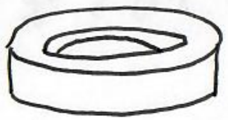
Mines-Ponts - Physique I filière PC, 2024
~ Analyse physique d'un spa ~

Proposition de corrigé. H. Rondin-Khouya

I Installation du spa

A 1) On assimile le spa à un tore de section carrée.



$$V = H \times \pi \frac{d_{ext}^2}{4} - \pi \frac{d_{int}^2}{4}$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi H}{4}\left(d_{ext}^2 - d_{int}^2\right)$$

Il faut $t_g = 10$ min pour gonfler le spa

D'où $D_p = \frac{V}{t_g}$

$$\Rightarrow D_p = \frac{3\times 1}{4\times 10\times 60}(4-2) = \frac{3\times 2}{4\times 10\times 60} = \frac{1}{4\times 10\times 10}$$

$$\Rightarrow D_p = 0{,}25\times 10^{-2}\ m^3.s^{-1} \quad \text{et} \quad 1\,m^3 = 1000\,L$$

$$\Rightarrow \boxed{D_p = 2{,}5\ L.s^{-1}}$$

2) L'air est un gaz parfait.

$$\left.\begin{array}{l} P_i V = n_i RT \\ \Rightarrow \underbrace{(P_i + \delta P)}_{P_f} = \underbrace{(n_i + \delta n)}_{n_f} RT \end{array}\right\} \text{T et V fixés}$$

et $\delta n = \frac{1}{V_m} \underbrace{D_p\, dt}_{= dV \text{ petit volume}}$ avec $V_m = 24$ L/mol le volume molaire.

$$\left.\begin{array}{ll} n_i = \frac{P_i V}{RT} & (1) \\ n_f = \frac{P_f V}{RT} = n_i + \delta n & (2) \end{array}\right\} (2)-(1) \Rightarrow \delta n = \frac{V}{RT}(P_f - P_i)$$

$$\Rightarrow \delta n = \frac{V}{RT}\delta P$$

$$\Rightarrow \frac{1}{V_m} D_p\, dt = \frac{V}{RT}\delta P$$

$$\Rightarrow \boxed{dt = \frac{V V_m}{R T D_p}\delta P} \qquad T \simeq 300\,K$$

AN : $dt = \frac{6 \times 24 \times 0{,}1 \times 10^5 \times 2}{8\times 300\times 5} = \frac{6000 \times 24 \times 0{,}1 \times 10^2}{8\times 300 \times 5}$

$$\Rightarrow dt = \frac{\cancel{8} \times 24 \times 0{,}1 \times 10^2}{\cancel{8}}$$

$$\Rightarrow dt \simeq 240\,s$$

3) Cette fois-ci, il n'y a pas de nouveau débit entrant dans le spa.

$$\left.\begin{array}{l} P_i V_i = nRT_i \\ P_f V_f = nRT_f \end{array}\right\} P_{ext} \text{ et } V \text{ cts} \quad (P_f = P_i + \delta P,\ V_i = V_f)$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} P_i V = nRT_i & (1) \\ (P_i + \delta P)V = nR(T_i + \delta T) & (2) \end{array}\right.$$

$(2)-(1)$: $nR\delta T = \delta P V$

$$\Rightarrow \delta T = \frac{V}{nR}\delta P$$

et $nR = \frac{P_i V_i}{T_i}$ donc $\boxed{\delta T = \frac{T_i}{P_i}\delta P}$

AN : $\delta T = \frac{288 \times 0{,}1 \times \cancel{10^5}}{\cancel{10^5}}$

$$\Rightarrow \delta T \simeq 28{,}8\,K$$

B 4) $\Delta T = v_c \Delta t$

$\Rightarrow \Delta t = \dfrac{\Delta T}{v_c}$ AN : $\Delta t = \dfrac{20}{2}$

$\Rightarrow \Delta t = 10\,h$

Isolons l'eau :
On a, d'après le premier principe de la thermodynamique pour une phase condensée :

$$\Delta U = P_c \Delta t = m c_e \Delta T$$

D'où $\boxed{P_c = \dfrac{m c_e \Delta T}{\Delta t}}$

AN : $P_c = \dfrac{4{,}5\times10^3 \times 4{,}2\times10^3 \times 20}{10\times60\times60}$ ≈ 20

$\Rightarrow P_c = \dfrac{400\times10^6}{3600\times10}$

$\Rightarrow P_c \simeq \dfrac{1{,}1\times10^6}{10^2}$

$\Rightarrow P_c \simeq 11\ kW$

($m = \rho V_{int}$

avec $V_{int} = \pi h_e \times \dfrac{d_{int}^2}{4}$

$\Rightarrow m \simeq 3\times \dfrac{3\times2}{4}\times1000$

$\Rightarrow m \simeq 4{,}5\times10^3\ kg$)

→ Il y a un facteur 4 entre les deux valeurs.
→ Ceci est explicable grâce au fait qu'il y a des pertes thermiques

5) Le Soleil est le plus efficace lorsqu'il est au zénith. Donc aux alentours de 12h.
→ Les rayons sont orthogonaux à la surface de la Terre

6) L'onde EM issue du Soleil est composée de photons.
L'onde est plane progressive harmonique (elle satisfait d'ailleurs l'équation de d'Alembert)
↳ Cette forme est donc cohérente.

Par définition, $\vec{p} = q\vec{NP}$ où $\vec{NP}$ est le vecteur séparant le barycentre des charges positives et le barycentre des charges négatives.
↳ L'OEM excite l'électron qui rentre en oscillation forcée (force : $q\vec{E} = qE_0 \cos(\omega(t - x/c))\,\vec{e_y}$)
↳ Apparition d'une polarisation car $\vec{NP}$ oscille !

↳ ω_0 est la pulsation de résonance.

7) Par définition, $\mathcal{E}_W(x) = \langle P_s(x)\rangle = \langle \|\vec{\Pi}\|\rangle$

avec $P_s(x) = \Big\| \underbrace{\dfrac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}}_{=\vec{\Pi}} \Big\|$ la norme du vecteur de Poynting

Le bilan d'énergie électromagnétique donne

$$\underbrace{\frac{\partial u_{em}}{\partial t}}_{=0 \text{ en RP}} + \mathrm{div}(\vec{\Pi}) = \underbrace{-nP}_{\text{puissance volumique transmise aux molécules d'air}}$$

$\Rightarrow \left\langle \dfrac{\partial \Pi}{\partial x} \right\rangle = -nP$

$\Rightarrow \dfrac{\partial \langle \Pi\rangle}{\partial x} = -nP$

Or $\vec{\pi} = \dfrac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \dfrac{E_0\cos(\omega t - kx)\,\vec{e_z}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$

Dans le vide, $\vec{rot}(\vec{E}) = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ (Maxwell - Faraday)

$(k = \dfrac{\omega}{c})$

$\Leftrightarrow -j\vec{k}\wedge\vec{E} = -j\omega\vec{B}$

$\Leftrightarrow \vec{B} = \dfrac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{\omega} \overset{(Re)}{\Rightarrow} \dfrac{1}{c}\vec{e_x}\wedge E_0\cos(\omega t - kx)\vec{e_z}$

$\Leftrightarrow \vec{B} = -\dfrac{E_0}{c}\cos(\omega t - kx)\,\vec{e_y}$

D'où $\vec{\pi} = \dfrac{-E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t - kx)\,\vec{e_z}\wedge\vec{e_y}$

$\Leftrightarrow \vec{\pi} = \dfrac{E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t - kx)\,\vec{e_x} \Rightarrow \langle\|\vec{\pi}\|\rangle = \dfrac{E_0^2}{2\mu_0 c}$

Et $P = \dfrac{p_0^2\omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3}$, $p_0 = \dfrac{e^2E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$

Donc $P = \dfrac{e^4\omega^4}{12\pi m^2\varepsilon_0 c^3 m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2}E_0^2$

$\Leftrightarrow P = \dfrac{e^4\cancel{\omega^4}}{12\pi m^2\varepsilon_0 c^3\cancel{\omega^4}\left(1-\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2}\times 2\mu_0 c\langle\|\vec{\pi}\|\rangle$

Or $\dfrac{\mu_0 c}{\varepsilon_0 c^3} = \dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0 c^2}$ et $\dfrac{1}{c^2} = \varepsilon_0\mu_0$

$= \dfrac{\cancel{\varepsilon_0}\mu_0\times\mu_0}{\cancel{\varepsilon_0}} = \mu_0^2$

$\Leftrightarrow P = \dfrac{\mu_0^2 e^4}{6\pi m^2(1-K^2)^2}\langle\|\vec{\pi}\|\rangle$

D'où $\dfrac{\partial\langle\pi\rangle}{\partial x} = -\dfrac{n\mu_0^2e^4}{6\pi m^2(1-K^2)^2}\langle\pi\rangle$ $= 1/H_\omega$

$\Rightarrow \langle\pi\rangle = \langle\pi(0)\rangle\exp(-x/H_\omega)$

$$\boxed{\Rightarrow \mathcal{E}_\omega(x) = \mathcal{E}_\omega(0)\exp(-x/H_\omega) \quad \text{où} \quad H_\omega = \dfrac{6\pi m^2(1-K^2)^2}{n\mu_0^2e^4}}$$

$[H_\omega] = \left(\dfrac{L^{-3}\times\cancel{M^2}.L^2.\cancel{A^{-4}}.\cancel{T^{-4}}.\cancel{A^4}.\cancel{T^4}}{\cancel{M^2}}\right)^{-1}$

$\Rightarrow [H_\omega] = (L^{-1})^{-1} = L$ OK !

8) Loi de Wien : $\lambda_{max}T_S = 2900\ \mu m.K$

Or $K = \dfrac{\omega_0}{\omega}$ et $\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi c}{\lambda_{max}}$

$\Rightarrow K = \dfrac{\lambda_{max}\omega_0}{2\pi c}$

$\lambda_{max} = \dfrac{2900}{5800}\mu m = 0{,}5\ \mu m = 500\ nm$ (jaune)

Donc $K = \dfrac{500\times10^{-9}\times 4{,}3\times10^{16}}{6\times 3{,}0\times10^8}$

$\Rightarrow K \simeq \dfrac{5\times4{,}3}{18}\times10^{-1} \simeq \dfrac{0{,}5\times4{,}3}{18} \simeq 0{,}05$

Le terme $(1-K^2)^2$ vaut à peu près 1

Sachant que $V_m = 24$ L/mol pour l'air,

il vient $n = \frac{\mathcal{N}_A}{V_m}$ $\left(\frac{\text{nbr/mol}}{\text{L/mol}}\right)$

$$\Rightarrow n = \frac{6{,}02\times10^{23}}{24{,}0\times10^{-3}} \simeq \frac{1}{6}\times10^{26}\ \text{m}^{-3}$$

$$\Rightarrow n \simeq 10^{25}\ \text{m}^{-3} \quad (\text{ODG})$$

D'où $$H_\omega \simeq \frac{6\times3\times(10^{-30})^2}{10^{25}\times4^2\times3^2\times10^{-14}\times2^4\times10^{-76}}$$

$$\Rightarrow H_\omega \simeq \frac{6\times\cancel{3}}{16^2\times3\times\cancel{3}}\times\frac{10^{-60}}{10^{11}\times10^{-76}}$$

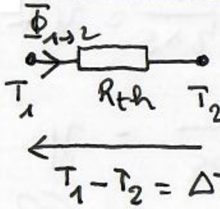
$$\Rightarrow H_\omega \simeq \frac{2}{16^2}\times10^{5}\ \text{m}$$

$$\Rightarrow \boxed{H_\omega \simeq 1\ \text{km}}$$

▷ Une augmentation d'altitude du spa ne changera rien.

(II) Utilisation du spa

[A] 1)



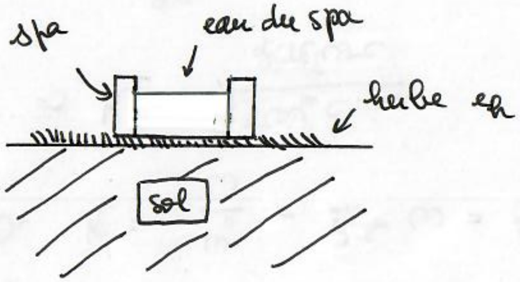
résistance thermique (K.W^{-1})

$$R_{th} = \frac{\Delta T}{\Phi_{1\to2}} \quad \text{où} \quad \Phi_{1\to2} = \iint_S \vec{j}_{th}\cdot d^2\vec{S}$$

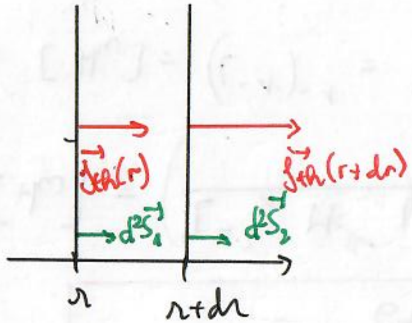
en régime stationnaire uniquement

en W

le flux thermique



En cylindrique en RP, on isole une {paroi verticale du spa} entre r et $r+dr$



$$d^2U = \delta^2Q + \underbrace{\delta^2W}_{=0} \quad (\text{phase condensée})$$

$$\delta^2Q = \iint_{S_1} \vec{j}_{th}(r)\cdot d^2\vec{S}_1\,dt - \iint_{S_2} \vec{j}_{th}(r+dr)\cdot d^2\vec{S}_2\,dt$$

$$\Rightarrow \delta^2Q = 2\pi r H\, j_{th}(r)\,dt - 2\pi(r+dr)H\, j_{th}(r+dr)\,dt$$

$$\Rightarrow \delta^2Q = -\frac{d}{dr}\left(r\, j_{th}(r)\right) dr\,dt \times 2\pi H$$

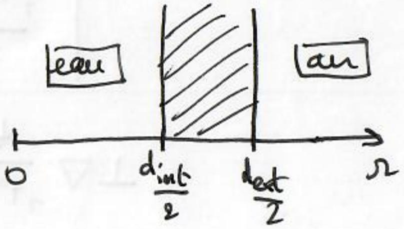
Loi de Fourier : $\vec{j}_{th} = -\lambda_a \times \vec{\text{grad}}(T)$

$= -\lambda_a \cdot \frac{dT}{dr}\vec{e_r}$ ici

invariance par rotation selon θ + transfert selon $\vec{e_r}$

D'où $\delta^2 Q = 2\pi H \lambda_{paroi} \dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dT}{dr}\right) dr\,dt$.

$\Rightarrow \delta^2 Q = 0 \Leftrightarrow \dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dT}{dr}\right) = 0$



$\Leftrightarrow r\dfrac{dT}{dr} = A$

$\Leftrightarrow \dfrac{dT}{dr} = \dfrac{A}{r}$

$$\Leftrightarrow \int_{T\left(\frac{d_{int}}{2}\right)}^{T(r)} dT' = A\int_{\frac{d_{int}}{2}}^{r}\frac{dr'}{r'}$$

$T\left(\frac{d_{int}}{2}\right) = T_{int}$ en ARQS

$$\Rightarrow T(r) = T_{int} + A\ln\left(\frac{r}{\frac{d_{int}}{2}}\right)$$

Et $T\left(\dfrac{d_{ext}}{2}\right) = T_{ext} = T_{int} + A\ln\left(\dfrac{d_{ext}}{\cancel{2}}\times\dfrac{\cancel{2}}{d_{int}}\right)$

$$\Rightarrow A = \frac{T_{ext}-T_{int}}{\ln\left(d_{ext}/d_{int}\right)}$$

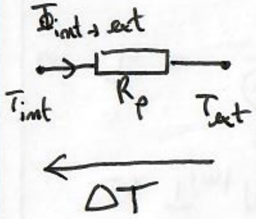
$$\boxed{\text{D'où } T(r) = T_{int} + \left(T_{ext}-T_{int}\right)\times\frac{\ln\left(2r/d_{int}\right)}{\ln\left(d_{ext}/d_{int}\right)}}$$

Et $\Phi_{int\to ext} = \displaystyle\iint_S \vec{j_{th}}\cdot d^2\vec{S}$

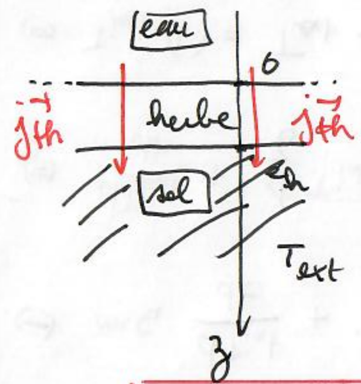
$= -\lambda_a \dfrac{dT}{dr}\times 2\pi r H$

$$\Leftrightarrow \Phi_{int\to ext} = \frac{T_{ext}-T_{int}}{\cancel{r}\ln\left(d_{ext}/d_{int}\right)}\times(-\lambda_a)\times 2\pi\cancel{r}H$$

Et $R_p = \dfrac{T_{int}-T_{ext}}{\Phi_{int\to ext}} \Leftrightarrow \boxed{R_p = \dfrac{\ln\left(d_{ext}/d_{int}\right)}{2\pi\lambda_a H}}$



Sous l'installation, géométrie linéaire : $\dfrac{d^2T}{dz^2} \overset{R.P}{=} 0$

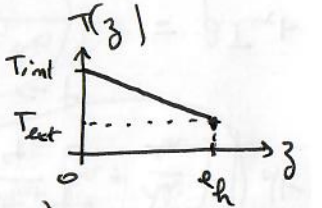


$T(z) = Az + B$

$T(0) = T_{int} = B$

$T(e_h) = T_{ext} = A e_h + T_{int}$

$\Rightarrow A = \dfrac{T_{ext}-T_{int}}{e_h}$



D'où $\boxed{T(z) = \dfrac{T_{ext}-T_{int}}{e_h}z + T_{int}}$.

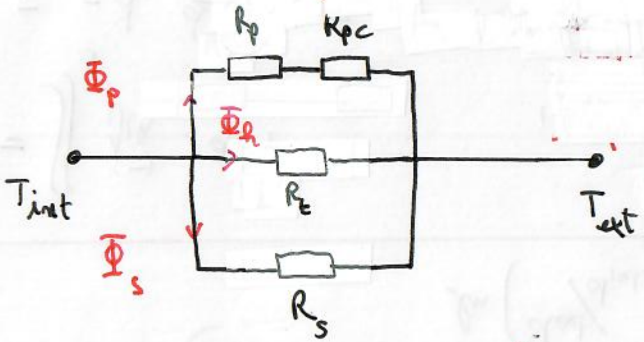
$\vec{j_{th}} = -\lambda_h \dfrac{dT}{dz}\vec{e_z} \Rightarrow \vec{j_{th}} = \dfrac{\lambda_h\left(T_{int}-T_{ext}\right)}{e_h}\vec{e_z}$

D'où $R_h = \dfrac{T_{int}-T_{ext}}{\Phi_{int\to ext}}$.

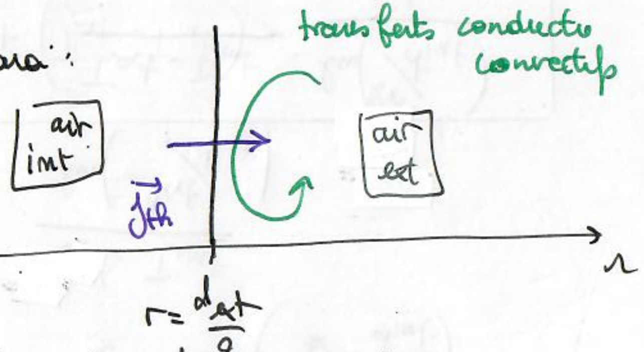
avec $\Phi_{int\to ext} = \pi\dfrac{d_{int}^2}{4}\times\dfrac{\lambda_h\left(T_{int}-T_{ext}\right)}{e_h}$

$\Rightarrow \boxed{R_h = \dfrac{4e_h}{\pi\lambda_h d_{int}^2}}$

10] Dessinons un schéma électrique équivalent.



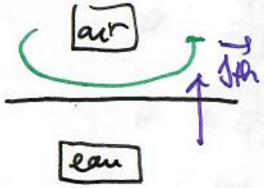
Au niveau de la paroi :



$$P = \iint_{S_{paroi}} \vec{j}_{th} \cdot d^2\vec{S} = h_a \times \cancel{2}\pi \times \frac{d_{ext}}{\cancel{2}} \times H \quad \Delta T$$

D'où $R_{pc} = \frac{\Delta T}{P} \Leftrightarrow \boxed{R_{pc} = \frac{1}{\pi h_a d_{ext} H}}$

De même, à la surface de l'eau :



$$P = h_a \times \pi \times \frac{d_{int}^2}{4} \Delta T$$

$$\Rightarrow \boxed{R_s = \frac{4}{\pi h_a d_{int}^2}}$$

Isolons {eau} fermé et appliquons le premier principe de la thermodynamique

$$dU = m c_a \, \underbrace{dT_{int}}_{T_{int}(t+dt) - T_{int}(t)} = \delta Q \qquad \Delta T = T_{ext} - T_{int}$$

et $\phi_{tot} = \frac{\delta Q}{dt}$, $\phi_{tot} = \Phi_p + \Phi_h + \Phi_s$

D'où $m c_a \, dT_{int} = \Delta T \left(\frac{1}{\underbrace{R_{pc}+R_p}_{\simeq R_p}} + \frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_t} \right) dt$

$$\Leftrightarrow m c_a \frac{dT_{int}}{dt} + \underbrace{\frac{R_pR_t + R_sR_t + R_pR_s}{R_pR_sR_t}}_{\beta} T_{int} = \beta T_{ext}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dT_{int}}{dt} + \frac{1}{\tau} T_{int} = \frac{1}{\tau} T_{ext}$$

$$\Leftrightarrow T_{int}(t) = T_{ext} + A e^{-t/\tau}$$

À $t=0$, $T_{int}(0) = T_{ext} + A \Rightarrow A = T_{int}(0) - T_{ext}$

$$\boxed{\Rightarrow T_{int}(t) - T_{ext} = \left(T_{int}(0) - T_{ext}\right) e^{-t/\tau}}$$

où $\tau = \frac{m c_a}{\beta} = \frac{R_p R_s R_t \, \underbrace{\rho \pi d_{int}^2 H}_{1000 \times 3 \times 2 \times 1 \simeq 6000\ kg}}{4\left[R_p(R_s + R_t) + R_s R_t\right]}$

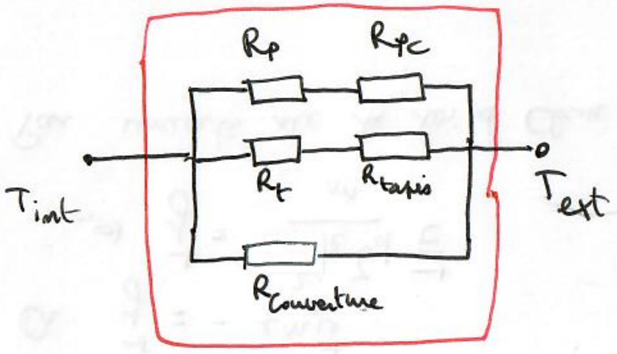
AN : $\tau \simeq 50\ h$

↳ Il faut attendre deux jours pour que $T_{int} \to T_{ext}$

↳ L'hypothèse du régime quasi stationnaire est correcte

11) On rajoute deux résistances thermiques supplémentaires.

D'où $\begin{cases} R_{couverture} = \dfrac{1}{\lambda_a} \times \dfrac{e_s}{S} & \text{avec } S = \pi \dfrac{d_{int}^2}{4} \\ R_{tapis} = \dfrac{1}{\lambda_a} \times \dfrac{e_t}{S} & = \dfrac{3 \times 2}{4} = 1{,}5 \text{ m}^2 \end{cases}$



$$G_{eq} = \frac{1}{R_{couverture}} + \frac{1}{R_t + R_{tapis}} + \frac{1}{R_p + R_{pc}}$$

$$G_{eq} = \frac{2{,}5 \times 10^{-2} \times 1{,}5}{0{,}25} + \frac{1}{0{,}15} + \frac{1}{3}$$

$$G_{eq} = 0{,}15 + 0{,}33 + 6{,}66$$

$$G_{eq} \simeq 7 \text{ W.K}^{-1}$$

D'où $\tau' = \dfrac{mc_a}{G_{eq}} \simeq 1000$ h $\quad \boxed{G = \dfrac{\tau'}{\tau} \simeq 20}$

Soit $20\times$ plus ! Le gain de temps est considérable

12) Il faut compenser ces pertes
$G_{eq} \simeq 7$ W.K^{-1}.

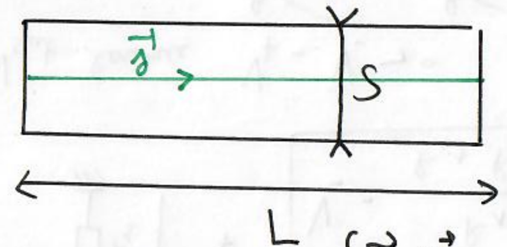
$\dfrac{dT_{int}}{dt} = 0 \Leftrightarrow \mathcal{P} = -\phi_{tot}$

Il faut compenser les pertes.

$\mathcal{P} = -G_{eq}\,\Delta T$ avec $\Delta T = T_{ext} - T_{int} = -23$ K

$\Rightarrow \boxed{\mathcal{P} = 160 \text{ W}}$

B 13)



conductivité électrique σ

Par définition, $R_{él} = \dfrac{\int_L \vec{E}\cdot d\vec{\ell}}{\iint_S \vec{j}\cdot d\vec{S}}$

en RP et sans les effets de bord

$\rightarrow R_{él} = \dfrac{EL}{jS}$

D'après la loi d'Ohm, $\vec{j} = \sigma\vec{E}$

$\rightarrow R_{él} = \dfrac{\cancel{E}L}{\sigma \cancel{E} S}$

$\rightarrow \boxed{R_{él} = \dfrac{L}{\sigma S}}$

14) Système : $\{e^-\}$

Réf : laboratoire, supposé galiléen

BdF : $\vec{F}_{élec} = -e\vec{E}$

$\vec{F}_d = -\frac{m\vec{v}}{\tau_d}$

Le principe fondamental de la dynamique donne :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{m\vec{v}}{\tau_d}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{\tau_d}\vec{v} = \frac{-e\vec{E}}{m}$$

D'où $\vec{v}(t) = \frac{-e\tau_d}{m}\vec{E} + \vec{A}e^{-t/\tau}$

Pour $t \gg \tau_d$ alors $e^{-t/\tau} \xrightarrow[t\gg\tau_d]{} 0$

D'où $\boxed{\vec{v} \simeq \vec{cte} = \frac{-e\tau_d\vec{E}}{m}}$

Or $\vec{j} = -en_e\vec{v}$

$$\Rightarrow \vec{j} = \frac{e^2 n_e \tau_d}{m}\vec{E}$$

Par unicité de la loi d'Ohm : $\boxed{\sigma = \frac{e^2 n_e \tau_d}{m}}$

15) Entre deux collisions, la notion de force de frottement fluide n'a plus de sens.

$\vec{v} = \vec{v}_0 + \underbrace{\delta\vec{v}}_{\text{petit incrément de vitesse}}$ où $\delta\vec{v} = -\frac{e}{m}\vec{E}\,\delta t$

τ_d : temps moyen entre deux collisions

Si $T \nearrow$ alors $\tau_d \searrow$ (plus de désordre)

Donc $\sigma \searrow$ et donc comme $R_{él} \propto \frac{1}{\sigma}$ alors $R_{él} \nearrow$

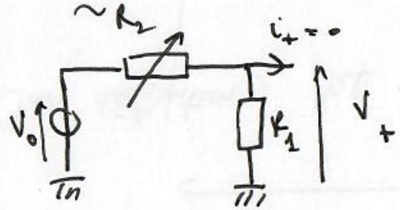
16) ALI idéal en saturation

↳ $i_+ = i_- = 0$

↳ $V_s = \pm V_{SAT}$

* $V_+ = ?$ Pont diviseur de tension OK ($i_+ \approx 0$)

$V_- = ?$



$\boxed{V_+ = \frac{R_1}{R_1+R_2}V_0}$

$\boxed{V_- = \frac{R_1}{R_1+R_{th}}}$ ($\hat{m}$ technique)

$V_s = +V_{sat}$ lorsque $V_+ - V_- > 0$

$\Leftrightarrow \frac{\cancel{R_1}}{R_1+R_2} - \frac{\cancel{R_1}}{R_1+R_{th}} > 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{R_1+R_2} > \frac{1}{R_1+R_{th}}$

$\Leftrightarrow R_1 + R_2 < R_1 + R_{th}$

$\Leftrightarrow R_{th} > R_2$

$\Leftrightarrow 1 + \alpha(T - T_{ref}) > \frac{R_2}{R_0}$

$\Leftrightarrow \boxed{T > T_{ref} + \frac{1}{\alpha}\left(\frac{R_2}{R_0} - 1\right)}$

L'ALI change d'état dès que $V_+ - V_- < 0$

$\Leftrightarrow \dots$

$\Leftrightarrow R_{th} < R_2$

$\Leftrightarrow T < T_{ref} + \frac{1}{\alpha}\left(\frac{R_2}{R_0} - 1\right)$

La température de bascule est $\boxed{T_b = T_{ref} + \frac{1}{\alpha}\left(\frac{R_2}{R_0} - 1\right)}$

↳ On utilise une résistance réglable !

$\frac{u(R_2)}{R_2} = I$: incertitude relative sur R_2

On veut que T_b soit précis à 1°C près.

$\Rightarrow u(T_b) = T_b \times \frac{u(R_2)}{R_2}$.

$\Rightarrow \boxed{\frac{u(R_2)}{R_2} = \frac{1}{T_b}}$ en K .

II Vidange du spa

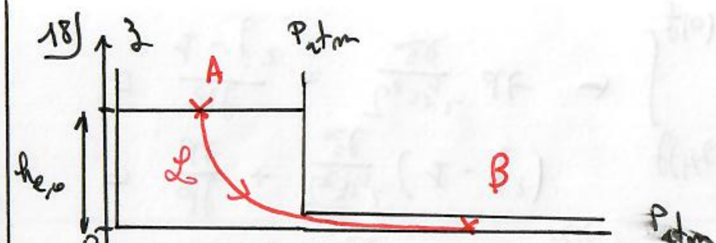
17) L'écoulement n'étant pas visqueux, on ne retrouve pas de profil parabolique de type Poiseuille.

Il y a conservation du débit volumique car le liquide (l'eau est incompressible)

$\Rightarrow v_S \times \pi \frac{d_{int}^2}{4} = v_t \times \pi \frac{d_t^2}{4}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{v_t}{v_S} = \left(\frac{d_{int}}{d_t}\right)^2} \gg 1$

18)



* fluide parfait
* axe z orienté vers le haut
* fluide incompressible

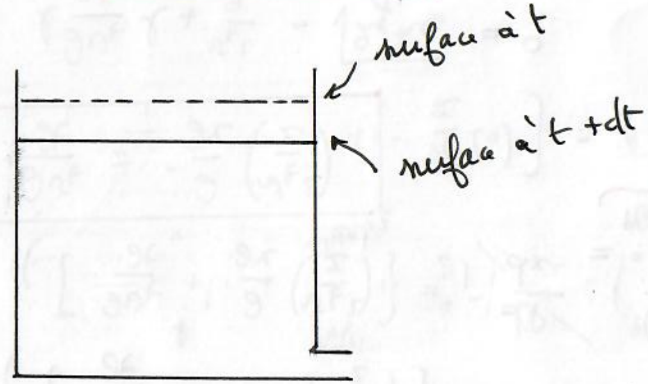
D'après le théorème de Bernoulli, appliqué sur la ligne de courant entre A et B, il vient :

$$\underbrace{P_A}_{\simeq P_{atm}} + \rho g \underbrace{z_A}_{\simeq h_{e,0}} + \frac{1}{2}\rho \underbrace{v_A^2}_{\simeq 0} = \underbrace{P_B}_{\simeq P_{atm}} + \rho g \underbrace{z_B}_{\simeq 0} + \frac{1}{2}\rho \underbrace{v_B^2}_{\simeq v_t}$$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\rho v_t^2 = \rho g h_{e,0}$

$\Rightarrow \boxed{v_t = \sqrt{2 g h_{e,0}}}$ (relation de Torricelli)

19)



$v_A = -\frac{dh_e}{dt} > 0$ d'où on a, d'après la conservation du débit volumique : $\boxed{-\frac{dh_e}{dt} = \left(\frac{d_t}{d_{int}}\right)^2 \sqrt{2 g h_e}}$

$$\Leftrightarrow \frac{dh_e}{\sqrt{h_e}} = -\sqrt{2g}\left(\frac{d_t}{d_{int}}\right)^2 dt \quad \text{(séparation des variables)}$$

$$\Leftrightarrow \int_{h_{e,0}}^{h_e(t)} h_e'^{-1/2}\, dh_e' = -\sqrt{2g}\left(\frac{d_t}{d_{int}}\right)^2 \int_0^t dt'$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}} h_e^{+1/2}\right]_{h_{e,0}}^{h_e(t)} = -\sqrt{2g}\left(\frac{d_t}{d_{int}}\right)^2 t$$

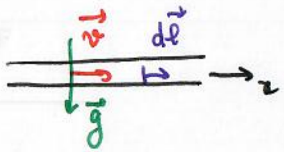
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{h_e(t)} - 2\sqrt{h_{e,0}} = -\sqrt{2g}\left(\frac{d_t}{d_{int}}\right)^2 t$$

$$\Leftrightarrow t = \left(2\sqrt{h_{e,0}} - 2\sqrt{h_e(t)}\right) \times \left(\frac{d_{int}}{d_t}\right)^2 \times \frac{1}{\sqrt{2g}}$$

À $t = t_v$, $h_e(t_v) = 0$: le sp est vide !

D'où $\boxed{t_v = \sqrt{\frac{2h_{e,0}}{g}}\left(\frac{d_{int}}{d_t}\right)^2}$

20) L'équation d'Euler s'écrit :



$$\rho\left[\frac{\partial \vec{v}_t}{\partial t} + (\vec{v}_t \cdot \vec{grad})\vec{v}_t\right] = \rho\vec{g} - \vec{grad}(P)$$

$$\Leftrightarrow \rho\left[\frac{\partial \vec{v}_t}{\partial t} + \vec{grad}\left(\frac{\vec{v}_t^{\,2}}{2}\right) - \vec{v}_t \wedge \vec{rot}(\vec{v}_t)\right] = \rho\vec{g} - \vec{grad}(P)$$

Soit $\vec{dl}$ un petit élément vectoriel de longueur dans le tuyau.

NB : $df \hat{=} \vec{grad}(f)\cdot\vec{dl}$ pour f une fonction à plusieurs variables

$$\Rightarrow \rho\left[\frac{\partial \vec{v}_t}{\partial t}\cdot\vec{dl} + d\left(\frac{v_t^2}{2}\right)\right] = -dP$$

$\vec{dl} = dx\,\vec{e}_x$

$\vec{v}_t = v_t(x,t)\,\vec{e}_x$

$$\Rightarrow \rho\left[\frac{\partial v_t}{\partial t}dx + d\left(\frac{v_t^2}{2}\right)\right] = -dP$$

$$\Rightarrow \rho\left[\frac{\partial v_t}{\partial t}\int_0^l dx + \int_{v_t^2(0)/2}^{v_t^2(l)/2} d\left(\frac{v_t^2}{2}\right)\right] = -\underbrace{\int_{P(0)}^{P(l)} dP}_{=0}$$

$$\Rightarrow \rho\left[\frac{\partial v_t}{\partial t}l + \frac{v_t^2}{2}(l) - \frac{v_t^2}{2}(0)\right] = 0$$

$$\Rightarrow l\frac{\partial v_t}{\partial t} + \frac{v_t^2}{2} - gh_{e,0} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial v_t}{\partial t} + \frac{1}{2l}v_t^2 = \frac{gh_{e,0}}{l}}$$

21) Solution : $v_t(t) = v_1 f(t/\tau_e)$

$$\Rightarrow v_1\frac{df}{dt} + \frac{1}{2l}v_1^2 f^2 = \frac{gh_{e,0}}{l}$$

$$\Rightarrow \frac{df}{dt} + \frac{v_1}{2l}f^2 = \frac{gh_{e,0}}{v_1 l} \quad (*)$$

En RP, lorsque $t \to +\infty$, $v_t(t) \to \boxed{\sqrt{2gh_{e,0}} = v_1}$

et $f\left(\frac{t}{\tau_e}\right) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 1$

$$(*) \Rightarrow \frac{df}{dt} + \frac{v_1}{2l}f^2 = \frac{v_1^{\cancel{2}}}{2\cancel{v_1}l} = \frac{v_1}{2l}$$

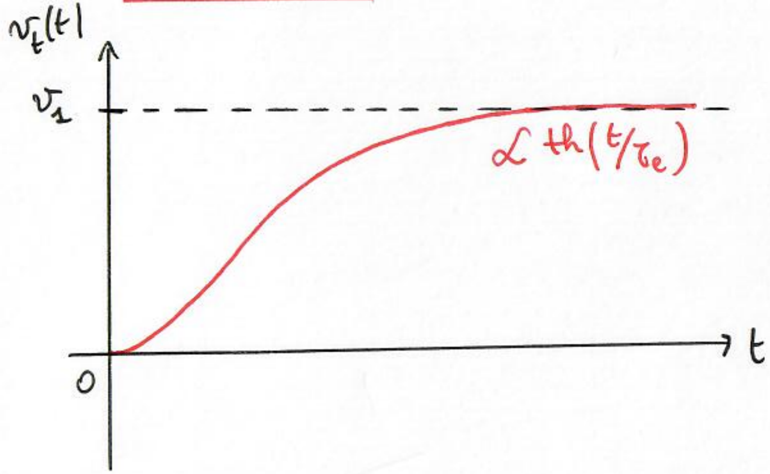
$$\Rightarrow \frac{df}{dt} = \frac{v_1}{2l}(1-f^2)$$

$$\Rightarrow \frac{df}{1-f^2} = \frac{v_1}{2l}dt \Rightarrow \int_{f(0)}^{f(t/\tau_e)} \frac{df}{1-f^2} = \frac{v_1}{2l}t$$

$\Leftrightarrow \mathrm{Argth}\left(f(t/\tau_e)\right) = \dfrac{v_1}{2l}\, t$) la fonction réciproque de Argth est th

$\Leftrightarrow \boxed{f(t/\tau_e) = \mathrm{th}\left(\dfrac{v_1}{2l}\, t\right)}$

On trouve $\boxed{\tau_e = \dfrac{2l}{v_1}}$



• Pour être en régime permanent, il faut attendre à peu près $3\tau_e$

$\Rightarrow$ Il faut donc $\boxed{l \gtrsim \dfrac{3 v_1 \tau_e}{2}}$

22) Non c'est impossible. En bouchant le spa, on augmente la pression et l'eau n'est plus à P_{atm}, mais à une pression $P > P_{atm}$.
L'extrémité du tuyau est elle à P_{atm} !
Donc l'écoulement ne peut pas se faire

▷ Pour toute remarque sur ce corrigé, envoyez un mail à l'adresse suivante :

hugo.rondinkhouye@gmail.com