

**ECOLES NORMALES SUPERIEURES**

**CONCOURS D'ADMISSION 2024**

**JEUDI 18 AVRIL 2024**

**08h00 - 14h00**

**FILIERE MP - Epreuve n° 7**

**MATHEMATIQUES D (U)**

***Durée : 6 heures***

***L'utilisation des calculatrices n'est pas  
autorisée pour cette épreuve***

Le sujet comprend 10 pages, numérotées de 1 à 10.

### Début de l'épreuve

Tout au long de ce sujet, la notation  $A \stackrel{\text{def}}{=} B$  indique que le symbole  $A$  est défini comme étant égal à  $B$ . Rappelons que la série numérique

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!}$$

converge, pour tout nombre réel  $\alpha \in \mathbf{R}$ , vers un nombre réel strictement positif que l'on note  $e^\alpha$  et que l'on appelle l'*exponentielle de  $\alpha$* . L'application  $\alpha \mapsto e^\alpha$  établit une bijection de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}_{>0}$  qui satisfait à la relation : pour tous  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ ,

$$e^{\alpha+\beta} = e^\alpha e^\beta.$$

Le but de ce sujet est de donner une preuve<sup>1</sup> du résultat suivant, qui est un cas particulier du *théorème d'Hermite-Lindemann-Weierstrass* :

**Théorème 1.** Soit  $r \geq 2$  un entier. Si  $a_1, \dots, a_r \in \mathbf{Q}$  sont des nombres rationnels distincts, alors les nombres réels  $e^{a_1}, \dots, e^{a_r}$  sont linéairement indépendants sur  $\mathbf{Q}$ .

Chemin faisant, nous établirons quelques propriétés de nature arithmétique des séries entières à coefficients rationnels qui sont solutions d'une équation différentielle.

### A. Quelques conséquences

1. Pour un nombre rationnel strictement positif  $a \in \mathbf{Q}_{>0}$ , notons  $\log(a)$  le seul nombre réel satisfaisant à  $e^{\log a} = a$ . Dédurre du théorème 1 que  $\log(a)$  est irrationnel pour tout nombre rationnel strictement positif  $a \neq 1$ .
2. Soit  $a \in \mathbf{Q}^\times$  un nombre rationnel non nul. Dédurre du théorème 1 que, pour tout polynôme non nul  $P \in \mathbf{Q}[x]$ , on a  $P(e^a) \neq 0$ .

On dit que le nombre  $e^a$  est *transcendant*.

<sup>1</sup>suivant l'article « An Alternative Proof of the Lindemann–Weierstrass Theorem » de F. Beukers, J. P. Bézivin et P. Robba (*Amer. Math. Monthly* **97** (1990), 193–197).

## B. Séries entières et fractions rationnelles

Une *série entière à coefficients rationnels* est une suite  $(c_n)_{n \geq 0}$  de nombres rationnels. On munit l'ensemble des telles suites des opérations d'addition et de multiplication

$$(c_n)_{n \geq 0} + (d_n)_{n \geq 0} = (c_n + d_n)_{n \geq 0},$$

$$(c_n)_{n \geq 0} \cdot (d_n)_{n \geq 0} = \left( \sum_{k=0}^n c_k d_{n-k} \right)_{n \geq 0}.$$

L'élément neutre pour l'addition est la suite  $(0)_{n \geq 0}$  et l'élément neutre pour la multiplication est la suite  $(1, 0, 0, \dots)$ . En pratique, plutôt que comme une suite on pensera à une série entière à coefficients rationnels  $(c_n)_{n \geq 0}$  comme une expression de la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

On voit  $x$  comme une variable "formelle", c'est-à-dire que l'on ne se soucie pas des propriétés de convergence (si l'on remplace  $x$  par un nombre réel  $\alpha$ , la série numérique  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \alpha^n$  peut être convergente ou divergente). Avec cette notation, les opérations d'addition et multiplication de deux séries entières  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  et  $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$  deviennent

$$(f + g)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n + d_n) x^n,$$

$$(f \cdot g)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n c_k d_{n-k} \right) x^n.$$

On écrit simplement 0 et 1 pour les éléments neutres pour l'addition et la multiplication. La *dérivée* d'une série entière  $f$  comme ci-dessus est la série entière

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^n.$$

L'opération de dériver une série entière est linéaire et satisfait à la règle de Leibniz

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

On note  $\mathbf{Q}[[x]]$  l'ensemble des séries entières à coefficients rationnels. On peut voir les polynômes à coefficients rationnels comme le sous-ensemble  $\mathbf{Q}[x] \subset \mathbf{Q}[[x]]$  formé des séries entières telles qu'il existe un entier  $d \geq 0$  satisfaisant à  $c_n = 0$  pour tout  $n > d$ .

3. Soit  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \in \mathbf{Q}[[x]]$  une série entière dont les coefficients  $c_n$  sont des nombres entiers. Montrer que s'il existe un nombre réel  $\alpha \geq 1$  tel que la série numérique  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \alpha^n$  converge, alors  $f$  est un polynôme.

4. Soit  $Q \in \mathbf{Q}[x]$  un polynôme à coefficients rationnels dont 0 n'est pas racine. Montrer qu'il existe une unique série entière  $f \in \mathbf{Q}[[x]]$  satisfaisant à  $Q \cdot f = 1$ .

Montrer que si  $Q$  est à coefficients entiers et que son terme constant  $c_0$  vaut 1 ou  $-1$ , alors cette unique série entière  $f$  est à coefficients entiers.

Rappelons que  $\mathbf{C}(x)$  désigne l'ensemble des fractions rationnelles  $P/Q$  avec  $P, Q \in \mathbf{C}[x]$  et  $Q$  non nul. On considérera le sous-ensemble  $\mathbf{Q}(x) \subset \mathbf{C}(x)$  formé des fractions rationnelles  $P/Q$  avec  $P, Q \in \mathbf{Q}[x]$ , que l'on appellera *fractions rationnelles à coefficients rationnels*. Pour un nombre complexe  $\alpha$  et un polynôme non nul  $R \in \mathbf{Q}[x]$ , posons

$$\text{ord}_\alpha(R) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \text{ n'est pas racine de } R, \\ \text{multiplicité de } \alpha & \text{si } \alpha \text{ est racine de } R. \end{cases}$$

Soit  $P/Q$  une fraction rationnelle non nulle. On dit que  $\alpha \in \mathbf{C}$  est un *pôle* de  $P/Q$  si l'inégalité  $\text{ord}_\alpha(Q) > \text{ord}_\alpha(P)$  est satisfaite. L'entier  $\text{ord}_\alpha(Q) - \text{ord}_\alpha(P)$  s'appelle alors l'*ordre du pôle*. La fraction rationnelle nulle n'a pas de pôle.

5. Montrer que si 0 n'est pas un pôle de  $P/Q \in \mathbf{Q}(x)$ , alors il existe une unique série entière à coefficients rationnels  $g \in \mathbf{Q}[[x]]$  telle que  $P = Q \cdot g$ .

Montrer que l'application  $P/Q \mapsto g$  est compatible avec l'addition et la multiplication dans  $\mathbf{Q}(x)$  et dans  $\mathbf{Q}[[x]]$ , et qu'elle envoie la dérivée  $(P/Q)' = (P'Q - PQ')/Q^2$  sur la série entière dérivée  $g'$ .

On dit que  $g$  est le *développement en série entière* (parfois abrégé *développement en série* ou encore *développement*) de la fraction rationnelle  $P/Q$  et on écrit  $g = P/Q$ .

6. Soit  $Q \in \mathbf{Q}[x]$  un polynôme à coefficients rationnels de terme constant égal à 1. Montrer qu'il existe un entier  $b \geq 1$  tel que  $Q(bx)$  soit à coefficients entiers.

On dit qu'une série entière  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \in \mathbf{Q}[[x]]$  est *globalement bornée* s'il existe des entiers  $A, B \geq 1$  tels que

$$Af(Bx) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (B^n A c_n) x^n$$

soit une série entière à coefficients entiers.

7. Montrer que si  $f \in \mathbf{Q}[[x]]$  est le développement en série entière d'une fraction rationnelle à coefficients rationnels, alors  $f$  est globalement bornée.
8. Montrer que la série entière

$$\sum_{m=0}^{\infty} x^{m^2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

où  $c_n = 1$  si  $n$  est le carré d'un entier  $m \geq 0$  et  $c_n = 0$  autrement, n'est pas le développement en série entière d'une fraction rationnelle.

On définit la *primitive* d'une série entière  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  comme la série entière

$$\int_0^x f(t) dt \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}.$$

9. Donner un exemple d'un développement en série entière d'une fraction rationnelle dont la primitive n'est pas le développement d'une fraction rationnelle.
10. (*Question plus difficile*) Soit  $f$  le développement en série entière d'une fraction rationnelle  $P/Q \in \mathbf{Q}(x)$  dont tous les pôles sont des nombres rationnels. Supposons que la primitive  $\int_0^x f(t) dt$  soit globalement bornée. Montrer que  $\int_0^x f(t) dt$  est alors le développement en série entière d'une fraction rationnelle dans  $\mathbf{Q}(x)$ .

### C. Séries entières et opérateurs différentiels

Dans ce qui suit, on appellera *opérateur différentiel* (sous-entendu : à coefficients polynomiaux à coefficients rationnels) toute expression de la forme

$$L = R_\mu(x) \left( \frac{d}{dx} \right)^\mu + \cdots + R_1(x) \left( \frac{d}{dx} \right) + R_0(x),$$

où  $\mu \geq 0$  est un entier et  $R_0, \dots, R_\mu \in \mathbf{Q}[x]$  sont des polynômes à coefficients rationnels. Si  $R_\mu$  n'est pas nul, on dit que  $L$  est d'ordre  $\mu$ . Un tel opérateur différentiel agit sur une série entière  $f \in \mathbf{Q}[[x]]$  par la formule

$$(L \cdot f)(x) = R_\mu(x) f^{(\mu)}(x) + \cdots + R_1(x) f'(x) + R_0(x) f(x),$$

où  $f^{(k)}$  désigne la dérivée kème d'une série entière.

11. Montrer l'égalité : pour tous  $m \geq 0$  et  $\mu \geq 0$ ,

$$\left( \frac{d}{dx} \right)^\mu \cdot (x^m f) = \left( x^m \left( \frac{d}{dx} \right)^\mu + \sum_{i=1}^{\min(\mu, m)} \frac{m(m-1)\cdots(m-i+1)\mu(\mu-1)\cdots(\mu-i+1)}{i!} x^{m-i} \left( \frac{d}{dx} \right)^{\mu-i} \right) \cdot f.$$

On dit qu'une série entière  $f \in \mathbf{Q}[[x]]$  est *solution d'une équation différentielle (d'ordre  $\mu$ )* s'il existe un opérateur différentiel non nul  $L$  (d'ordre  $\mu$ ) comme ci-dessus tel que  $L \cdot f = 0$ .

12. Montrer que le développement en série entière de toute fraction rationnelle à coefficients rationnels est solution d'une équation différentielle d'ordre 1.

13. Montrer qu'une série entière  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \in \mathbf{Q}[x]$  est solution d'une équation différentielle si et seulement s'il existe un entier  $d \geq 0$  et des polynômes non tous nuls  $S_0, \dots, S_d \in \mathbf{Z}[x]$  tels que : pour tout  $n \geq 0$ ,

$$S_0(n)c_n + \dots + S_d(n)c_{n+d} = 0.$$

14. Donner une nouvelle preuve, basée sur les questions 12 et 13 ci-dessus, du fait que la série entière  $\sum_{m=0}^{\infty} x^{m^2}$  n'est pas le développement d'une fraction rationnelle.

15. Montrer que la série entière

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!(3n)!}{(n!)^5} x^n$$

est solution d'une équation différentielle, puis en expliciter une.

16. Montrer que  $h(x)$  ci-dessus est à coefficients entiers.
17. Montrer qu'une série entière  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} x^n \in \mathbf{Q}[x]$  est solution d'une équation différentielle si et seulement si sa *transformée de Laplace*

$$\widehat{f}(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

est solution d'une équation différentielle.

#### D. Stratégie de la démonstration du théorème 1

Soient  $r \geq 2$  un entier et  $a_1, \dots, a_r \in \mathbf{Q}$  des rationnels distincts. Soient  $b_1, \dots, b_r \in \mathbf{Q}^\times$  des rationnels non nuls. Posons  $e^{a_i x} \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_i^n}{n!} x^n$  et considérons la série entière

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!} x^n \stackrel{\text{déf}}{=} b_1 e^{a_1 x} + \dots + b_r e^{a_r x}.$$

18. Montrer que la transformée de Laplace  $\widehat{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$  est le développement en série entière de la fraction rationnelle

$$\sum_{i=1}^r \frac{b_i}{1 - a_i x}.$$

En déduire que  $f$  n'est pas la série entière nulle.

Considérons la suite  $(v_n)_{n \geq 0}$  définie en termes des coefficients  $u_n$  par la formule

$$v_n = n! \sum_{i=0}^n \frac{u_i}{i!}$$

et la série entière

$$v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n x^n \in \mathbf{Q}[[x]].$$

19. Montrer l'égalité des séries entières

$$\sum_{n=0}^{\infty} (v_n - n v_{n-1}) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n.$$

20. Montrer que l'opérateur différentiel  $L = -x^2 \left(\frac{d}{dx}\right) + (1-x)$  agit sur  $v(x)$  par

$$(L \cdot v)(x) = \sum_{i=1}^r \frac{b_i}{1 - a_i x}.$$

21. En déduire que si  $v(x)$  est le développement en série d'une fraction rationnelle  $P/Q$ , alors tout élément de l'ensemble non vide  $\{1/a_i \mid a_i \neq 0\}$  est un pôle de  $P/Q$ .

22. Montrer que  $v(x)$  n'est pas le développement en série d'une fraction rationnelle.

Nous avons ainsi réduit la démonstration du théorème 1 à celle de la proposition suivante, qui fera l'objet des parties E et F du sujet.

**Proposition 1.** Si  $b_1 e^{a_1} + \dots + b_r e^{a_r} = 0$ , alors la série entière  $v(x)$  est le développement en série entière d'une fraction rationnelle à coefficients rationnels.

On appelle *polynôme exponentiel* toute série entière à coefficients rationnels de la forme

$$f(x) = \sum_{i=1}^s P_i(x) e^{c_i x},$$

où  $c_1, \dots, c_s \in \mathbf{Q}$  sont des rationnels et  $P_1, \dots, P_s \in \mathbf{Q}[x]$  sont des polynômes.

23. Montrer que le théorème 1 est équivalent à l'énoncé suivant :

Soit  $f(x) \in \mathbf{Q}[[x]]$  un polynôme exponentiel tel que  $f(1) = \sum_{i=1}^s P_i(1) e^{c_i}$  s'annule. Alors  $f(x)/(x-1)$  est encore un polynôme exponentiel.

### E. L'arithmétique des coefficients $v_n$

Rappelons l'hypothèse  $b_1 e^{a_1} + \dots + b_r e^{a_r} = 0$  de la proposition 1. Quitte à remplacer le polynôme exponentiel  $f(x) = b_1 e^{a_1 x} + \dots + b_r e^{a_r x}$  par un multiple entier, on peut supposer sans perte de généralité que les coefficients  $u_0, \dots, u_{r-1}$  sont des entiers.

On fait cette hypothèse dorénavant.

Définissons des nombres rationnels  $s_1, \dots, s_r$  par la formule

$$(T - a_1) \cdots (T - a_r) = T^r - s_1 T^{r-1} - \dots - s_{r-1} T - s_r.$$

24. Montrer l'égalité : pour tout  $n \geq 0$ ,

$$u_{n+r} = s_1 u_{n+r-1} + \dots + s_r u_n.$$

Soit  $D$  un dénominateur commun des nombres rationnels  $a_1, \dots, a_r$  et soit

$$A = \max(1, |a_1|, \dots, |a_r|).$$

25. Montrer que  $D^n u_n \in \mathbf{Z}$  pour tout  $n \geq 0$ .

26. Montrer qu'il existe un nombre réel  $c_1 > 0$  tel que : pour tout  $n \geq 0$ ,

$$|v_n| \leq c_1 \frac{A^{n+1}}{n+1}.$$

Pour tous entiers  $n, k \geq 0$ , définissons le nombre rationnel  $v_n(k)$  comme le coefficient en degré  $n$  de la série entière

$$(1 - s_1 x - \dots - s_r x^r)^k v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(k) x^n.$$

27. Montrer que  $v(x)$  est le développement en série entière d'une fraction rationnelle si et seulement s'il existe un entier  $k \geq 0$  tel que  $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(k) x^n$  soit un polynôme.

28. Observer l'égalité : pour tous  $n \geq r$  et  $k \geq 0$ ,

$$v_n(k+1) = v_n(k) - s_1 v_{n-1}(k) - \dots - s_r v_{n-r}(k).$$

Posons  $C = 1 + |s_1| + \dots + |s_r|$ .

29. Montrer que  $D^n v_n(k) \in \mathbf{Z}$  et qu'il existe un nombre réel  $c_2 > 0$  tel que

$$|v_n(k)| \leq c_2 A^n C^k \text{ pour tous } n \geq kr.$$

30. Soit  $\ell \geq 0$  un entier. Montrer qu'il existe un polynôme  $P_\ell \in \mathbb{Q}[x]$  de degré  $< r(\ell + 1)$  satisfaisant à

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-\ell+1)u_{n-\ell}x^n = \frac{P_\ell(x)}{(1-s_1x-\cdots-s_rx^r)^{\ell+1}}.$$

31. Définissons deux suites  $(w_{n,k})_{n,k \geq 0}$  et  $(w_n(k))_{n,k \geq 0}$  par les formules

$$w_{n,k} = n! \sum_{i=0}^{n-k} \frac{u_i}{i!} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} w_n(k)x^n = (1-s_1x-\cdots-s_rx^r)^k \sum_{n=0}^{\infty} w_{n,k}x^n.$$

Montrer l'égalité  $w_n(k) = v_n(k)$  pour tous  $n$  et  $k$  tels que  $n \geq kr$ .

32. En déduire que  $k!$  divise  $D^n v_n(k)$  pour tous  $n$  et  $k$  tels que  $n \geq kr$ .

33. Montrer l'égalité

$$v_n(k) = \sum_{i=1}^r b_i e^{a_i} \int_{a_i}^{\infty} e^{-t} t^{n-kr} (t-a_1)^k \cdots (t-a_r)^k dt.$$

## F. Démonstration de la proposition 1

Dans cette partie, nous démontrons la proposition 1, concluant ainsi la démonstration du théorème 1. Il nous suffira de prouver qu'il existe un entier  $k_0 \geq 0$  tel que la série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n(k_0)x^n$$

soit un polynôme (d'après la question 27).

34. Montrer que si  $v_n(k)$  n'est pas nul et  $n \geq kr$ , alors

$$k! \leq |D^n v_n(k)| \leq c_2(AD)^n C^k.$$

35. En déduire qu'il existe un entier  $k_0$  tel que

$$v_n(k) = 0 \text{ pour tous } k \geq k_0 \text{ et } kr \leq n \leq 10kr.$$

36. Conclure que  $v_n(k_0) = 0$  pour tout  $n \geq k_0r$ .

Le théorème est démontré!

## G. Fonctions $E$

Dans cette dernière partie, on présente une généralisation à une classe plus large de séries entières à coefficients rationnels de l'énoncé de la question 23, à savoir le fait que le quotient par  $x - 1$  d'un polynôme exponentiel s'annulant en 1 est encore un polynôme exponentiel. Une fonction  $E$  (sous-entendu : à coefficients rationnels) est une série entière

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} x^n \in \mathbf{Q}[[x]]$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

- (a)  $f$  est solution d'une équation différentielle ;
- (b) il existe un nombre réel  $C > 0$  tel que

$$|b_n| \leq C^n \quad \text{et} \quad \text{dén}(b_0, \dots, b_n) \leq C^n \quad \text{pour tout } n \geq 1,$$

où  $\text{dén}(b_0, \dots, b_n)$  désigne le plus petit entier  $d \geq 1$  tel que  $db_0, \dots, db_n$  soient des entiers (« le dénominateur commun de  $b_0, \dots, b_n$  »).

Les polynômes à coefficients rationnels sont des exemples "triviaux" de fonctions  $E$ .

Rappelons que  $\widehat{f}(x)$  désigne la transformée de Laplace introduite dans la question 17.

37. Montrer que si  $f$  est une fonction  $E$ , alors la série numérique  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} \alpha^n$  converge pour tout nombre réel  $\alpha$ . On note  $f(\alpha)$  sa valeur.
38. Soit  $f$  une fonction  $E$  qui n'est pas un polynôme. Montrer qu'il existe  $R > 0$  tel que la série numérique  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \alpha^n$  diverge pour tout nombre réel  $\alpha$  avec  $|\alpha| > R$ .
39. Quelles sont les fonctions  $E$  telles que  $\widehat{f}$  est aussi une fonction  $E$  ?
40. Démontrer que les fonctions  $E$  sont stables par addition et multiplication.
41. Soit  $f$  un polynôme exponentiel. Montrer que  $f$  est une fonction  $E$  telle que  $\widehat{f}$  est le développement en série entière d'une fraction rationnelle à pôles rationnels.
42. Montrer que si  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  est le développement en série entière d'une fraction rationnelle à pôles rationnels, alors  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} x^n$  est une fonction  $E$ .
43. Montrer que la fonction de Bessel

$$J_0(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

est une fonction  $E$  telle que  $\widehat{J}_0(x)$  satisfait à l'équation  $(1+x^2)\widehat{J}_0(x)^2 = 1$ . En déduire que  $J_0(x)$  n'est pas un polynôme exponentiel.

44. Montrer que les zéros réels de la fonction de Bessel  $J_0(x)$  sont simples, c'est-à-dire si  $J_0(\alpha) = 0$ , alors  $J_0'(\alpha) \neq 0$ .
45. Soit  $f(x)$  une fonction  $E$  telle que  $f(1) = 0$ . Montrer que la série entière  $f(x)/(x-1)$  est encore une fonction  $E$ .

Ce dernier résultat est l'un des ingrédients sur lesquels repose la méthode mise en place par Y. André à la fin des années 90 pour démontrer le *théorème de Siegel-Shidlovskii*. Il s'agit d'un énoncé de transcendance pour les valeurs des fonctions  $E$  en des nombres rationnels, qui généralise le théorème d'Hermite-Lindemann-Weierstrass et implique, par exemple, que le nombre  $J_0(\alpha)$  est transcendant pour tout rationnel non nul  $\alpha$ .

**Fin du sujet**