vdots & & \vdots \\ \|x_n\|^2 & \cdots & \|x_n\|^2 \end{pmatrix}$$

$$*)e^tC = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \|x_1\|^2 & \cdots & \|x_n\|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|x_1\|^2 & \cdots & \|x_n\|^2 \\ \vdots & & \vdots \\ \|x_1\|^2 & \cdots & \|x_n\|^2 \end{pmatrix}$$

$$*)^tM_AM_A=\begin{pmatrix}\overbrace{\langle x_1|x_1\rangle}^{\|x_1\|^2} & \cdots & \langle x_1|x_n\rangle\\ \vdots & & \vdots\\ \langle x_n|x_1\rangle & \cdots & \underbrace{\langle x_n|x_n\rangle}_{\|x_n\|^2}\end{pmatrix}$$

Donc $\boxed{D=C^te+e^tC-2^tM_AM_A.}$

On a :

$$\begin{aligned}T(D)&=-\frac{1}{2}PDP\\&=-\frac{1}{2}(PC^teP+Pe^tCP-2P^tM_AM_AP)\\&=-\frac{1}{2}(PC^t(\underbrace{Pe}_{0})+(\underbrace{Pe}_{0})^tCP-2^t(M_AP)M_AP)\\&=^t(M_AP)M_AP\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall x\in\mathbb{R}^n,\ {}^txT(D)x=^t(M_APx)M_APx=\|M_APx\|^2\geq 0.$

Donc $\boxed{T(D)\text{ est positive.}}$

Et $\boxed{T(D)e=^t(M_AP)M_A(\underbrace{Pe}_{0})=0.}$

Donc $\boxed{T(D)\in\Omega_n.}$

12) D'après 9), $\exists B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A=^tBB.$

Soit $(e_1,\ldots,e_n)$ la base canonique.

On a $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2, A[i,j]=^te_iAe_j=^t(Be_i)Be_j=\langle Be_i|Be_j\rangle$

Aussi

$$\begin{aligned}K(A)[i,j]=(e^ta+a^te-2A)[i,j]&=A[i,i]+A[j,j]-2A[i,j]\\&=\|Be_i\|^2+\|Be_j\|^2-2\langle Be_i|Be_j\rangle\\&=\|Be_i-Be_j\|^2\end{aligned}$$

En notant $(B_1,\ldots,B_n)$ les points dont les vecteurs associés sont les $Be_i,$ on obtient que $\boxed{K(A)\text{ est la MDE ces points.}}$

13) On remarque d'abord que $T\circ K$ est bien définie par 11) et 12).

Soit $A\in\Omega_n,$

$$\begin{aligned}T(K(A))&=-\frac{1}{2}P(a^te+e^ta-2A)P\\&=-\frac{1}{2}(Pa^teP+Pe^taP-2PAP)\\&=-\frac{1}{2}(Pa^t(\underbrace{Pe}_{0})+(\underbrace{Pe}_{0})^taP-2PAP)\\&=A\end{aligned}$$

Donc $\boxed{T \circ K = id_{\Omega_n}}$

14) Soit D une matrice d'ordre n à coefficients positifs ou nuls et à coefficients diagonaux nuls.
($\Longrightarrow$) Supposons que D soit MDE, alors $D \in \Delta_n$ et $T(D) = -\dfrac{1}{2}PDP \in \Omega_n$.
Donc $\boxed{-\dfrac{1}{2}PDP \text{ est positive.}}$
($\Longleftarrow$) Supposons que $-\dfrac{1}{2}PDP$ est positive. On a $K(T(D)) = K(-\dfrac{1}{2}PDP) =$ D par 13).
Or $T(D) \in \Omega_n$, donc $K \circ T(D) = D \in \Delta_n$. $\boxed{\text{Et ainsi } D \text{ est } MDE.}$

15) Soit M une matrice symétrique à coefficients positifs, non nulle et de diagonale nulle, ayant une unique valeur propre λ strictement positive d'espace propre de dimension 1.
Par 9), on a : $M = \lambda e^t e -^t BB$ avec $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$T(M) = -\dfrac{1}{2}PMP = -\dfrac{1}{2}P(\lambda e^t e -^t BB)P = -\dfrac{1}{2}\lambda(\underbrace{Pe}_{0})^t e + \dfrac{1}{2}P^t BBP =$ $\dfrac{1}{2}{}^t(BP)BP$.
Or, $\forall x \in \mathbb{R}^n, {}^t x(-\dfrac{1}{2}PMP)x = \dfrac{1}{2}{}^t(BPx)BPx = \dfrac{1}{2}\|BPx\|^2 \geq 0$.
Donc $-\dfrac{1}{2}PMP$ est positive.
Par 14) , $\boxed{M \text{ est MDE.}}$

16) Soit D une MDE, tous les coefficients diagonaux d'une MDE sont nuls.
Tr est un invariant de similitude et D est symétrique réelle donc diagonalisable.
D'où $\boxed{\operatorname{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0.}$

17) Soit $x \in \operatorname{Vect}(e)^\perp$, on a $Px = x$ par 10), d'où :
${}^t xDx = {}^t(Px)D(Px) = \boxed{{}^t x(PDP)x \leq 0}$ car D est MDE et 14) $\Longrightarrow -\dfrac{1}{2}PDP$ est positive et donc PDP est négative. D'où le résultat.

18) Soit $S = \operatorname{Vect}(e)^\perp$, par 7) on a : $\boxed{\lambda_{n-1} \leq \max_{x \in S}\{\langle x|Dx\rangle\} \leq 0}$ (par 17)).
$\lambda_1 \leq \dots \lambda_{n-1} \leq 0$. Ainsi, $\lambda_n \geq 0$ car $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i = 0$. Maintenant, si $\lambda_n = 0$.
Alors $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $\lambda_i = 0$ et comme D est diagonalisable, $D = 0$ (absurde).

Donc $\boxed{\lambda_n > 0}$.

19) ${}^tD = {}^t({}^tU\Lambda U) = {}^tU\Lambda U = D$ donc $\boxed{D \text{ est symétrique.}}$
$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$
\begin{aligned}
nD[i,j] = n{}^te_iDe_j &= n{}^t(Ue_i)\Lambda Ue_j \\
&= n{}^t\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \begin{pmatrix} u_{1,i} \\ \vdots \\ u_{n,i} \end{pmatrix} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_n & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ \vdots \\ u_{n,j} \end{pmatrix} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\
&= n\sum_{k=1}^{n} \lambda_{n-k+1}u_{k,i}u_{k,j} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n-k+1}h_{k,i}h_{k,j} \\
&= \sum_{k=2}^{n} \lambda_{n-k+1}h_{k,i}h_{k,j} + \lambda_n \underbrace{h_{1,i}h_{1,j}}_{1} \\
&= \sum_{k=2}^{n} \lambda_{n-k+1}h_{k,i}h_{k,j} - \sum_{k=2}^{n} \lambda_{n-k+1} \\
&= \sum_{k=2}^{n} \underbrace{\lambda_{n-k+1}}_{\leq 0}\underbrace{(h_{k,i}h_{k,j} - 1)}_{\leq 0} \\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

De la même manière, $nD[i,i] = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n-k+1}h_{k,i}^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n-k+1} = 0$

${}^tU$ est inversible et D est semblable à une matrice diagonale donc diagonalisable donc ses valeurs propres sont les coefficients diagonaux.
$\lambda_1, \ldots \lambda_{n-1}$ sont racines du polynôme caractéristique de D comptés avec multiplicité.
Donc λ_n est de multiplicité 1
D'où $\boxed{\dim(Ker(D - \lambda_n I_n)) = 1}$.

20) Le premier vecteur colonne de ${}^tU$ est e donc e est le vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_n > 0$ dont le sous espace propre est de dimension 1.
La question 19) et cet argument permettent d'utiliser 15) et de dire que $\boxed{D \text{ est MDE}}$.

21) $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
est de Hadamard avec que des 1 sur la première ligne.

D'après ce qui précède $M =^t \left(\frac{1}{2}H\right) \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{2}H = \boxed{\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}}$