Proposition de corrigé Maths B X-ENS 2024

Adam MOURJANE

22 mai 2024

Corrigé rédigé par Adam MOURJANE, ancien élève du département de mathématiques de l'ENS. Si vous repérez ce qui vous semble être une coquille ou une imprécision, vous pouvez me contacter par mail à l'adresse **prenom.nom[at]gmail.com**.

1 Partie I

1. (a) L'existence découle directement du théorème de Cauchy. [1]

   Par ce même théorème, l'espace des solutions S est de dimension 2, et on remarque que (y_1, y_2) est une famille incluse dans l'espace solution et clairement libre (il suffit d'évaluer la relation de liaison et sa dérivée en 0). Ainsi c'est une base de cet espace, d'où $S = \mathrm{Vect}(y_1, y_2)$.

   (b) Calcul classique, le terme de gauche est le wronskien de y_1 et y_2. On dérive, la dérivée de ce terme vaut 0 donc il est constant. Or, il vaut 1 en 0, ce qui conclut.

2. Première partie immédiate car q est $T-$périodique. Pour la deuxième partie, utiliser le théorème de Cauchy qui donne la bijectivité de $\Phi : S \to \mathbb{R}^2$ telle que $\Phi(y) = (y(0), y'(0))$ (ici on utilise son injectivité). Ainsi, en posant $y_1(t) = y(t+T)$ et $y_2(t) = y(T)y_1(t) + y'(T)y_2(t)$, on vérifie par un calcul direct que $\Phi(y_1) = \Phi(y_2)$ et donc que $y_1 = y_2$.

3. (c) $\implies$ (a) On remarque que $y(t) = u(t)$ et donc le résultat est immédiat par définition de λ.

   (a) $\implies$ (c) Soit y une telle solution, alors on a envie de tester $u(t) = e^{-\lambda t}y(t)$ (de sorte que $y(t) = e^{\lambda t}u(t)$). u est $T-$périodique car $u(t+T) = e^{-\lambda(t+T)}y(t+T) = \frac{1}{\mu}e^{-\lambda T}(\mu y(t)) = u(t)$

   (a) $\implies$ (b). Sans doute l'équivalence la plus délicate. Première question difficile du sujet. Le point clé est de chercher à obtenir un système d'équations d'inconnues liées à y. Par la deuxième question, supposons l'existence de y, on va faire apparaître μ^2 en considérant $y(t+2T)$: on a tout d'abord

$$\mu y(2T) = \mu^2 y(0) = y(T)y_1(T) + y'(T)y_2(T) = \mu(y(0)y_1(T) + y'(0)y_2(T)) \quad (E_1)$$

   et en dérivant la relation de (2) on a :

$$y'(t+T) = y(T)y_1'(t) + y'(T)y_2'(t),$$

   soit, en évaluant en $t = T$: $\mu^2 y'(0) = y'(2T) = y(T)y_1'(T) + y'(T)y_2'(T) = \mu(y(0)y_1'(T) + y'(0)y_2'(T))(E_2)$.

   On peut voir que les équations (E_1) et (E_2) nous donnent un système de deux équations à deux inconnues en $y(0)$ et $y'(0)$ Ainsi, $(y(0), y'(0))$ est un couple non nul (par le théorème de Cauchy) solution du système d'inconnues (X, Y) : $\begin{cases} \mu X = y_1(T)X + y_2(T)Y \\ \mu Y = y_1'(T)X + y_2'(T)Y \end{cases}$ Son déterminant doit donc être nul, il s'agit de $\mu^2 - (y_1(T) + y_2'(T))\mu + y_1(T)y_2'(T) - y_1'(T)y_2(T) = \mu^2 - (y_1(T) + y_2'(T))\mu + 1$ (par la question 2, on reconnait le Wronskien). Ouf !

   (b) $\implies$ (a) Le plus simple est de faire le raisonnement précédent en remontant les étapes du raisonnement précédent, on prend alors (x_0, y_0) une solution du système précédent (qui existe car le déterminant sera nul) et on pose y l'unique solution de (E) telle que $\begin{cases} y(0) = x_0 \\ y'(0) = y_0 \end{cases}$. On peut alors prouver, et c'est fabuleux, que $t \mapsto \mu y(t)$ et $t \mapsto y(t+T) = y(T)y_1(t) + y'(T)y_2(t)$ (l'égalité vient de la question 2) vérifient le même problème de Cauchy en 0 (en conséquence du système d'équations). Par conséquent elles sont égales, ce qui conclut.

1. trois hypothèses clé de ce théorème à retenir pour cette partie :

i. existence et unicité de la solution à deux conditions initiales fixées sur la fonction et sa dérivée au même point

ii. bijectivité de l'application $\Phi : S \to \mathbb{R}^2$ telle que $\phi(y) = (y(0), y'(0))$.

iii. dimension de l'espace des solutions.

4. (a) Sous $\mu_1 \neq \mu_2$, par la question 3, il existe deux solutions $f_1 : t \mapsto e^{\lambda_1 t} u_1(t)$ et $f_2 : t \mapsto e^{\lambda_2 t} u_1(t)$ avec λ_1 et λ_2 tels que $\mu_i = e^{\lambda_i t}$. Comme μ_1 et μ_2 sont racines du polynôme $X^2 - (y_1(T) + y_2'(T))X + 1$, on a par produit de racines $\mu_1 \mu_2 = 1$, d'où on tire $\lambda_2 = -\lambda_1$. Il reste à prouver que (f_1, f_2) est libre et le théorème de Cauchy nous permettra de conclure. C'est simple, on prend une relation de liaison $\alpha f_1 + \beta f_2 = 0$ qu'on évalue en 0 et en T. On obtient alors un système qui nous donne $\alpha = \beta = 0$.

   (b) Si $\mu_1 = \mu_2$, alors le produit des racines nous donne qu'ils valent ± 1. Si les μ valent 1, la question 3a livre immédiatement la $T-$périodicité, sinon il s'agit plutôt d'une $2T-$périodicité car $y(t+T) = -y(t)$.

2 Partie II

5. (a) Cours, démonstration de l'inégalité des accroissements finis (IAF). Soient $x_1, x_2 \in U$ On a par le théorème fondamental de l'analyse (car h est $\mathcal{C}^1$ et U est convexe donc $tx_1 + (1-t)x_2 \in U$ pour tout $t \in [0,1]$) :

$$h(x_2) - h(x_1) = \int_0^1 dh(tx_1 + (1-t)x_2)(x_1 - x_2)dt.$$

   et donc :

$$||h(x_2) - h(x_1)|| \leq \int_0^1 ||dh(tx_1 + (1-t)x_2)(x_1 - x_2)||dt.$$

$$\leq \int_0^1 ||dh(tx_1 + (1-t)x_2)||\,||x_1 - x_2||dt \leq C||x_1 - x_2||.$$

   Remarque : L'hypothèse "U convexe" est cruciale. Le résultat est faux même si U est étoilé, penser à la fonction "mesure principale" sur $U = \mathbb{R}^2 - \mathbb{R}^-$ (étoilé) :

$$\theta(x,y) = 2\arctan\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}.$$

   (on peut se convaincre de cette formule en traçant le cercle de centre (0,0) et passant par (x,y) puis en appliquant la théorème de l'angle inscrit). On remarque clairement que θ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur n'est pas prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}^-$. On pourrait démontrer que, si $\epsilon > 0$, alors $|||d\theta(x)||| \leq \epsilon\ \forall x \in U - B(0,\epsilon)$ (qui par contre n'est plus étoilé mais connexe par arcs). Or, clairement, θ n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}^2 - \mathbb{R}^-$ si on regarde les limites de $\theta(x,y)$ quand (x,y) tend vers un élément de $\mathbb{R}^-$ quand $y > 0$ (la limite vaut π) et $y < 0$ (la limite vaut $-\pi$). Mais U est connexe par arcs, donc on pourrait prouver l'inégalité des accroissements finis se généralise de la manière suivante en reprenant le raisonnement précédent :

$$\forall (x_1,x_2) \in U, ||h(x_2) - h(x_1)|| \leq C \inf_{\gamma \in C^0([0,1],U), \gamma(0)=0, \gamma(1)=1} \int_0^1 ||\gamma'(t)||dt = C\mathscr{L}(x,y),$$

   $\mathscr{L}(x,y)$ représentant la borne inférieure des longueurs de chemins partant de x allant vers y.

   (b) Par continuité de df, on prend r tel que $||df(x) - df(a)|| \leq \frac{1}{2}$ pour tout $x \in \overline{B(a,r)}$. On prend alors $h = f - id_E$, on a alors $||dh(x)|| \leq \frac{1}{2}$, on lui applique l'IAF de la question précédente, qui nous donne alors, pour $x_1, x_2 \in \overline{B(a,r)}$

$$||h(x_1) - h(x_2)|| \leq \frac{1}{2}||x_1 - x_2||.$$

   L'inégalité triangulaire inversée nous donne alors en remplaçant :

$$||f(x_1) - f(x_2)|| \geq \frac{1}{2}||x_1 - x_2||,$$

   ce qui conclut.

   (c) On pourrait un peu hâtivement utiliser le raisonnement de la question 5b en mettant en exergue que $||df(x)|| \leq \frac{1}{2}$. Mais je pense que c'est plutôt un preuve ex nihilo qui est attendue à partir de l'hypothèse de 5b.

C'est assez simple dans l'idée, on raisonne par l'absurde et on trouve un point $z \in \overline{B(a,r)}$ tel que $||df(z)|| < \frac{1}{2}$. Comme f est $\mathcal{C}^1$, on trouve alors un voisinage ouvert V de z dans lequel $||df(z')|| \leq C < \frac{1}{2}$ pour tout $z' \in V$, permettant d'aboutir à une contradiction grâce avec le résultat de la question 5b grâce à l'IAF.

6. (a) g est continue sur $\overline{B(a,r)}$ compact donc par le théorème des bornes atteintes g admet un minimum en un point $x_0 \in \overline{B(a,r)}$.

   Subtilité ! Il faut prouver que c'est en l'intérieur de la boule(i.e. $x_0 \in B(a,r)$). (car $g(a) \leq \frac{r}{4}$ par hypothèse et que g prend des valeurs plus grandes que $\frac{r}{2}$ sur le bord de la boule en conséquence de la 5b)).

   (b) **Attention :** La preuve suivante suppose que $||.||$ est une norme euclidienne. Cela ne change pas la preuve en soi car, toutes les normes étant équivalentes sur E de dimension finie, on peut supposer que $||.||$ est euclidienne en prenant, par exemple, une norme 2 sur une base. On pourra se référer au corrigé proposé sur le site de Bruno Winckler[2] pour une preuve dans le cas général.

   En différentiant g, on obtient (dérivation d'un produit scalaire) :

$$dg(x)(h) = -2\langle df(x)(h), y_0 - f(x)\rangle.$$

   g admet un minimum x_0 en lequel $dg(x_0) = 0$. On va alors ramener le produit scalaire à une norme, ce qui nous arrangera pour appliquer la propriété de séparation. Or par 5c, $df(x_0)$ est injective donc bijective (car de E dans E de dimension finie). Ainsi il existe h_0 tel que $df(x_0)(h_0) = y_0 - f(x_0)$. On en conclut que

$$0 = dg(x_0)(h_0) = -2||y_0 - f(x)||^2.$$

   Ce qui conclut la question.

7. (a) $W = B(f(a), \frac{r}{4})$ est ouverte comme boule ouverte. $V = f^{-1}(W) \cap B(a,r)$ est ouvert par continuité de f et comme intersection finie d'ouverts.

   (b) f est :

      i. bien définie car V est inclus dans $f^{-1}(W)$.
      ii. surjective en conséquence de la question 6.
      iii. injective par la 5b.
      iv. donc bijective et de réciproque continue, de nouveau en appliquant 5b.

Remarques :

— Cette partie nous a permis de prouver le théorème d'inversion locale en dimension finie dans le cas particulier où $df(a) = id_E$ (mais qui se généralise facilement au cas où $df(a)$ est inversible). Ce n'est pas la premeière fois qu'une démonstration de ce théorème se présente aux concours, cf sujet Maths D ENS 2020.

— Ce théorème est également vrai pour des espaces de Banach en dimension infinie mais il faudrait contourner l'utilisation du théorème des bornes atteintes en question 6a qui n'est vrai qu'en dimension finie (comme nous l'apprend le théorème de Riesz, une boule non triviale d'un espace vectoriel de dimension finie n'est jamais compacte).

— L'hypothèse que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et différentiable sur un voisinage de a (et pas seulement en a !) est nécessaire. En effet, sans ces hypothèses, on pourrait démontrer (basé sur le livre "Les contre-exemples en mathématiques" de Hauchecorne) que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x}) + \frac{x}{4}$ et prolongée par continuité en 0 avec $f(0) = 0$ est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(0) = \frac{1}{4} > 0$, et pourtant f n'est strictement monotone (et donc non bijective) sur aucun voisinage de l'origine (ce qui s'explique notamment par le fait que f n'est pas $\mathcal{C}^1$ en 0).

— Il existe une variante du théorème d'inversion locale nommée "théorème d'inversion globale" qui stipule que si, de plus f est injective, alors f est une bijection de U sur $f(U)$, de réciproque continue (on dit alors que f est un homéomorphisme de U sur son image), et ainsi $f(U)$ est un ouvert de E (cette hypothèse reste vraie même si f n'est pas injective et seulement si $df(x)$ est inversible pour tout $x \in U$). La démonstration est immédiate. L'hypothèse d'injectivité est nécessaire, en effet la fonction f définie par $f(x,y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y))$ vérifie les hypothèses du théorème d'inversion locale sur $U = \mathbb{R}^2$, sans pour autant être injective (elle est en effet $(0, 2\pi)-$périodique). En revanche $f(\mathbb{R}^2) = (\mathbb{R}^2)^*$ est bien un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (f est la version de l'exponentielle complexe définie sur $\mathbb{R}^2$).

2. http ://mathem-all.fr/bw/mpe.html

3 Partie III

8. (a) Essentiellement direct, pour peu qu'on ne se trompe pas dans les notations.

(b) Inclusion directe triviale. Il faut prouver la réciproque, qui revient à prouver que l'inverse de tout polynôme en A inversible est un polynôme en A. C'est une astuce récurrente, on va écrire une relation de Bezout qu'on va évaluer en une matrice pour obtenir l'inverse voulu. Soit P un tel polynôme, on prouve que $P \wedge \pi_A = 1$, où π_A est le polynôme minimal de A (s'ils avaient une racine commune, alors on aurait $P(X) = (X - \alpha)Q(X)$ et donc $A - \alpha I_n$ inversible car $P(A)$ l'est. Or, cela signifierait que si $0 = \pi_A(A) = (A - \alpha I_n)R(A)$ et donc $R(A) = 0$ avec R de degré strictement inférieur, contradiction...). On a alors deux polynômes U, V tels que $UP + V\pi_A = 1$. En évaluant en A, on a $U(A)P(A) = I_n$, donc $P(A)^{-1} = U(A)$ est bien un polynôme en A, ce qui conclut. Question algébrique donc.

Remarques :

— On retrouve le fait que l'inverse de toute matrice A inversible est dans $\mathbb{C}[A]$ (i.e. est un polynôme en A). Ceci peut se retrouver d'ailleurs facilement avec le théorème de Cayley-Hamilton. Attention cela ne prouve bien sûr pas que $M \mapsto M^{-1}$ est continue (pourquoi ?).

— On a prouvé que $\mathbb{C}[A]^* = \{P(A), P \in \mathbb{C}[X], P \wedge \pi_A = 1\}$. Bien sûr, comme par division euclidienne
$$\mathbb{C}[A] = \{P(A), P \in \mathbb{C}[X], \deg(P) < \deg(\pi_A)\},$$
ceci nous donnant classiquement que $\mathbb{C}[A]$ est de dimension $\deg(\pi_A)$. On a plus précis :
$$\mathbb{C}[A]^* = \{P(A), P \in \mathbb{C}[X], P \wedge \pi_A = 1, \deg(P) < \deg(\pi_A)\},$$
et les polynômes de cet ensemble sont bien deux à deux distincts.

— Si on arrive à prouver que $\{P \in \mathbb{C}[X], P \wedge \pi_A = 1, \deg(P) < \deg(\pi_A)\}$ est connexe par arcs (ce qui revient à prouver que l'ensemble des polynômes ne s'annulant pas sur un ensemble fini Z est connexe par arcs), on disposera d'une preuve alternative des questions 9 et 10... je suis à la recherche d'une telle preuve.

9. Par propriété de l'exponentielle $\exp(\mathbb{C}[A]) \subset GL_n(\mathbb{C})$. Pour prouver que $\exp(\mathbb{C}[A])$ est un polynôme en A, on peut remarquer que $\mathbb{C}[A]$ est un sev de l'ensemble des matrices de dimension finie. Donc $\mathbb{C}[A]$ est un fermé. Or on voit que par définition l'exponentielle s'écrit comme une limite de polynômes en A, conclusion c'est elle-même un polynôme en A.

10. (a) Soient (t_1, a_1) et (t_2, a_2) tels que $Z_{a_1}(t_1) = Z_{a_2}(t_2)$. L'identification des parties réelles donne immédiatement $t_1 = t_2$ et celle des parties imaginaires donne finalement $a_1 = a_2$ (car $t(1-t) \neq 0$ pour $t \in]0, 1[$).

(b) L'application $\phi : z \mapsto \det(zM_1 + (1-z)M_2)$ est un polynôme en z, non nul car $\phi(M_1) \neq 0$ (M_1 inversible). Ainsi elle admet un nombre fini de racines dans $\mathbb{C}$. Ainsi l'équation $\phi(Z_a(t)) = 0$ admet un nombre fini de solutions (a, t), au plus égal au nombre de racines par le résultat de la question précédente. Comme $\mathbb{R}$ est infini, on peut donc trouver a tel que $\phi(Z_a(t)) \neq 0$ pour tout $t \in]0, 1[$ et donc dans $[0, 1]$ car M_1 et M_2 sont inversibles. $M(t)$ est donc inversible et clairement un polynôme en A, ce qui conclut.

(c) Soient M_1 et M_2 comme précédemment, alors l'application $M : [0, 1] \mapsto (\mathbb{C}[A])^*$ vérifie $M(0) = M_2$, $M(1) = M_1$ et est continue (car Z_a l'est). Ainsi, $(\mathbb{C}[A])^*$ est bien connexe par arcs.

11. (a) **Attention :** il faut bien voir ici $\mathbb{C}[A]$ comme un $\mathbb{R}-$espace vectoriel car le calcul différentiel en MP (et donc le résultat de la partie B) n'est étudié que dans ce cadre-là.

On reconnaît le résultat de la partie II, il faut simplement prouver que la différentielle de l'exponentielle en 0 est bien l'identité. Pour cela, il suffit d'utiliser l'écriture en série entière de l'exponentielle :
$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), e^H = I_n + H + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{H^n}{n!},$$
et dans cette écriture, le terme de droite est un $o(||H||)$ (où on prend $||.||$ une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) car :
$$||\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{H^n}{n!}|| \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{||H||^n}{n!} = e^{||H||} - ||H|| - 1 = o(||H||),$$
et donc l'exponentielle matricielle est bien différentiable en 0 et sa différentielle est l'application $\mathrm{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$. Ainsi, la restriction de l'exponentielle matricielle à $\mathbb{C}[A]$ est également différentiable de

différentielle $\mathrm{id}_{\mathbb{C}[A]}$: elle est bien inversible. Cependant, il reste à montrer que l'exponentielle matricielle est bien différentiable sur un voisinage de 0 : on va le prouver sur $\mathbb{C}[A]$, la commutativité va nous aider (il est plus compliqué de prouver la différentiabilité sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$...). C'est assez simple en utilisant que, pour tout $H \in \mathbb{C}[A]$, $e^{A+H} = e^A e^H = e^A + e^A H + o(H)$: on obtient alors que exp est bien différentiable en A, de différentielle $e^A \mathrm{id}_{\mathbb{C}[A]}$ inversible. Ainsi la propriété est vérifiée.

(b) Soit M dans $\exp(\mathbb{C}[A])$, alors $M = e^B$ avec $B \in \mathbb{C}[A]$.

Or il existe un ouvert U de $\mathbb{C}[A]$ contenant $e^{0_n} = I_n$ tel que toute matrice $u \in U$ s'écrit $u = e^C$ avec $C \in \mathbb{C}[A]$. On va "transporter" U vers M grâce à l'exponentielle. On pose ainsi $U' = \{Mu, u \in U\} = MU$, alors U' est un ouvert de $\mathbb{C}[A]$ (car $U' = \phi^{-1}(U)$, avec $\phi : N \mapsto M^{-1}N$ continue).

Soit $N \in U'$, alors $N = Mu = e^B e^C = e^{B+C}$ car B et C sont dans $\mathbb{C}[A]$ donc commutent. Ainsi, $M \in N \subset \exp(\mathbb{C}[A])$ donc $\exp(\mathbb{C}[A])$ est un voisinage de M. Donc $\exp(\mathbb{C}[A])$ est bien un ouvert de $\mathbb{C}[A]$.

12. Analogue à précédemment, mais cette fois on prouve que le complémentaire de $\exp(\mathbb{C}[A])$ est un ouvert de $(\mathbb{C}[A])^*$.

Soit $M \in \mathbb{C}[A]^*$ telle que $M \notin \exp(\mathbb{C}[A])$.

Soit $U' = \{Mu, u \in U\} = MU$. On a $U' \subset \mathbb{C}[A]$ et on a même $U' \subset \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ (car M est inversible et les éléments de U le sont aussi car ils s'écrivent sous forme d'exponentielle de matrice). Ainsi, par la question 8b, $U' \subset \mathbb{C}[A]^*$. De plus, U' est un ouvert de $\mathbb{C}[A]$ (même méthode que précédemment). Or, Or, $\mathbb{C}[A]^*$ est un ouvert de de $\mathbb{C}[A]$ (par la question 8b) et $U' \subset \mathbb{C}[A]^*$. Donc U' est un ouvert de $\mathbb{C}[A]^*$.

Soit $N \in U'$. Si on avait $N \in \exp(\mathbb{C}[A])$, alors on pourrait écrire $M = Nu^{-1}$, or $N = e^B$ et $u = e^C$ avec $B, C \in \mathbb{C}[A]$. Ainsi par commutativité $M = e^{B-C} \in \exp(\mathbb{C}[A])$, contradiction. Donc $N \notin \exp(\mathbb{C}[A])$, et donc U' est un voisinage ouvert de M dans $\mathbb{C}[A]^*$ inclus dans le complémentaire de $\exp(\mathbb{C}[A])$. Donc ce complémentaire est ouvert, et donc $\exp(\mathbb{C}[A])$ est fermé.

13. (a) Question 11b, on a prouvé que $\exp(\mathbb{C}[A])$ est un ouvert de $\mathbb{C}[A]$, donc $\exp(\mathbb{C}[A]) \cap (\mathbb{C}[A])^* = \exp(\mathbb{C}[A])$ (question 9) est un ouvert de $(\mathbb{C}[A])^*$. De plus, $\exp(\mathbb{C}[A])$ est un fermé de $(\mathbb{C}[A])^*$ par la question 12. Donc $\exp(\mathbb{C}[A])$ est un ouvert-fermé de $(\mathbb{C}[A])^*$: nous sommes donc ramenés à un exercice classique d'evn de prépa, qui consiste à prouver que les ouverts-fermés B d'une partie connexe par arcs C sont $\emptyset$ et C (ici $B = \exp(\mathbb{C}[A])$ et $C = (\mathbb{C}[A])^*$). Il suffit de prendre $f = 1 - \mathbb{1}_B$. On a clairement $f(M_1) = 0$ et $f(M_2) = 1$. On peut alors prouver que cette application est continue sur C par disjonction de cas. Soit $x \in C$:
   - si $x \in B$, alors comme B est un ouvert de C, alors $f = 1$ sur un voisinage de x donc f est continue en x.
   - si $x \notin B$, alors comme B est un fermé de C, ${}^cB$ est un ouvert de C. Donc $f = 0$ sur un voisinage de x donc f est continue en x.

   (b) On utilise alors la connexité par arcs de $(\mathbb{C}[A])^*$: comme l'indicatrice de $\exp(\mathbb{C}[A])$ est continue sur $(\mathbb{C}[A])^*$, l'image de $(\mathbb{C}[A])^*$ par cette application est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenu dans $\{0, 1\}$ mais contenant 0 et 1, ce qui est absurde. D'où une contradiction et le résultat voulu ($\exp(\mathbb{C}[A])$ ne pouvant être vide).

14. Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$, on a $\exp(\mathbb{C}[A]) = (\mathbb{C}[A])^*$, or clairement $A \in (\mathbb{C}[A])^*$ donc $A \in \exp(\mathbb{C}[A])$, ce qui conclut sur la surjectivité de l'exponentielle matricielle.

Remarque :

- On en déduit que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C}) = \exp(\mathbb{C}[A])$. Comme $\mathbb{C}[A]$ est connexe par arcs comme sous-espace vectoriel et exp est continue, on retrouve facilement que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs. Une preuve simple de ce fait, pour rappel, est de considérer, pour deux matrices $M_1, M_2 \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$, l'application $\phi : z \mapsto \det(zM_1 + (1-z)M_2)$. On obtient facilement que ϕ est polynomiale et non nulle en 0 et 1. ϕ admet donc un nombre fini de racines (on note Z leur ensemble), or $\mathbb{C} - Z$ est connexe par arcs, ainsi on obtient un chemin continu reliant 0 à 1 dans $\mathbb{C} - Z$ et donc un chemin continu reliant M_1 à M_2 dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.
- Pour prouver que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ a 2 composantes connexes, c'est un peu plus compliqué. Surtout qu'il n'y a aucun lien entre (M inversible) et ($\Re(M)$ et $\Im(M)$ inversibles), donc on ne peut pas se ramener au résultat évoqué précédemment.
- La preuve ressemble beaucoup à celle proposée à ce lien : `https://www.unilim.fr/pages_perso/tristan.vaccon/exponentielle_de_matrices.pdf`
- Une source proposant une solution de la partie III : `https://perso.eleves.ens-rennes.fr/people/julie.parreaux/fichiers_agreg/maths_dev/SurjectiviteExponentielleMatrice.pdf`

— Pour des compléments et autres applications du résultat démontré dans cette partie, on pourra également se référer à `http://benoit.loisel.perso.math.cnrs.fr/teaching/2019-2020/agreg/CoursExponentielleMatrices.pdf`

4 Partie IV

15. Un exercice du Gourdon (théorème de Floquet, également évoqué dans le cours de CPGE Paradise sur les équations différentielles), mais compliqué à faire si on ne l'a pas déjà vu. On peut penser à un lien avec les valeurs propres de $A(t)$ (ou même $A(T)$), mais il n'en est rien.

    Il faut en fait remarquer que si X est solution, alors par $T-$périodicité de A, $t \mapsto X(t+T)$ est également solution.

    Cette propriété nous permet de définir un endomorphisme :

$$\Phi \left| \begin{array}{ccc} S_0 & \to & S_0 \\ X & \mapsto & (t \mapsto X(t+T)) \end{array} \right.$$

    du $\mathbb{C}-$espace vectoriel S_0 des solutions de l'équation homogène. Cet espace étant de dimension finie n (par le théorème de Cauchy), Φ admet une valeur propre complexe μ. Ce qui nous permet de conclure.

16. (a) Si on reprend l'application Φ de la question précédente, elle est bijective et on remarque que sa matrice dans la base $(Y_1, ..., Y_n)$ est $M(t)$. Ainsi, $M(t)$ est inversible. On pouvait aussi montrer que $M(t)$ est de rang maximum en étudiant une combinaison linéaire des colonnes de $M(t)$ qui s'annulerait. Cela donnerait que $\sum_{i=1}^n \lambda_i Y_i(t) = 0$ et ainsi, en appliquant le théorème de Cauchy, comme $x \to \sum_{i=1}^n \lambda_i Y_i(x)$ est solution, elle est nulle sur $\mathbb{R}$ et donc en 0. D'où $\sum_{i=1}^n \lambda_i Y_i = 0$ et donc $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$, ce qui conclut.

    Pour la deuxième partie de la question, c'est facile car pour tout i, $Y_i'(t) = A(t)Y_i(t)$.

    <u>Remarque :</u> La matrice $M(t)$ est appelée "résolvante" (dans le cas particulier où les Y_i sont choisis de sorte que $M(0) = I_n$) et est très utile pour résoudre les équations différentielles linéaires en général (surtout ici où A dépend de t). Plus généralement, pour $t_0 \in \mathbb{R}$, la résolvante $R(t, t_0)$ est l'unique (encore une fois, existence et unicité par le théorème de Cauchy) solution du système différentiel suivant (la variable étant t) :

$$\begin{cases} R'(t, t_0) = A(t)R(t) \\ R(0) = I_n \end{cases}$$

    On a assez facilement que $R(t, t_1) = R(t, t_0)R(t_0, t_1)$ pour tous $t, t_0, t_1 \in \mathbb{R}$. De plus, si $A(t) = A$ est constante, on montre alors que $R(t, t_0) = e^{(t-t_0)A}$, et dans ce cas $R(t_0, t) = R(t, t_0)^{-1}$. Dans le cas général, il n'y a pas de formule simple. Mais, si, pour tout i, X_i est la solution de $X' = AX$ telle que $X_i(t_0) = e_i$ (où e_i est le $i-$ème vecteur de la base canonique), alors $R(t, t_0) = (X_1(t), ..., X_n(t))$ pour tout t.[3]

    (b) L'idée est de dériver le produit matriciel. Il faut justifier rapidement que $t \mapsto M(t)^{-1}$ est dérivable. Ceci vient de l'expression classique :

$$M(t)^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t\mathrm{Com}(A),$$

    qui permet de s'apercevoir que les coefficients de $M(t)^{-1}$ sont polynomiaux en ceux de $M(t)$ et sont donc dérivables.

    On peut alors trouver la dérivée de $\phi : t \mapsto M(t)^{-1}$ en dérivant $M(t)M(t)^{-1} = I_n$. On trouve alors $M(t)\phi'(t) + M'(t)\phi(t) = 0$, d'où $\phi'(t) = -M(t)^{-1}M'(t)M(t)^{-1}$

    Le résultat se prouve alors facilement en dérivant le produit matriciel et en utilisant la $T-$périodicité de A.

    (c) La matrice de la question précédente est inversible donc, par la partie III, il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $(M(t))^{-1}M(t+T) = \exp(C)$. On pose $B = \frac{C}{T}$ et le tour est joué.

    (d) On pose $Q(t) = M(t)\exp(-tB)$. Q est clairement continue. Il suffit de prouver que Q est $T-$périodique. C'est une conséquence de la question précédente et de $\exp(-(t+T)B) = \exp(-TB)\exp(-tB)$ car TB et tB commutent.

3. Pour approfondir là-dessus, on pourra regarder le sujet CCINP PSI 2012 au lien suivant : `https://www.doc-solus.fr/prepa/sci/adc/pdf/enonces.pdf/2012/PSI_MATHS_CCP_1_2012.enonce.pdf`

17. Il est immédiat que les $R_{i,k}$ sont continues et $T-$périodiques.

Remarque : C'est la décomposition de Dunford (dans sa partie existence) qui est admise à ce stade du sujet. Elle peut se démontrer avec des outils du programme en utilisant la décomposition en sous-espaces caractéristiques (et le résultat de trigonalisation forte) qui nous donne une "similitude à une matrice diagonale par blocs, chaque bloc diagonal étant triangulaire et à termes diagonaux égaux.". En remarquant que la partie diagonale et triangulaire supérieure stricte (donc nilpotente) de chaque bloc peut s'exprimer comme polynôme en la matrice initiale, on peut prouver qu'ils commutent, ainsi, en concaténant on pourrait obtenir une preuve de l'existence de cette décomposition. Ce résultat (avec la partie unicité) aurait pu permettre de démontrer (de manière un peu laborieuse, cf cours sur l'exponentielle de matrice de CPGE Paradise) la surjectivité de l'exponentielle dans la partie 3, cependant cela n'a pas été le choix du sujet.

(a) Assez facile, $M(t)$ est inversible par 3a) et P aussi donc leur produit aussi donc les vecteurs colonnes du produit forment une base de $\mathbb{C}^n$.

(b) On a $M(t)P = Q(t)\exp(t(D+N))P = Q(t)\exp(tN)\exp(tD)P = Q(t)\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(tN)^i}{i!}\exp(tD)P = Q(t)\sum_{i=0}^{n-1} t^i R_i(t)P^{-1}\exp(tD)P = Q(t)\sum_{i=0}^{n-1} t^i R_i(t)\exp(t\Delta) = e^{\lambda_k t}Q(t)\sum_{i=0}^{n-1} t^i R_i(t)$,

où $R_i(t)$ est la matrice de colonnes les $R_{i,k}(t)$. Toute la complexité de la question est de choisir le bon ordre pour développer $\exp(t(D+N))$ car l'un bloque et l'autre aboutit (et penser à se ramener à Δ grâce à P !).

(c) Soit Y une solution, comme les $(Z_i)_{1\leq i\leq n}$ sont une base de l'espace des solutions (par 17a.), alors Y s'écrit comme combinaison linéaire des Z_i. Puis croissance comparée utilisant le fait (à prouver !) que toute fonction (vectorielle) continue $T-$périodique est bornée sur $\mathbb{R}$.

18. (a) Supposons que B admet une valeur propre λ de la forme $i\frac{2k\pi}{mT}$. Soit X non nul tel que $BX = \lambda X$. Alors $TBX = T\lambda X$, et on remarque que $T\lambda$ est de la forme $\frac{2ik\pi}{m}$. On a ensuite $e^{TB}X = e^{T\lambda}X$, et donc e^{TB} admet $e^{T\lambda}$, qui est une racine $m-$ième de l'unité, comme valeur propre. Ainsi $e^{mTB}X = e^{mT\lambda}X = X$. En appliquant la question 16c. et une récurrence très simple, on obtient que $M(t+mT)X = M(t)X$ pour tout t réel. Si on pose $X = (x_i)_{i=1}^n$ et $f(t) = \sum_{i=1}^n x_i Y_i(t)$, on a que f est une solution non nulle de l'équation comme combinaison linéaire, et l'écriture matricielle est précisément la $mT-$périodicité de f.

Remarque : On peut trouver que toutes les solutions de l'équation (2) peuvent s'écrire sous la forme $X(t) = R(t)X_0$, où X_0 est un vecteur fixé : ce sont précisément les combinaisons linéaires des fonctions Y_i.

(b) Supposons qu'il existe une solution $T-$périodique X, alors pour tout t, $X(t+mT) = X(t)$ s'écrit $M(t+mT)X_0 = M(t)X_0$ donc $M(t)\exp(mTB)X_0 = M(t)X_0$. Ainsi, $\exp(mTB)X_0 = X_0$, donc $(\exp(mTB) - I_n)X_0 = 0$, donc $\det(\exp(mTB) - I_n) = 0$. En remarquant que $\exp(mTB) = \exp(TB)^m$ et en factorisant le polynôme $X^m - 1 = \Pi_{\lambda\in U_m}(X-\lambda)$, on trouve qu'il existe une racine $m-$ième de l'unité λ telle que $\det(\exp(TB) - \lambda I_n) = 0$, donc $\exp(TB)$ admet une racine $m-$ième de l'unité.

19. Soit t fixé. On remarque que, comme A est $T-$périodique, $A(t+T) = A(t)$ pour tout t. De plus, comme X est $T'-$périodique, on a que $A(t+T')X(t) = A(t+T')X(t+T') = X'(t+T') = X'(t) = A(t)X(t)$. Ainsi, on en déduit par récurrence que, pour tous $(p,q)\in\mathbb{Z}^2$, $A(t+pT+qT')X(t) = A(t)X(t)$. Soit $H = \{pT+qT', (p,q)\in\mathbb{Z}^2\} = \mathbb{Z}T + \mathbb{Z}T'$. H est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ qui ne peut pas être de la forme $a\mathbb{Z}$ (sinon on aurait $T = ka$ et $T' = k'a$, d'où une contradiction avec $T'\notin\mathbb{Q}T$). H est donc dense dans $\mathbb{R}$ (donc $t+H$ aussi par translation), donc de $A(t+h)X(t) = A(t)X(t)$ pour tout h dans H, on tire $A(u)X(t) = A(t)X(t)$ pour tout u dans $\mathbb{R}$, car A est continue).

20. Condition nécessaire : Supposons que (2) a une solution périodique non nulle. Notons T' sa période d'une telle solution. Deux cas sont possibles

— $T'\notin\mathbb{Q}T$. Soit X une solution non nulle $T'-$périodique. Soit $W = \mathrm{Vect}(X(t), t\in\mathbb{R})$. Alors par la question 19, $A(u)X(t) = A(t)X(t) = X'(t)\in W$ pour tout $u\in\mathbb{R}$, donc pour tout $w\in W$, par combinaison linéaire, pour tout $u\in\mathbb{R}$, $A(u)w = A(t)w\in W$ donc W est stable par $A(u)$ pour tout $u\in\mathbb{R}$. Ainsi, $W = \mathbb{C}^n$ par l'hypothèse de l'énoncé (X étant non nulle). Or, l'égalité $A(u)w = A(0)w$ est vraie pour tout $w\in W = \mathbb{C}^n$ par la remarque ci-dessus donc $A(u) = A(0)$. Et donc si on prend $v\in\mathbb{C}^n$ un vecteur propre non nul de $A(0)$, alors $\mathrm{Vect}(v)$ est stable pour tous les $A(t)$, donc on a une contradiction si $n\geq 2$ (si $n=1$ donc dans le cas où A est à valeurs réelles, il faudrait traiter ce cas... en fait on obtiendrait avec l'égalité du dessus que $t\mapsto A(t)$ est constante, et dans ce cas on a des solutions sous forme d'exponentielles qui ne seront jamais nullesl sauf si $A=0$).

— $T' \in \mathbb{Q}T$. Alors il existe $m' \in \mathbb{N}$ tel que $m'T'$ s'écrit mT avec $m \in \mathbb{N}$. Par la question 18b., $\exp(TB)$ admet alors une valeur propre qui est racine $m-$ième de l'unité.

Condition suffisante : Supposons que $\exp(TB)$ admet une valeur propre racine $m-$ième de l'unité. Alors en reprenant la suite du raisonnement de la question 18-a), on trouve que (2) admet une solution $mT-$périodique non nulle (et a foritori périodique).

Ainsi, la condition nécessaire et suffisante recherchée est que

— soit $n \geq 2$ et $\exp(TB)$ admette une valeur propre qui est racine $m-$ième de l'unité,

— soit $n = 1$ et $A(t) = 0$ pour tout t.

21. Unicité : Si X_1 et X_2 sont solutions, alors $X_1 - X_2$ est une solution $T-$périodique de $X'(t) = A(t)X(t)$ et par la contraposée de 18b) (et l'hypothèse de l'énoncé de $\exp(TB)$), $X_1 - X_2$ est nécessairement nulle. D'où $X_1 = X_2$.

Existence : On sait par une remarque précédente que toute solution de (2) s'écrit $X(t) = R(t)X_0$. On va chercher une solution particulière par la méthode de variation de la constante sous une forme vectorielle, sous la forme $X(t) = R(t)X_0(t)$ [4] . Alors $X'(t) = A(t)R(t)X_0(t) + R(t)X_0'(t) = A(t)X(t) + R(t)X_0'(t)$, d'où $R(t)X_0'(t) = b(t)$, d'où $X_0'(t) = R(t)^{-1}b(t)$. Ainsi, $X_0(t) = \int_0^t M(s)^{-1}b(s)ds + C$, avec $C \in \mathbb{C}^n$ le vecteur des conditions initiales, d'où :

$$X(t) = M(t)\left(\int_0^t M(s)^{-1}b(s)ds + C\right) \quad \text{formule de Duhamel}$$

(l'intégrale de gauche est bien un vecteur).

On veut trouver C. Et on veut $X(t+T) = X(t)$, or si on analyse l'expression on tombe sur :

$$\begin{aligned}
X(t+T) = M(t+T)\left(\int_0^{t+T} M(s)^{-1}b(s)ds + C\right) &= M(t)\exp(TB)\left(\int_0^{t+T} M(s)^{-1}b(s)ds + C\right) \\
&= M(t)\exp(TB)\left(\int_{-T}^{t} M(s+T)^{-1}b(s+T)ds + C\right) \\
&= M(t)\exp(TB)\left(\int_{-T}^{t} \exp(-TB)M(s)^{-1}b(s+T)ds + C\right) \\
&= M(t)\left(\int_{-T}^{t} M(s)^{-1}b(s)ds + \exp(TB)C\right) \\
&= M(t)\left(\int_0^t M(s)^{-1}b(s)ds + \int_{-T}^0 M(s)^{-1}b(s)ds + \exp(TB)C\right) \\
&= M(t)\int_0^t M(s)^{-1}b(s)ds + M(t)\int_{-T}^0 M(s)^{-1}b(s)ds + M(t)\exp(TB)C \\
&= X(t) - M(t)C + M(t)\int_{-T}^0 M(s)^{-1}b(s)ds + M(t)\exp(TB)C.
\end{aligned}$$

on veut donc

$$-M(t)C + M(t)\int_{-T}^0 M(s)^{-1}b(s)ds + M(t)\exp(TB)C = 0,$$

soit :

$$M(t)\int_{-T}^0 M(s)^{-1}b(s)ds = M(t)(I_n - \exp(TB))C$$

donc :

$$\int_{-T}^0 M(s)^{-1}b(s)ds = (I_n - \exp(TB))C$$

Ainsi, si on pose $C = (I_n - \exp(TB))^{-1}\int_{-T}^0 M(s)^{-1}b(s)ds$, l'inverse est bien défini (car 1 n'est pas valeur propre de $\exp(TB)$, et on a bien X $T-$périodique. On a donc prouvé simultanément l'existence et l'unicité.

4. Cette méthode avec cette formulation de la méthode de variation des constantes est quelque peu inhabituelle en MP (on exprime dans le cours les constantes sous forme de n fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ quand ici on a une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}^n$), on la voit plutôt en L3 habituellement. Cependant, outre le sujet CCINP évoqué plus haut, on peut en trouver trace dans le cours d'équations différentielles de M. Pommellet à Louis-le-Grand, qu'on pourra trouver à ce lien, dernière page : `https://cpge-paradise.com/MP4Math/Cours/`. On pourra également se référer aux pages 19 et 20 de `https://melusine.eu.org/syracuse/immae/mp/mathematiques/18.pdf`

22. Le système différentiel est équivalent à $X'(t) = A(t)X(t)$, avec

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & -\cos(t) \\ \cos(t) & 1 \end{pmatrix}.$$

On ne dispose pas de méthode dans le cours pour "deviner" une solution de ce système facilement [5]. Le plus simple est de tenter une réduction de $A(t)$ et d'espérer que les vecteurs propres de $A(t)$ sont indépendants de t [6]. On a de la chance car ce sera le cas ici ! On trouve que $A(t)$ admet $1 \pm i\cos t$ comme valeurs propres et les sous-espaces propres respectifs sont dirigés par $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ et $E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs forment une base de $\mathbb{C}^2$, en particulier $A(t)$ est diagonalisable pour tout t. Ainsi, on peut rechercher des solutions de la forme $X_i(t) = \lambda_i(t)E_i$ (ce n'est pas une méthode de variation de la constante, mais ce que je qualifierais d'astuce assez classique pour résoudre les équations différentielles dans le cas de matrices A dépendantes du temps). On trouve alors que $X_1(t) = e^{t-i\sin(t)}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ et $X_2(t) = e^{t+i\sin(t)}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ conviennent. Comme $(X_1(0), X_2(0))$ est une base de $\mathbb{C}^2$ comme dit plus haut, (X_1, X_2) est un système fondamental de solutions de (E) et donc $S = \mathrm{Vect}(X_1, X_2)$.

On peut alors poser la matrice carrée définie par ses colonnes $M(t) = (X_1(t)X_2(t))$. On remarque que A est $2\pi-$périodique, donc en application de la 16 d, M admet bien une forme normale. On remarque alors que : $M(t+T) = e^T M(t) = \exp(TI_n)M(t)$.

Ainsi, on peut poser $B = I_n$ et $Q(t) = M(t)\exp(-tI_n) = \begin{pmatrix} e^{-i\sin(t)} & e^{i\sin(t)} \\ -ie^{-i\sin(t)} & ie^{i\sin(t)} \end{pmatrix}$. Ceci livre la forme normale demandée.

5. La seule généralisation que l'on peut espérer du théorème du cours est le cas où, pour tous (s,t), $A(s)$ et $A(t)$ commutent. On peut prouver dans ce cas que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \exp\left(\int_0^t A(s)ds\right) X_0,$$

en effet, la dérivée de $t \mapsto \exp(B(t))$ est $t \mapsto B'(t)\exp(B(t))$ sous l'hypothèse de commutativité des $(B(t))$. Cette hypothèse étant vérifiée ici (on peut le montrer), on aurait pu s'en servir si elle était au programme

6. La méthode ressemble à celle utilisée dans les exercices 1 à 3 de `http://ddmaths.free.fr/section666.html`