Correction de l'épreuve Mathématiques C ENS 2024
Par DOURVILLE Jérémy.
Si vous trouvez des erreurs, ou si vous avez des questions/ ou suggestions, n'hésitez pas à me contacter par mail : Jerdourville@gmail.com

I Lemme de Cesàro

1. Soit $\epsilon > 0$, montrons qu'il existe un rang N tels que :
$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N, |\sigma_n - l| \leq \epsilon$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, alors par définition de la limite, il existe un rang n_0 tels que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - l| \leq \epsilon$.
Pour $n \geq n_0$ on a :

$$\begin{aligned}|\sigma_n - l| &= |\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k - l| \\ &\leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k - l| + \frac{1}{n+1}\sum_{k=n_0}^{n} |u_k - l| \text{(par inégalité triangulaire)}\end{aligned}$$

<u>Etude du second terme :</u>
$\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=n_0}^{n} |u_k - l| \leq \frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=n_0}^{n} \epsilon \leq \epsilon$.
<u>Etude du premier terme :</u>
On a $\sum\limits_{k=0}^{n_0-1} |u_k - l|$ qui est une constante par rapport à n, donc $\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n_0-1} |u_k - l|$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Il existe donc un range n_1 tels que $\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n_0-1} |u_k - l| \leq \epsilon$ pour tout $n \geq n_1$.
Donc pour tout $n \leq max(n_0, n_1)$ on a $|\sigma_n - l| \leq 2\epsilon$. Quitte à étudier avec $\frac{\epsilon}{2}$ au lieu de ϵ, le résultat est ainsi démontré.

Cas ou $l = +\infty$ (le cas $l = -\infty$ se traite de façon symétrique) :
Soit $A > 0$, montrons qu'il existe un rang N tel que :
$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N, \sigma_n \geq A$,
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors par définition de la limite, il existe un rang n_0 tels que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq A$.
On a $\sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n_0-1} u_k + \frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k$
Les comparaisons qui suivent peuvent bien être faite car on considère une suite réelle.
Comme précédement,la convergence vers 0 du premier terme nous donne l'existence d'un rang n_1 tels que $|\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n_0-1} u_k| \leq \frac{A}{4}$ pour tout $n \geq n_1$.

Etude du second terme :
$\frac{1}{n+1}\sum_{k=n_0}^{n} u_k \geq \dfrac{n-n_0+1}{n+1}A \geq A/2$ lorsque $n \geq 2n_0$.

Ainsi on a pour $n \geq max(2n_0, n_1), \sigma_n \geq \frac{A}{24}$.
Le résultat est ainsi démontré :
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \in \mathbb{C}$ alors , $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n = l$, et lorsque la suite est réelle on peut considérer $l = +\infty$ et $l = -\infty$.

Applications

2. On pose la suite (u_n) définie par $u_n = 0$ si $n = 0$ et $u_n = \frac{1}{n}$ sinon. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Donc d'après le lemme de Cesàro (1.1) on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n = 0$.
   Or $\sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(n+1)}$. On remarque que $v_n = \frac{n+1}{n}\sigma_n$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

   La fonction $x \mapsto \frac{1}{xn}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. En effectuant la comparaison série-intégrale on obtient :
   $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{kn} \leq \dfrac{1}{n} + \int_1^n \dfrac{1}{tn}dt \leq \dfrac{1}{n} + \dfrac{ln(n)}{n} = \dfrac{ln(n)}{n} + o(\dfrac{ln(n)}{n})$
   De même on a $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{kn} \geq \dfrac{ln(n+1)}{n} = \dfrac{ln(n)}{n} + o(\dfrac{ln(n)}{n})$.
   Ainsi on obtient $v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{ln(n)}{n}$.

3. On note γ_n la suite de Cesàro associé à e_n. On a $\gamma_n = \frac{u_{n+1}-u_0}{n+1}$ (on reconnait un téléscopage).
   Or d'après le lemme de Cesàro, γ_n converge vers $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Comme $\frac{u_0}{n+1}$ tend vers 0 on déduit que $\frac{u_{n+1}}{n+1}$ converge vers α.
   Donc $u_n \sim \alpha n$.

   La série de terme général e_n est divergente. De plus la série de terme générale α est divergente et le terme générale est de signe constant. Ainsi on a
   $\sum_{n=0}^{N} e_n \sim \sum_{n=0}^{N} \alpha = (N+1)\alpha$.
   Par téléscopage on a donc $u_{N+1} - u_0 \sim (N+1)\alpha$.
   On a aussi $u_N \sim N\alpha$

4. Comme (u_n) est à valeurs positives, on peut poser $v_n = ln(u_n)$. On note de plus $w_n = v_{n+1} - v_n$. On a w_n qui converge vers $ln(l)$.
   Si $l \neq 1$, c'est-à-dire $ln(l) \neq 0$, alors d'après la question précédente on obtient que $v_n \sim ln(l)n$.
   Montrons que $\sqrt[n]{u_n} \sim l$:
   On a $ln(\frac{\sqrt[n]{u_n}}{l}) = ln(l)(\frac{ln(u_n)}{nln(l)} - 1)$.
   Par définition de l'équivalent on déduit que, $ln(\frac{\sqrt[n]{u_n}}{l})$ converge vers 0.

Donc que $\sqrt[n]{u_n}$ converge vers l.

Si l=1 :
On obtient en reprenant les calculs de la question 3 que $v_n = o(n)$. Donc $ln(\sqrt[n]{u_n}) = \frac{u_n}{n}$ qui converge vers 0. En passant a l'exponentielle on obtient donc que $\sqrt[n]{u_n}$ converge vers 1.
Bilan : Dans tous les cas $\sqrt[n]{u_n}$ converge vers l.

Lorsque $l = 0$:
On a déja $0 < \sqrt[n]{u_n}$ pour tous n.
Soit $\epsilon > 0$, il existe un rang N tels que pour tous $n \geq N$, $u_{n+1} \leq \epsilon u_n$. On a donc $u_n \leq \epsilon^{n-N} u_N$.
Ainsi $\sqrt[n]{u_n} \leq \epsilon \sqrt[n]{\frac{u_N}{\epsilon^N}}$
Or pour n suffisament grand, $\sqrt[n]{\frac{u_N}{\epsilon^N}} \leq 2$ (car le terme converge vers 1)
Ainsi $\sqrt[n]{u_n} \leq 2\epsilon$. On a donc bien par encadrement, $\sqrt[n]{u_n}$ converge vers 0.

Le cas $l = +\infty$ se traite en étudiant $v_n = \frac{1}{u_n}$.

Conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$.

Application :en appliquant le résultat démontré on obtient que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n!} = e$.

5. La suite (a_n) est convergente donc bornée. On pose M une borne supérieure de la suite $(|a_n|)$. On a donc $|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k(b_{n-k} - b)| \leq M.\sum\limits_{k=1}^{n} |b_{n-k} - b|$.
Or la suite $(|b_n - b|)$ tend vers 0 donc en appliquant le lemme de Cesàro on obtient que (comme à la question 2, la présence du facteur $\frac{1}{n}$ au lieu de $\frac{1}{n+1}$ ne change rien) :
$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k(b_{n-k} - b) = 0$.
Appliquons cela dans la somme voulue :
$\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_{n-k} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k(b_{n-k} - b) + \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b$
D'après le calcul précédent, le premier terme tend vers 0. Le deuxième terme lui, tend vers ab d'après le lemme de Cesàro.
Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_{n-k} = ab$.

6. On note $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $B_n \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ et $D_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} C_k$.
On a :

$$
\begin{aligned}
D_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} C_k \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k} c_l \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k}\sum_{m=0}^{l} a_m b_{l-m} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=m}^{n}\sum_{l=m}^{k} a_m b_{l-m}\text{on échange les sommes car elles sont finies} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=m}^{n} a_m B_{k-m} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-m} a_m B_j\text{Changement d'indice j=k-m} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n}\sum_{m=0}^{n-j} a_m B_j\text{on échange les sommes qui sont finies} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n} A_{n-j} B_j
\end{aligned}
$$

On a (A_n) et (B_n) qui tendent respectivement vers a et b.

Donc d'après la question 5, on obtient que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} C_k$ converge vers ab.

Réciproque partielles

7. La suite $(u_n) = ((-1)^n)$ ne converge pas. Pour autant la suite (σ_n) converge.
8. On considère le cas ou (u_n) est une suite croissante. D'après le théorème de la limite monotone, une suite croissante réelle et soit convergente soit divergente vers $+\infty$.
   On va opérer par disjonction de cas, si (u_n) diverge vers $+\infty$, alors d'après le lemme de Cesàro, σ_n converge vers $+\infty$. Cela est absurde, donc (u_n) converge vers une limite $l2$. Or d'après le lemme de Cesàro, σ_n converge vers $l2$. Ainsi par unicité de la limite, on obtient que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$. Le cas ou (u_n) est décroissante est similaire.

   Si $l = \pm\infty$ alors la même disjonction de cas permet de déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ (car si (u_n) converge alors σ_n aussi ce qui est absurde).
9. Montrons l'indication :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} ke_k &= \sum_{k=0}^{n} k(u_{k+1}-u_k)\\ &= \sum_{k=1}^{n+1}(k-1)u_k - \sum_{k=0}^{n} ku_k\\ &= nu_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} ke_k\end{aligned}$$

On a d'après le calcul ci dessus, $u_{n+1} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} u_k + \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} ke_k$.
Le premier terme tend vers l (on a un terme équivalent à σ_n).
On a ke_k qui tend vers 0 donc d'après le lemme de Cesàro, $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} ke_k$ converge vers 0.
Ainsi on obtient que $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$.

10. a) On a :

$$\begin{aligned}u_k - u_n &= (u_k - u_{k-1}) + (u_{k-1} - u_n)\\ &= e_{k-1} + (u_{k-1} - u_n)\\ &= e_{k-1} + .. + e_n + (u_n - u_n)\text{Par itération du même procédé}\end{aligned}$$

Ainsi $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{m} u_k - (m-n)u_n = \sum_{k=n+1}^{m} u_k - u_n = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=n}^{k-1} e_k = \sum_{j=n}^{m-1}(m-j)e_k$.

b) On a $\frac{(m+1)\sigma_m-(n+1)\sigma_n}{m-n} - u_n = \frac{1}{m-n}(\displaystyle\sum_{k=n+1}^{m} u_k - (m-n)u_n) = \dfrac{1}{m-n}\sum_{j=n}^{m-1}(m-j)e_j$ d'après la question 10.(a).
$e_n = O(\frac{1}{n})$ donc il existe C tels que pour tout n, $|ne_n| \leq C$. C'est à dire $e_n \leq \frac{C}{n}$ pour tout n non nul.
Ainsi $|\frac{(m+1)\sigma_m-(n+1)\sigma_n}{m-n} - u_n| \leq \displaystyle\sum_{j=n}^{m-1} \dfrac{m-j}{m-n}\dfrac{C}{j} \leq C\sum_{j=n}^{m-1}\dfrac{1}{j} \leq C\sum_{j=n}^{m-1}\dfrac{1}{j}$ par inégalité triangulaire.
Par comparaison série intégrale, $\displaystyle\sum_{j=n}^{m-1}\dfrac{m}{j} \leq \int_{n-1}^{m-1}\dfrac{1}{t}dt \leq ln(\dfrac{m-1}{n-1})$.
Ainsi on a montré que $|\frac{(m+1)\sigma_m-(n+1)\sigma_n}{m-n} - u_n| \leq Cln(\frac{m-1}{n-1})$ avec C une constante indépendante de m et de n.

En utilisant ce que l'on vient de demontrer on a :

$$\begin{aligned}|u_n - l| &\leq |\frac{(m+1)\sigma_m-(n+1)\sigma_n}{m-n} - u_n| + |\frac{(m+1)\sigma_m-(n+1)\sigma_n}{m-n} - l|\\ &\leq Cln(\frac{m-1}{n-1}) + \frac{(m+1)|\sigma_m - l| + (n+1)|\sigma_n - l|}{m-n}\end{aligned}$$

Donc $|u_n - l| \leq Cln(\frac{m-1}{n-1}) + \frac{m+1}{m-n}(|\sigma_m - l| + |\sigma_n - l|)$

c) Par définition de la partie entière on a : $\alpha n - 1 \leq \lfloor \alpha n \rfloor \leq \alpha n$.
$\cdot \frac{m+1}{m-n} \leq \frac{\alpha n+2}{(\alpha-1)n} \leq 1 + \frac{2}{\alpha-1}$
Or $1 < \alpha$ donc $\frac{\alpha+2}{\alpha(n-1)} \leq \frac{3\alpha}{\alpha(n-1)} \leq \frac{3}{(n-1)} \leq 3$ car $2 \leq n$.
Ainsi $\frac{m+1}{m-n} \leq 4$.
$\cdot \frac{m-1}{n-1} \leq \frac{\alpha n}{\alpha(n-1)} \leq \alpha + \frac{\alpha}{\alpha(n-1)}$
Donc $ln(\frac{m-1}{n-1}) \leq ln(\alpha) + ln(1 + \frac{1}{n-1}) \leq ln(\alpha) + \frac{1}{n-1}$.
Montrons maintenant que (u_n) tend vers l.
Soit $\epsilon > 0$, comme $\lim_{n \to +\infty} \sigma_n = l$, il existe un rang N_0 tels que pour $n > N_0$, $|\sigma_n - l| \leq \epsilon$.
Comme $m > n$ alors $|\sigma_m - l| + |\sigma_n - l| \leq 2\epsilon$.

De plus,il existe un rang N_1 tels que $\frac{C}{n+1} \leq \epsilon$ pour $n \geq N_1$. Ainsi on obtient que $Cln(\frac{m-1}{n-1}) \leq Cln(\alpha) + \epsilon$ pour $n \geq N_1$.

Pour $n \geq max(N_0, N_1)$ on a $|u_n - l| \leq 3\epsilon + Cln(\alpha) + 4\epsilon\frac{1}{\alpha-1}$.
On va s'intéresser au paramètre α.
En notant $\alpha = 1 + d$ on a $Cln(1 + d) + 4\epsilon\frac{1}{\alpha-1} = Cln(\alpha) + 4\epsilon\frac{1}{d} \leq Cd + 4\epsilon\frac{1}{d}$.
On pose $f : x \mapsto Cx + 4\epsilon\frac{1}{x}$. Le minimum est atteint en $x = 2\sqrt{\frac{\epsilon}{C}}$ et vaut $4\sqrt{\epsilon C}$.
Ainsi en prenant $\alpha = 1+2\sqrt{\frac{\epsilon}{C}}$, on obtient que $|u_n - l| \leq 3\epsilon + 4\sqrt{\epsilon C}$.
Comme on fait tendre ϵ vers 0 alors on peut supposer $\epsilon \leq 1$.
Ainsi $|u_n - l| \leq \sqrt{\epsilon}(3 + 4\sqrt{C})$
Quitte a prendre $\frac{\epsilon}{(3+4\sqrt{C})^2}$, on obtient que $\lim_{n \to +\infty} u_n = l$.

II Théorème d'Abel

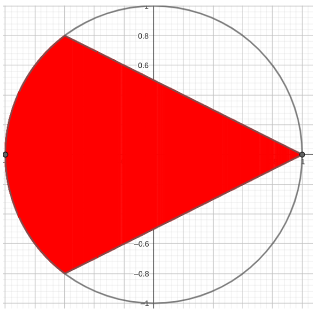


Illustration de l'ensemble Δ_{θ_0}

1. a) Si $R > 1$, alors f converge en particulier sur le disque de rayon $\frac{R+1}{2} > 1$. Donc f converge en 1. C'est à dire $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge.

   b) On a $z^n - 1 = (z - 1)(1 + .. + z^{n-1})$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} a_n z^n - S_N &= \sum_{n=0}^{N} a_n(z^n-1)\\
&= (z-1)\sum_{n=0}^{N} a_n(1+...+z^{n-1})\\
&= (z-1)\sum_{n=0}^{N}\sum_{p=0}^{n-1} a_n z^p\\
&= (z-1)\sum_{p=0}^{N-1}(a_{p+1}+..+a_N)z^p \text{on peut échanger car les sommes sont finis}\\
&= (z-1)\sum_{p=0}^{N-1}(R_p-R_N)z^p\\
&= (z-1)\sum_{p=0}^{N-1} R_p z^p - R_N(z-1)\sum_{p=0}^{N-1} z^p\\
&= (z-1)\sum_{p=0}^{N-1} R_p z^p - R_N(z^N-1)
\end{aligned}$$

c) Comme la série des a_n converge (hypothèse) alors R_N tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$.
En faisant tendre N vers $+\infty$ (les deux termes de gauche convergent, donc la série de terme général $R_n z^n$ converge), on obtient que $f(z) - S = (z-1)\sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n$.

d) Il existe un rang N_0 tel que $|R_n| \leq \epsilon$ car R_n tend vers 0.
On obtient par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}
|f(z)-S| &\leq |z-1|\sum_{n=0}^{N_0}|R_n| + \epsilon|z-1|\sum_{n=N_0+1}^{+\infty}|z|^n\\
&\leq |z-1|\sum_{n=0}^{N_0}|R_n| + \epsilon|z-1|\frac{z^{N_0+1}}{1-|z|}\\
&\leq |z-1|\sum_{n=0}^{N_0}|R_n| + \frac{\epsilon|z-1|}{1-|z|} \text{ car } z\in\Delta_{\theta_0}.
\end{aligned}$$

e)

$$\frac{|z-1|^2}{1-|z|} \leq \frac{2}{\cos(\theta_0)} \iff \frac{\rho\cos(\theta_0)}{2} \leq 1-|z|$$

$$\iff |z|^2 = (1-\rho\cos(\theta))^2 + \rho^2\sin^2(\theta_) \leq 1-\rho\cos(\theta_0) + \frac{\rho^2\cos^2(\theta_0)}{4}$$

On élève au carré car les deux termes sont négatifs

$$\iff 1-2\rho\cos(\theta)+\rho^2 \leq 1-\rho\cos(\theta_0)+\frac{\rho^2\cos^2(\theta_0)}{4}$$

$$\iff -2\cos(\theta)+\rho \leq -\cos(\theta_0)+\frac{\rho\cos^2(\theta_0)}{4}$$

$$\iff \rho \leq 4\frac{2\cos(\theta)-cos(\theta_0)}{4-\cos^2(\theta_0)}$$

On obtient alors $\rho(\theta_0) = \frac{4cos(\theta_0)}{4-\cos^2(\theta_0)}$.
Donc pour z suffisament proche de 1, $\frac{|z-1|}{1-|z|}$ est bornée par $\frac{2}{\cos(\theta_0)}$.
Ainsi pour z suffisament proche de 1 ($|z-1| \leq \epsilon$) , $|f(z)-S| \leq |z-1|\sum_{n=0}^{N_0}|R_n| + \frac{\epsilon|z-1|}{1-|z|} \leq \epsilon(\sum_{n=0}^{N_0}|R_n| + \frac{2}{\cos(\theta_0)})$.
Ainsi le théorème d'Abel est démontré.

2. On reconnait le développement en série entière de Arctan. On a la série de terme générale $\frac{(-1)^n}{2n+1}$ qui converge d'après le critère spécial sur les séries alternées. Donc on a d'après le théorème d'Abel :
$\frac{\pi}{4} = \lim_{x\to 1} Arctan(x) = \lim_{x\to 1}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$

3. On prend $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n = \frac{1}{1+z}$.
La fonction f converge vers $\frac{1}{2}$ lorsque z tend vers 1. Pour autant la série $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n$ ne converge pas.

4. a) On a

$$\begin{aligned}|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k| &\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{k|a_k|}{k}x^k \\ &\leq \frac{\sup_{k>n}(k|a_k|)}{n}\sum_{k=n+1}^{+\infty}x^k \\ &\leq \frac{\sup_{k>n}(k|a_k|)x^{n+1}}{n(1-x)} \\ &\leq \frac{\sup_{k>n}(k|a_k|)}{n(1-x)} \text{ car } x\in]0,1[\text{ et par inégalité triangulaire.}\end{aligned}$$

Donc
$|f(x)-S_n| \leq |\sum_{k=0}^{n}a_k(1-x^k)| + |\sum_{k=n+1}^{+\infty}a_k x^k| \leq (1-x)|\sum_{k=0}^{n}a_k(1+..+x^{k-1})| +$

$\dfrac{\sup_{k>n}(k|a_k|)}{n(1-x)}$.

Or $|\sum_{k=0}^{n} a_k(1+..+x^{k-1})| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k|k$.

D'ou $|f(x)-S_n| \leq (1-x)\sum_{k=0}^{n} |a_k|k + \dfrac{\sup_{k>n}(k|a_k|)}{n(1-x)}$.

b) On a $1-x=\frac{1}{n}$. De plus ka_k tend vers 0, donc d'après le lemme de Cesàro (I.1),
$(1-x)\sum_{k=0}^{n} |a_k|k = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} |a_k|k$ converge vers 0.
Toujours comme ka_k tend vers 0, la borne supérieur est bornée et tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Or $n(1-x)=1$.
Ainsi $|S_n - f(x)|$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.
Or $f(x)$ converge vers S lorsque n tend vers l'infini. Ainsi on a montrer que $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$.

5. a) Si $S \neq 0$, on a qu'à étudier la fonction $f - S$ qui converge vers 0 en 1. Les coefficients de sa somme restent des termes en $O(\frac{1}{n})$.

b) Θ est clairement un espace vectoriel. (combinaison linéaire de séries convergentes et combinaison linéaire de limites qui existent)

c) Si $P = O$ alors $P \in \Theta$. Sinon, P peut s'écrire $P = XQ$ avec Q un autre polynôme. Q est continue sur le segment $[0, 1[$, donc elle est bornée (théorème de Heine). Ainsi $|P(x^n)| \leq Mx^n$.
Ainsi on obtient que $\sum_{n\geq 0} a_n M x^n$ converge absolument (définition du rayon de convergence).
Donc $\sum_{n\geq 0} a_n P(x^n)$ converge absolument (par comparaison).
$|\sum_{n\geq 0} a_n P(x^n)| \leq Mf(x)$. Or f converge vers 0 en 1. Ainsi $\lim_{x\to 1^-} \sum_{n\geq 0} a_n P(x^n) = 0$.
Donc $P \in \Theta$

d) En notant $P = \sum_{k=0}^{d} b_k x^k$.

On a $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n P(x^n) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{d} b_k x^n x^{nk} = \sum_{k=0}^{d}\sum_{n=0}^{+\infty} b_k x^n x^{nk}$ on peut échanger les sommes car il y a un nombre finis de sommes convergents.

Or $\sum_{k=0}^{d}\sum_{n=0}^{+\infty} b_k x^n x^{nk} = \sum_{k=0}^{d} b_k \dfrac{1}{1-x^{d+1}} = \sum_{k=0}^{d} b_k \dfrac{1}{(1-x)(1+..+x^d)}$

Ainsi $(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} x^n P(x^n) = \sum_{k=0}^{d} \dfrac{b_k}{(1+..+x^d)} \xrightarrow[x\to 1]{} \sum_{k=0}^{d} \dfrac{b_k}{d+1}$

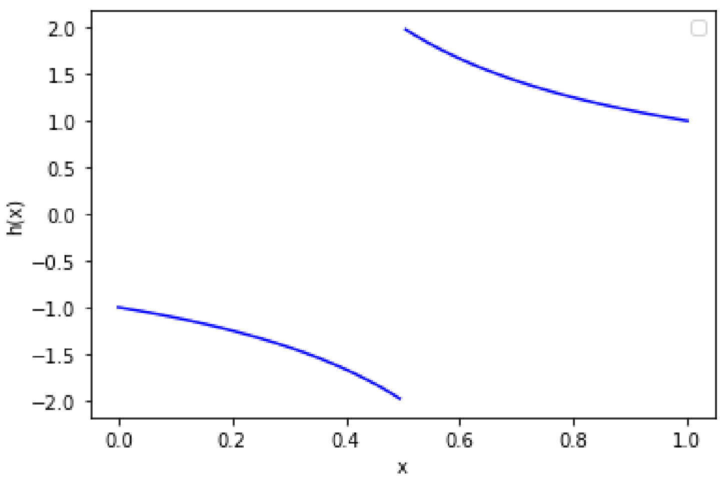
On a bien $\lim_{x\to 1}(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} x^n P(x^n) = \int_0^1 P(t)dt$.

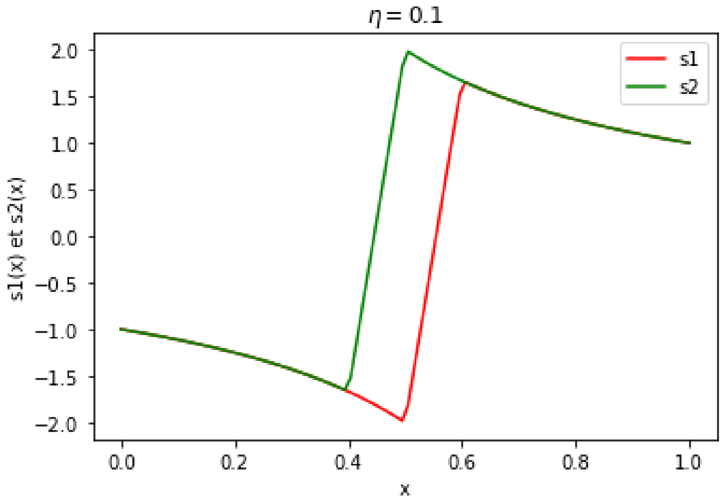
e) Soit $N \in \mathbb{N}$,montrons que S_N converge vers 0 :
Si $g \in \Theta$, lorsque l'on évalue en $x_N = \sqrt[\frac{1}{N}]{\frac{1}{2}}$ on déduit que $\sum_{n \geq 0} a_n g(x^n)$ converge. Or $g(x^n) = 1 \iff n \leq N$.
Donc $S_N = (\sum_{n \geq 0} a_n g(x^n))(x_N)$. Or lorsque N tend vers $+\infty$, x_N tend vers 1. En faisant tendre N vers l'infini, on obtient donc que S_N converge vers 0. Ainsi le théorème Taubérien fort est démontré si $g \in \Theta$.

f) On fixe η. On pose les deux abscisses $x_1 = \frac{1}{2} - \eta$ et $x_2 = \frac{1}{2} + \eta$.
On constate d'abord que la limite à gauche en $\frac{1}{2}$ vaut -2, et 2 à droite.
On pose d_1 la segment qui relie les points $(\frac{1}{2}, -2)$ et $(x_2; h(x_2))$. De même on pose d_2 la segment qui relie les points $(x_1; h(x_1))$ et $(\frac{1}{2}, 2)$.
On définit ainsi les fonctions :

$$s_1 = \left| \begin{array}{ll} h(x) & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ h(x) & \text{si } x > x_2 \\ d_1(x) & \text{sinon} \end{array} \right. \qquad s_2 = \left| \begin{array}{ll} h(x) & \text{si } x < x_1 \\ h(x) & \text{si } x > \frac{1}{2} \\ d_2(x) & \text{sinon} \end{array} \right.$$

s_1 et s_2 sont continues par morceaux. Les droites d_1 et d_2 sont choisies de telles sortes que s_1 et s_2 soient continues sur $[0, 1]$.
On a $s_1 \leq h$ sur $[0, \frac{1}{2}[\cup[x_2, 1]$. De plus h est décroissante sur $]\frac{1}{2}, x_2[$ (car de dérivée négative). Donc sur cette intervalle on a
$h(x) \geq h(x_2)\ s_1(x)$.
On a donc bien $s_1 \leq h$. De même on obtient bien $s_1 \leq h \leq s_2$.
Cela pour tout η.
$\int_0^1 (s_2(x) - s_1(x))dx = \int_{x_1}^{x_2} (s_2(x) - s_1(x))dx$. Lorsque η tend vers 0, l'intégrale tend vers 0. Ainsi en choisissant η suffisament petit on a $s_1 \leq h \leq s_2$ et $\int_0^1 (s_2(x) - s_1(x))dx \leq \epsilon$.





g) s_1 et s_2 sont deux fonctions continues sur le segment $[0, 1]$. Donc d'après le théorème d'approximation de Weirstrass, s_1 et s_2 sont les limites uniformes de polynômes. D'ou l'existence des polynômes T_1 et T_2.

h) Par définition de P_1 et P_2, on a $P_1(0) = P_2(0) = 0$ et $P_1(1) = P_2(1) = 1$.
Aussi par définition, $Q(x) = T_2(x) - T_1(x) + 2\epsilon$.
On a ainsi $\displaystyle\int_0^1 Q(x)dx \leq 2\epsilon + \int_0^1 T_2(x) - T_1(x)dx$
Or $T_2(x) - T_1(x) \leq s_2(x) - s_1(x) + 2\epsilon$.
On a bien $\displaystyle\int_0^1 Q(x)dx \leq 5\epsilon$.
On a de plus , $T_2(x) - T_1(x) \geq s_2(x) - s_1(x) - 2\epsilon$.
Donc $\displaystyle\int_0^1 Q(x)dx \geq 0$. On a donc bien $0 \leq \displaystyle\int_0^1 Q(x)dx \leq 5\epsilon$.

Pour la dernière proposition on a : $P_1 \leq g \leq P_2 \iff T_1 - \epsilon \leq h \leq T_2 + \epsilon$ car $\frac{1}{x(1-x)} > 0$. Or cela est vrai par définition de T_1 et T_2.

On a donc montrer les quatres assertions.

i) Les deux sommes existent bien car P_1 est un polynôme qui s'annule en 0 (II.5.(c)) et dans la somme de terme général $a_n g(x^n)$ on n'a qu'un nombre fini de termes (pour n suffisamment grand $x^n < \frac{1}{2}$ donc après ce rang les termes sont nuls).
$|\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n P_1(x^n)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n||g(x^n) - P_1(x^n)|$
Or $|g(x^n) - P_1(x^n)| \leq P_2(x^n) - P_1(x^n) \leq x^n(1-x)(1+..+x^{n-1})Q(x^n)$.
Donc $|\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n P_1(x^n)| \leq (1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| n x^n Q(x^n)$.
Par définition du grand O(hypothèse sur (a_n) on a un réel M tel

que $\forall n \in \mathbb{N}, na_n \leq M$).
On a donc bien
$|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n P_1(x^n)| \leq M(1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} x^n Q(x^n)$.

j) D'après II.5.(d) on sait que $M(1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} x^n Q(x^n)$ converge lorsque x tend vers 1.
Or $P \in \Theta$, donc $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n P_1(x^n)$ converge vers 0 lorsque x tend vers 1.
Ainsi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n)$ converge vers 0 lorsque x converge vers 1. De plus lorsque $x < 1$, on sait que (expliqué précédemment) la somme converge.
Donc $g \in \Theta$. Ainsi d'après II.5.(e), le théorème Taubérien fort a été démontré.

III Variantes continues du lemme de Cesàro et du théorème d'Abel

1. Soit $\epsilon > 0$, il existe $A > 0$ tels que $\forall x \geq A$, $|f(x) - l| \leq \epsilon$.
   On a donc $|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt - l| = \frac{1}{x}\int_0^A |f(t) - l|dt + \frac{1}{x}\int_A^x \epsilon dt \leq 2\epsilon$ pour x suffisement grand
2. Avec la fonction sin on obtient que $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$ converge vers 0. Pour autant la fonction sinus ne converge pas vers 0.
3. En posant $g : x \mapsto f(x) - xl$ on se ramène au cas ou $l = 0$.
   Soit $\epsilon > 0$, il existe un rang A tel que $\forall x \geq A, |g(x+1) - g(x)| \leq \epsilon$.
   On a donc $|g(x+A)| \leq \epsilon + |g(x+A-1)| \leq ... \leq \lfloor x \rfloor \epsilon + |g(A + (x - \lfloor x \rfloor))|$.
   On note $\epsilon' = \sup_{A \leq x \leq A+1} g(x)$ qui existe car l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.
   Ainsi $|\frac{g(x+A)}{x}| \leq \epsilon + \frac{\epsilon'}{x} \leq 2\epsilon$ pour x suffisament grand.
   On a ainsi montrer que $\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$.
   Donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = l$.
4. On note $g : (x,t) \mapsto e^{-tx} f(x)$. Pour $t \in \mathbb{R}^{+*}$, g est une fonction continue pour x. De plus $|g(x,t)| \leq e^{-tx}M$ ou M est une majoration de $|f|$. Ce majorant est intégrable sur $[0, +\infty[$. Donc $\mathcal{L}(f)$ est bien définie sur $\mathbb{R}^{+*}$

   Appliquons le théorème de Leibniz pour une intégrale à paramètre sur l'intervalle $[a, +\infty[$ pour $a \in \mathbb{R}^{+*}$
   - $x \mapsto g(x,t)$ est bien une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ pour $t \in [a, +\infty[$
   -$t \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$. $\frac{\partial g}{\partial t}(x,t) = -xg(x,t)$ qui est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ (même raison que précédemment).

- $|\frac{\partial g}{\partial t}(x,t)| \leq xf(x)e^{-ax}$.On a majoré par une fonction qui est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ (même raison que précédemment) et qui est indépendante de t.
Donc $\mathcal{L}(f)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$, de dérivée $\displaystyle\int_0^{+\infty} -xe^{-tx}f(x)dx$. Cela pour tout $a>0$.
Donc $\mathcal{L}(f)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$,de dérivée $\displaystyle\int_0^{+\infty} -xe^{-tx}f(x)dx$.

5. a) On constate que $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt - \int_0^{x} f(t)dt$.
D'après le théorème fondamental de l'analyse, F est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ avec $F'(x) = -f(x)$.
De plus F est bornée car F s'écrit comme une constante plus un terme qui converge.

   b) Le crochet $[-F(x)e^{-xt}]_0^{+\infty}$ est bien défini et vaut $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$.
On peut donc effectuer une intégration par parties en intégrant f et dérivant e^{-xt} (l'intégrale converge d'après 4, donc 2 des 3 termes sont convergents) :
$\mathcal{L}(f)(t) = [-F(x)e^{-xt}]_0^{+\infty} - \displaystyle\int_0^{+\infty} tF(x)e^{-xt}dx$
On veut donc montrer que $\displaystyle_{t\to 0^+}\int_0^{+\infty} tF(x)e^{-xt}dx = 0$
On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$. Donc d'après le lemme de Cesàro continu :
$\displaystyle\lim_{\frac{1}{t}\to+\infty} t\int_0^{\frac{1}{t}} F(x)dx = 0.$
Alors $\displaystyle\lim_{\frac{1}{t}\to+\infty} t\int_0^{\frac{1}{t}} F(x)e^{-xt}dx = 0.$
De plus $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} t\int_{\frac{1}{t}}^{+\infty} F(x)e^{-xt}dx = 0.$
Ainsi on a bien $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \mathcal{L}(f)(t) = \int_0^{+\infty} f(x)dx.$

6. Avec $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$, $f \in \mathcal{C}_b^0([0,+\infty])$. On peut donc étudier $\mathcal{L}(f)$.
On a d'après III.4), $\mathcal{L}(f)'(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} -e^{-tx}\sin(x)dx$.
On obtient (on passe par la partie imaginaire) $\mathcal{L}(f)'(t) = \frac{-1}{1+t^2}$. Donc $\mathcal{L}(f)(t) = -Arctan(x) + c$.
Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx = c$ d'après III.5.b).
Or $|\frac{\sin(x)}{x}| \leq 1$ donc
$|\mathcal{L}(f)(t)| \leq \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}dx \leq \frac{1}{t}$. Comme $\mathcal{L}(f)$ converge vers 0 en $+\infty$, on déduis que $c = \frac{\pi}{2}$.
On a donc bien démontré que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx = \frac{\pi}{2}$

7. On ne va pas le montrer ici mais on l'admet, si P est un polynôme tels

que P(0)=0 alors $\int_0^{+\infty} f(x)P(e^{-tx})dx$ est bien définie.(l'idée réside dans le fais que l'on somme des intégrales convergentes, et il est facile à montrer que cela est vrai pour les monômes).
De même on suppose que $\int_A^{+\infty} f(x)g(e^{-tx})dx$ est bien définie pour A assez grand. (on justifie comme dans II comme quoi on se retrouve avec une intégrale finie.)
On a :

$$\begin{aligned}
|\int_A^{+\infty} f(x)g(e^{-tx})dx - \int_A^{+\infty} f(x)P_1(e^{-tx})dx| &\leq \int_A^{+\infty} |f(x)|(P_2(e^{-tx}) - P_1(e^{-tx}))dx \\
&\leq \int_A^{+\infty} |f(x)|e^{-tx}(1-e^{-tx})Q(e^{-tx})dx \\
&\leq \int_A^{+\infty} |xf(x)|e^{-tx}\frac{1-e^{-tx}}{x}Q(e^{-tx})dx \\
&\leq M\int_A^{+\infty} e^{-tx}\frac{1-e^{-tx}}{x}Q(e^{-tx})dx \text{ car } f(t) = O(\frac{1}{t})
\end{aligned}$$

De plus on a $\frac{1-e^{-tx}}{x} = t + \sum_{n+2}^{+\infty}(-1)^n + 1\frac{t^n x^{n-1}}{n!} \leq t$.
Donc

$$\begin{aligned}
\int_A^{+\infty} e^{-tx}\frac{1-e^{-tx}}{x}Q(e^{-tx})dx &\leq \int_A^{+\infty} e^{-tx}tQ(e^{-tx})dx \\
&\leq \int_0^{e^{-tA}} Q(u)du \text{ par le changement de variable } u = e^{-tx} \\
&\leq \int_0^1 Q(u)du \text{ par le changement de variable} \\
&\text{car Q est un polynôme positif est } e^{-tA} \leq 1
\end{aligned}$$

On a donc bien
$|\int_A^{+\infty} f(x)g(e^{-tx})dx - \int_A^{+\infty} f(x)P_1(e^{-tx})dx| \leq \int_0^1 Q(u)du$

FIN