Proposition de corrigé de l'épreuve de mathématiques D U - Filière MP 2024.

Par *Eloi Descamps*

Version du 23 mai 2025

N.B. : Si vous repérez des erreurs de français ou de mathématiques, ou si vous avez des questions ou des suggestions, n'hésitez pas à envoyer un e-mail à :
eloi.descamps@u-paris.fr

Erratum : Je remercie François de Fouchécour pour m'avoir signalé une erreur de raisonnement dans la question 10 d'une version antérieure. Cette erreur a été corrigée, de même que de nombreuses fautes typographiques mineures.

Tout au long de ce sujet, la notation $A \overset{\text{déf}}{=} B$ indique que le symbole A est défini comme étant égal à B. Rappelons que la série numérique

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!}$$

converge, pour tout nombre réel $\alpha \in \mathbb{R}$, vers un nombre réel strictement positif que l'on note e^α et que l'on appelle l'*exponentielle de* α. L'application $\alpha \mapsto e^\alpha$ établit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_{>0}$ qui satisfait à la relation : pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$e^{\alpha+\beta} = e^\alpha e^\beta.$$

Le but de ce sujet est de donner une preuve [1] du résultat suivant, qui est un cas particulier du *théorème d'Hermite-Lindemann-Weierstrass* :

Théorème 1. *Soit $r \geq 2$ un entier. Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{Q}$ sont des nombres rationnels distincts, alors les nombres réels $e^{\alpha_1}, \cdots, e^{\alpha_r}$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$.*

Chemin faisant, nous établirons quelques propriétés de nature arithmétique des séries entières à coefficients rationnels qui sont solutions d'une équation différentielle.

A. Quelques conséquences

1. Pour un nombre rationnel strictement positif $a \in \mathbb{Q}_{>0}$, notons $\log(a)$ le seul nombre réel satisfaisant $e^{\log(a)} = a$. Déduire du théorème 1 que $\log(a)$ est irrationnel pour tout nombre rationnel strictement positif $a \neq 1$.

Raisonnons par l'absurde : si $a \neq 1$ et $\log(a) = q \in \mathbb{Q}$ est un rationnel, alors en passant à l'exponentielle, on obtient $a = e^q$. Ceci est équivalent à $e^q - ae^0 = 0$. Comme $q \neq 0$ (puisque $a = e^q \neq 1$), c'est une relation de liaison à coefficients dans $\mathbb{Q}$ non triviale entre e^0 et e^q. Le théorème 1 affirme qu'une telle relation ne peut exister : contradiction. Ainsi $\log(a)$ est irrationnel.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{Q}^*$ un nombre rationnel non nul. Déduire du théorème 1 que, pour tout polynôme non nul $P \in \mathbb{Q}[X]$, on a $P(e^\alpha) \neq 0$.

On raisonne par contraposée. Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P(e^\alpha) = 0$. Montrons que P est nécessairement le

1. suivant l'article "An alternative Proof of the Lindemann Weierstrass Theorem" de F. Beukers, J.P. Bézivin et P. Robba (*Amer. Math. Monthly* **97** (1990), 193-197).

polynôme nul. En explicitant les coefficients de $P = \sum_{k=0}^{n} p_k X^k$, on obtient l'équation

$$\sum_{k=0}^{n} p_k e^{k\alpha} = 0.$$

Quitte à rajouter des coefficients nuls sur P, on peut supposer $n \geq 1$. Ceci est une relation de liaison entre les réels $e^0, e^\alpha, e^{2\alpha}, \ldots, e^{n\alpha}$ avec $0, \alpha, 2\alpha, \ldots, n\alpha$ distincts, car α est non nul. Le théorème 1 assure que cette relation est obligatoirement triviale, ce qui donne $P = 0$. Ainsi, si $P \neq 0$, $P(e^\alpha) \neq 0$.

On dit que le nombre e^α est transcendant.

B. Séries entières et fractions rationnelles

Une *série entière à coefficients rationnels* est une suite $(c_n)_{n\geq 0}$ de nombres rationnels. On munit l'ensemble de telles suites des opérations d'addition et de multiplication

$$(c_n)_{n\geq 0} + (d_n)_{n\geq 0} = (c_n + d_n)_{n\geq 0},$$
$$(c_n)_{n\geq 0} \cdot (d_n)_{n\geq 0} = \left(\sum_{k=0}^{n} c_k d_{n-k}\right)_{n\geq 0}.$$

L'élément neutre pour l'addition est la suite $(0)_{n\geq 0}$ et l'élément neutre pour la multiplication est la suite $(1, 0, 0, \cdots)$. En pratique, plutôt que comme une suite, on pensera à une série entière à coefficients rationnels $(c_n)_{n\geq 0}$ comme une expression de la forme

$$f(X) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n.$$

On voit X comme une variable "formelle", c'est-à-dire que l'on ne se soucie pas des propriétés de convergence (si l'on remplace X par un nombre réel α, la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \alpha^n$ peut être convergente ou divergente). Avec cette notation, les opérations d'addition et multiplication de deux séries entières $f(X) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n$ et $g(X) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n X^n$ deviennent

$$(f+g)(X) = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n + d_n) X^n,$$
$$(f \cdot g)(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} c_k d_{n-k}\right) X^n.$$

On écrit simplement 0 et 1 pour les éléments neutres pour l'addition et la multiplication. La *dérivée* d'une série entière f comme ci-dessus est la série entière

$$f'(X) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} X^n.$$

L'opération de dériver une série entière est linéaire et satisfait à la règle de Leibniz

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

On note $\mathbb{Q}[\![X]\!]$ l'ensemble des séries entières à coefficients rationnels. On peut voir les polynômes à coefficients rationnels comme le sous-ensemble $\mathbb{Q}[X] \subset \mathbb{Q}[\![X]\!]$ formé des séries entières telles qu'il existe un entier $d \geq 0$ satisfaisant à $c_n = 0$ pour tout $n > d$.

3. Soit $f(X) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n \in \mathbb{Q}[\![X]\!]$ une série entière dont les coefficients c_n sont des nombres entiers. Montrer que s'il existe un nombre réel $\alpha \geq 1$ tel que la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \alpha^n$ converge, alors f est un polynôme.

Si la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\alpha^n$ converge, son terme général converge vers 0. Notamment, par définition de la limite, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$, tel que pour $n \geq N$, $|c_n\alpha^n| \leq 1/2$. Comme $\alpha \geq 1$, cela donne, $|c_n| \leq 1/2$, puis enfin comme c_n est un entier, on a nécessairement $c_n = 0$. Ainsi, $\forall n \geq N,\ c_n = 0$: $\boxed{f \text{ est un polynôme.}}$

4. Soit $Q \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme à coefficient rationnels dont 0 n'est pas racine. Montrer qu'il existe une unique série entière $f \in \mathbb{Q}[\![X]\!]$ satisfaisant à $Q \cdot f = 1$.
   Montrer que si Q est à coefficients entiers et que son terme constant c_0 vaut 1 ou -1 alors cette unique série entière f est à coefficients entiers.

On mentionne rapidement que, puisque les définitions des opérations sur les séries entières sont les mêmes que celles sur les polynômes, alors celles-ci vérifient automatiquement les mêmes propriétés algébriques : $(\mathbb{Q}[\![X]\!], +)$ est un groupe abélien et $(\mathbb{Q}[\![X]\!], \cdot)$ est un monoïde commutatif. Notamment l'associativité du produit donne automatiquement l'unicité de f. En effet, si f_1 et f_2 sont des inverses de Q alors on a $f_1 = f_1 \cdot (Q \cdot f_2) = (f_1 \cdot Q) \cdot f_2 = f_2$.
Pour l'existence, on écrit $Q = \sum_{k=0}^{\infty} c_k X^k$ (la suite $(c_k)_{k\leq 0}$ étant nulle à partir d'un certain rang) et on cherche f sous la forme $f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$. La condition $Q \cdot f = 1$ signifie $c_0a_0 = 1$ et $\forall k \geq 1,\ \sum_{i=0}^{k} c_i a_{k-i} = 0$, ce qui donne le système infini suivant

$$\begin{cases} c_0a_0 = 1 \\ c_1a_0 + c_0a_1 = 0 \\ c_2a_0 + c_1a_1 + c_0a_2 = 0 \\ c_3a_0 + c_2a_1 + c_1a_2 + c_0a_3 = 0 \\ \quad\vdots \end{cases}$$

Les inconnues étant les coefficients a_i, ce système est déjà sous forme triangulaire, et peut donc être inversé : $a_0 = 1/c_0$, $a_1 = -c_1/c_0^2$, $a_2 = c_1^2/c_0^3 - c_2/c_0^2 \dots$ Ainsi, cela définit bien une série entière f qui satisfait à $Q \cdot f = 1$. $\boxed{\text{Ainsi } Q \text{ possède un unique inverse } f \text{ dans } \mathbb{Q}[\![X]\!].}$
On note de plus que lors de cette résolution, les seules divisions nécessaires sont celles par c_0. Ainsi, si $c_0 = \pm 1$, toutes les expressions des coefficients a_i seront sans dénominateur.
$\boxed{\text{Donc si } Q \text{ est à coefficients entiers avec } c_0 = \pm 1 \text{ alors } f \text{ est à coefficients entiers.}}$

Rappelons que $\mathbb{C}(X)$ désigne l'ensemble des fractions rationnelles P/Q avec $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ et Q non nul. On considérera le sous-ensemble $\mathbb{Q}(X) \subset \mathbb{C}(X)$ formé des fractions rationnelles P/Q avec $P, Q \in \mathbb{Q}[X]$, que l'on appellera *fractions rationnelles à coefficients rationnels*. Pour un nombre complexe α et un polynôme non nul $R \in \mathbb{Q}[X]$, posons

$$\mathrm{ord}_\alpha(R) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \text{ n'est pas racine de } R, \\ \text{multiplicité de } \alpha & \text{si } \alpha \text{ est racine de } R. \end{cases}$$

Soit P/Q une fraction rationnelle non nulle. On dit que $\alpha \in \mathbb{C}$ est un pôle de P/Q si l'inégalité $\mathrm{ord}_\alpha(Q) > \mathrm{ord}_\alpha(P)$ est satisfaite. L'entier $\mathrm{ord}_\alpha(Q) - \mathrm{ord}_\alpha(P)$ s'appelle alors l'*ordre du pôle*. La fraction rationnelle nulle n'a pas de pôle.

5. Monter que si 0 n'est pas un pôle de $P/Q \in \mathbb{Q}(X)$, alors il existe une unique série entière à coefficients rationnels $g \in \mathbb{Q}[\![X]\!]$ telle que $P = Q \cdot g$.
   Monter que l'application $P/Q \mapsto g$ est compatible avec l'addition et la multiplication dans $Q(X)$ et dans $\mathbb{Q}[\![X]\!]$, et qu'elle envoie la dérivée $(P/Q)' = (P'Q - PQ')/Q^2$ sur la série entière dérivée g'.

Si 0 n'est pas un pôle de P/Q alors en supposant P/Q sous forme réduite, 0 n'est pas une racine de Q. On note de même que si P_1/Q_1 et P_2/Q_2 sont deux écritures de la même fraction, alors par simplification des facteurs communs les deux équations $P_1 = Q_1 \cdot g$ et $P_2 = Q_2 \cdot g$ sont équivalentes (notons que le produit est intègre sur $\mathbb{Q}[\![X]\!]$ pour les mêmes raisons que sur $\mathbb{Q}[X]$; il suffit de regarder les coefficients non nuls de plus petit degré pour se convaincre qu'un produit de séries entières non nulles ne peut être nul). Ainsi ce qui suit est indépendant du représentant choisi pour la fraction.

Existence : Par la question 4, il existe $f \in \mathbb{Q}[\![X]\!]$ tel que $Q \cdot f = 1$. Il suffit alors de poser $g = P \cdot f$, car on a bien $\boxed{P = Q \cdot g}$.

Unicité : Supposons qu'il existe deux séries entières $g_1, g_2 \in \mathbb{Q}[\![X]\!]$ telles que $P = Q \cdot g_1 = Q \cdot g_2$. Alors, en posant comme précédemment $f \in \mathbb{Q}[\![X]\!]$ tel que $1 = Q \cdot f$, on a $f \cdot Q \cdot g_1 = f \cdot Q \cdot g_2$, ce qui donne $\boxed{g_1 = g_2}$.

Par ce qui a été dit en début de réponse, l'application $P/Q \mapsto g$ est bien défini, car l'image ne dépend pas du représentant choisi. Soient $P/Q, P_1/Q_1, P_2/Q_2 \in \mathbb{Q}(X)$ et g, g_1, g_2 leurs images. On a alors les relations $P = Qg$, $P_1 = Q_1 g_1$, $P_2 = Q_2 g_2$. On vérifie les compatibilités ainsi :

Somme : On a $Q_1Q_2(g_1 + g_2) = Q_2(Q_1 g_1) + Q_1(Q_2 g_2) = Q_2 P_1 + Q_1 P_2$. Comme $P_1/Q_1 + P_2/Q_2 = (P_1Q_2 + P_2Q1)/Q1Q2$, $g_1 + g_2$ satisfait l'équation caractérisant l'image de $P_1/Q_1 + P_2/Q_2$.
Donc $\boxed{P/Q \mapsto g \text{ est compatible avec la somme.}}$

Produit : On a $Q_1Q_2(g_1 \cdot g_2) = (Q_1 g_1)(Q_2 g_2) = P_1 P_2$. Comme $P_1/Q_1 \cdot P_2/Q_2 = P_1P_2/Q1Q2$, $g_1 \cdot g_2$ satisfait l'équation caractérisant l'image de $P_1/Q_1 \cdot P_2/Q_2$.
Donc $\boxed{P/Q \mapsto g \text{ est compatible avec le produit.}}$

Dérivation : En dérivant l'équation caractérisant g, on obtient $P' = Q'g + Qg'$. On a ensuite $Q^2 g' = Q(Qg') = QP' - Q'Qg = QP' - Q'P$. Comme $(P/Q)' = (P'Q - Q'P)/Q^2$, g' satisfait l'équation caractérisant l'image de $(P/Q)'$.
Donc $\boxed{P/Q \mapsto g \text{ est compatible avec la dérivation.}}$

On dit que g est le *développement en série entière* (parfois abrégé *développement en série* ou encore *développement*) de la fraction rationnelle P/Q et on écrit $P/Q = g$.

6. Soit $Q \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme à coefficients rationnels de terme constant égal à 1. Montrer qu'il existe un entier $b > 1$ tel que $Q(bX)$ soit à coefficient entier.

En notant $Q = \sum_{k=0}^{n} \frac{p_k}{q_k} X^k$ (avec $q_k \in \mathbb{N}^*$), il suffit de poser $b = \prod_{k=1}^{n} q_k \geq 1$. En effet

$$Q(bX) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p_k}{q_k} b^k X^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{q_k} b b^{k-1} X^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} p_k \left(\prod_{i=1, i\neq k}^{n} q_i \right) b^{k-1} X^k$$

qui est bien à $\boxed{\text{coefficients entiers}}$.

On dit qu'une série entière $f(X) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n \in \mathbb{Q}[\![X]\!]$ est *globalement bornée* s'il existe des entiers $A, B \geq 1$ tels que

$$Af(Bx) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (B^n A c_n) X^n$$

soit une série entière à coefficients entiers.

7. Montrer que si $f \in \mathbb{Q}[\![X]\!]$ est le développement en série entière d'une fraction rationnelle à coefficients rationnels, alors f est globalement bornée.

On commence par affirmer que l'application $P/Q \mapsto g$ est compatible avec l'évaluation par BX pour $B \in \mathbb{Q}$. Cela se remarque directement en évaluant l'équation caractéristique de g en BX. En factorisant P par le dénominateur commun de ses coefficients, on peut écrire $P = \frac{1}{a} P_1$ avec $a \in \mathbb{N}^*$ et $P_1 \in \mathbb{Z}[X]$. Si on note $c_0 \in \mathbb{Z}^*$ le coefficient constant de Q ($c_0 \neq 0$ car 0 n'est pas racine de Q par hypothèse), alors Q/c_0 satisfait les hypothèses de la question 6 donc il existe $B \geq 1$ tel que $Q(BX)/c_0 \in \mathbb{Z}[X]$. En notant $\tilde{f}$ l'inverse de $Q(BX)/c_0$ qui est a coefficient entier par la question 4, on obtient que

$$c_0 a f(BX) = c_0 a \frac{P(BX)}{Q(BX)} = \frac{P_1(BX)}{Q(BX)/c_0} = P_1(BX)\tilde{f}$$

est une série entière à coefficient entier (comme produit de séries à coefficient entiers). En posant $A = c_0 a$, $Af(BX)$ est à coefficients entiers, c'est-à-dire que $\boxed{f \text{ est globalement bornée}}$.

8. Montrer que la série entière

$$\sum_{m=0}^{\infty} X^{m^2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n,$$

où $c_n = 1$ si n est le carré d'un entier $m \geq 0$ et $c_n = 0$ autrement, n'est *pas* le développement en série entière d'une fraction rationnelle.

Soit $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme avec $c_0 \neq 0$ et notons $f = \sum_{k=0}^{\infty} X^{k^2} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k X^k$. Vérifions que Qf ne peut pas être un polynôme. En effet, pour $N \geq \max(n, 2)$, le coefficient de degré N^2 du produit est

$$\sum_{k=0}^{N^2} b_k c_{N^2-k} = \sum_{k=0}^{n} b_k c_{N^2-k}$$

Lorsque k varie entre 0 et n, $N^2 - k$ prend les valeurs $[\![N^2 - n, N^2]\!]$. Or puisque $N \geq \max(n, 2)$, $N^2 - n > (N-1)^2$ ainsi la seule valeur de $[\![N^2 - n, N^2]\!]$ qui est un carré est N^2. Puisque c_k est nul, si k n'est pas un carré, on en déduit que le coefficient de degré N^2 du produit est $b_0 c_{N^2} = b_0 \neq 0$. Ceci valant pour tout $N \geq \max(n, 2)$, le produit a une infinité de coefficients non nuls : ce n'est pas un polynôme.
Comme un expression de la forme $P = Qf$ où P/Q est une fraction rationnelle sans pôle en 0, n'est pas possible, f n'est pas le développement en série d'une fraction rationnelle.

On définit la *primitive* d'une série entière $f(X) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n$ comme la série entière

$$\int_0^X f(t)\mathrm{d}t \overset{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} X^{n+1}$$

9. Donner un exemple d'un développement en série d'une fraction rationnelle dont la primitive n'est pas le développement d'une fraction rationnelle.

On considère la série $f(X) = \sum_{k=0}^{\infty} X^k$. Un calcul rapide montre que $f(X) = \frac{1}{1-X}$. En effet par définition du produit de deux séries,

$$(1-X)\sum_{k=0}^{\infty} X^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (1-1)X^k = 1$$

Ainsi f est le développement en série d'une fraction rationnelle. Cependant, si on note $F(X) = \sum_{k=1}^{\infty} X^n/n$ la primitive de $f(X)$, on vérifie que F n'est pas globalement bornée. En effet pour tout entier $A, B \geq 1$, en considérant $n \in \mathbb{N}$ premier avec A et B, AB^n/n n'est pas un entier. Donc la série $AF(BX)$ n'est pas à coefficients entiers. La question 7 permet alors de conclure que F n'est pas le développement d'une fraction rationnelle.

10. (*Question plus difficile*) Soit f le développement en série d'une fraction rationnelle $P/Q \in \mathbb{Q}(X)$ dont tous les pôles sont des nombres rationnels. Supposons que la primitive $\int_0^X f(t)\mathrm{d}t$ soit globalement bornée. Montrer que $\int_0^X f(t)\mathrm{d}t$ est alors le développement en série entière d'une fraction rationnelle dans $\mathbb{Q}(X)$.

Commençons par affirmer que l'ensemble des séries entières globalement bornées forme un sous $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de $\mathbb{Q}[\![X]\!]$. En effet si $f_1, f_2 \in \mathbb{Q}[\![X]\!]$ sont globalement bornées et si $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{Q}$. Alors en notant $g = \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2$, $\mu_1 = p_1/q_1$, $\mu_2 = p_2/q_2$ $(p_1, q_1, p_2, q_2 \in \mathbb{Z})$ et $A_1, A_2, B_1 B_2 \geq 1$ tels que $A_1 f_1(B_1 X)$ et $A_2 f_2(B_2 X)$ soient à coefficients entiers, il suffit de poser $A = A_1 A_2 q_1 q_2$ et $B = B_1 B_2$ pour que

$$Ag(BX) = A_1 A_2 q_1 q_2 \left(\frac{p_1}{q_1} f_1(B_1 B_2 X) + \frac{p_2}{q_2} f_2(B_1 B_2 X) \right) = A_2 q_2 A_1 f_1(B_2 B_1 X) + A_1 q_1 A_2 f_2(B_1 B_2 X)$$

soit à coefficients entiers.

Si les pôles de P/Q sont des nombres rationnels alors on peut factoriser Q sous la forme $Q = \prod_{k=1}^{n} (X - x_k)^{\alpha_k}$, les x_k étant des nombres rationnels non nuls distincts. Il suit, par une décomposition en élément simple que P/Q peut s'écrire sous la forme

$$\frac{P}{Q} = R + \sum_{k=1}^{r} \frac{C_k}{(X - y_k)^{\beta_k}} + \sum_{k=1}^{m} \frac{D_k}{(X - x_k)}$$

Dans cette expression, $R \in \mathbb{Q}[X]$ est le polynôme obtenu par la division euclidienne de P par Q. De plus, nous avons séparé les éléments simples à la puissance 1 (seconde somme) et ceux d'une puissance plus

grande (on prend $\beta_k \geq 2$). Les $C_k, D_k \in \mathbb{Q}$ sont des constantes, les y_k prennent les valeurs des x_k avec des répétitions possibles.

Les deux premiers termes peuvent s'intégrer par des fractions rationnelles, alors que la dernière somme ne peut pas s'intégrer de la sorte. Montrons alors que les coefficients D_k sont nécessairement nuls, ce qui donne

$$\int_0^X \frac{P}{Q}(t)\mathrm{d}t = \int_0^X R(t)\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{1-\beta_k} \frac{C_k}{(X-y_k)^{\beta_k - 1}}$$

impliquant que $\int_0^X f(t)$ est le développement en série d'une fraction rationnelle.

Montrons maintenant que les coefficients D_k sont tous nuls. Puisque les deux premiers termes dans la décomposition en éléments simples de P/Q s'intègrent en fractions rationnelles, leur développement est globalement borné par la question 7. La stabilité par combinaison linéaire prouvé au début de cette réponse assure que si la primitive de f est globalement bornée, alors $\sum_{k=1}^{m} \frac{D_k}{(X-x_k)}$ aussi. Or au vu des calculs faits en question 9

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{D_k}{X-x_k} = -\sum_{k=1}^{m} \frac{D_k}{x_k} \frac{1}{1-X/x_k} = -\sum_{k=1}^{m} \frac{D_k}{x_k} \sum_{n=0}^{\infty} (X/x_k)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{D_k}{x_k^{n+1}} \right) X^n$$

Ceci se primitive en

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{m} \frac{D_k}{x_k^n} \right) X^n$$

Puisque ce terme est globalement borné, il existe deux entiers strictement positifs A et B tels que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{A}{n} \sum_{k=1}^{m} \frac{D_k B^n}{x_k^n} \in \mathbb{Z}$$

On introduit Δ un dénominateur commun des $D_k \in \mathbb{N}^*$ et $X \in \mathbb{N}^*$ un dénominateur commun des $1/x_k$, de sorte que $\Delta D_k \in \mathbb{Z}$ et $X/x_k \in \mathbb{Z}^*$ pour tout $k \in [\![1, m]\!]$. En multipliant par Δ et X^n l'équation précédente, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{m} (A\Delta D_k) \left(\frac{BX}{x_k} \right)^n \in \mathbb{Z}$$

Enfin, on note $\alpha_k = A\Delta D_k \in \mathbb{Z}$ et $\Lambda_k = \frac{BX}{x_k} \in \mathbb{Z}^*$ (comme les x_k sont distincts alors les Λ_k aussi). On a alors $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \Big| \sum_{k=1}^{m} \alpha_k (\Lambda_k)^n$. On l'applique à $n = ip$ où $i \in \mathbb{N}^*$ est un entier non nul et $p \in \mathbb{P}$ un nombre premier. On a ip donc p qui divise $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k (\Lambda_k)^{ip}$, donc, par le petit théorème de Fermat, ($a^p \equiv a[p]$ pour p premier)

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k (\Lambda_k)^i \equiv \sum_{k=1}^{m} \alpha_k (\Lambda_k)^{ip} \equiv 0[p]$$

Ainsi, tous les nombres premiers divisent $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k (\Lambda_k)^i$ ce qui implique

$$\forall i \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{m} \alpha_k (\Lambda_k)^i = 0$$

cette condition pour $i \in [\![1, m]\!]$ s'écrit matriciellement

$$\begin{pmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 & \cdots & \Lambda_m \\ \Lambda_1^2 & \Lambda_2^2 & \cdots & \Lambda_m^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Lambda_1^m & \Lambda_2^m & \cdots & \Lambda_m^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = 0$$

Cette matrice, de taille $m \times m$, est une matrice de Vandermonde à laquelle on a multiplié la colonne i par Λ_i. Comme les Λ_i sont distincts et non nuls, cette matrice est inversible ce qui impose que

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$$

En remontant les définitions, ceci implique que les $D_k = \frac{\alpha_k}{A\Delta}$ sont tous nuls.

Bilan : Si f est le développement d'une fraction à pôles rationnels et que $\int_0^X f(t)\mathrm{d}t$ est globalement bornée alors $\int_0^X f(t)\mathrm{d}t$ est le développement d'une fraction rationnelle.

C. Séries entières et opérateurs différentiels

Dans ce qui suit, on appellera *opérateur différentiel* (sous-entendu : à coefficients polynômiaux à coefficients rationnels) toute expression de la forme

$$L = R_\mu(X)\left(\frac{d}{dX}\right)^\mu + \cdots + R_1(X)\left(\frac{d}{dX}\right) + R_0(X),$$

où $\mu \geq 0$ est un entier et $R_0, \cdots, R_\mu \in \mathbb{Q}[X]$ sont des polynômes à coefficients rationnels. Si R_μ n'est pas nul, on dit que L est d'*ordre* μ. Un tel opérateur différentiel agit sur une série entière $f \in \mathbb{Q}[\![X]\!]$ par la formule

$$(L \cdot f) = R_\mu(X)f^{(\mu)}(X) + \cdots + R_1(X)f'(X) + R_0(X)f(X),$$

où $f^{(k)}$ désigne la dérivée k-ème d'une série entière.

11. Montrer l'égalité : pour tout $m \geq 0$ et $\mu \geq 0$,

$$\left(\tfrac{d}{dX}\right)^\mu \cdot (X^m f) = \left(X^m \left(\tfrac{d}{dX}\right)^\mu + \sum_{i=1}^{\min(\mu,m)} \tfrac{m(m-1)\cdots(m-i+1)\mu(\mu-1)\cdots(\mu-i+1)}{i!} X^{m-i}\left(\tfrac{d}{dX}\right)^{\mu-i} \right) \cdot f.$$

Il s'agit d'utiliser la formule de Leibniz pour la dérivation d'un produit (qui est valable pour les séries entières par la même preuve que dans le cas usuel). On note d'abord que pour m et k des entiers

$$\left(\frac{d}{dX}\right)^i X^m = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ m(m-1)\cdots(m-i+1)X^{m-i} & \text{si } 1 \leq i \leq m \\ 0 & \text{si } i > m \end{cases}$$

On écrit alors

$$\begin{aligned}
\left(\tfrac{d}{dX}\right)^\mu \cdot (X^m f) &= \sum_{i=0}^{\mu} \binom{\mu}{i} \left[\left(\tfrac{d}{dX}\right)^k \cdot (X^m)\right] f^{(\mu-i)} \\
&= X^m f^{(\mu)} + \sum_{i=1}^{\min(\mu,m)} \binom{\mu}{i} m(m-1)\cdots(m-i+1)X^{m-i} f^{(\mu-i)} \\
&= X^m f^{(\mu)} + \sum_{i=0}^{\min(\mu,m)} \tfrac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-i+1)m(m-1)\cdots(m-i+1)}{i!} X^{m-i} f^{(\mu-i)} \\
&= \boxed{\left(X^m \left(\tfrac{d}{dX}\right)^\mu + \sum_{i=1}^{\min(\mu,m)} \tfrac{m(m-1)\cdots(m-i+1)\mu(\mu-1)\cdots(\mu-i+1)}{i!} X^{m-i}\left(\tfrac{d}{dX}\right)^{\mu-i} \right) \cdot f}
\end{aligned}$$

Dans ce calcul, on peut tronquer la somme, car les dérivées d'ordre strictement supérieur à m de X^m sont nulles, et on a explicité l'expression du coefficient binomial.

On dit qu'une série entière $f \in \mathbb{Q}[\![X]\!]$ est *solution d'une équation différentielle (d'ordre μ)* s'il existe un opérateur différentiel non nul (d'ordre μ) comme ci-dessus tel que $L \cdot f = 0$.

12. Monter que le développement en série entière de toute fraction rationnelle à coefficients rationnels est solution d'une équation d'ordre 1.

Si $g = P/Q \in \mathbb{Q}[\![X]\!]$ est le développement en série d'une fraction rationnelle, alors g est caractérisée par la relation $P = Qg$. En dérivant cette équation on obtient $P' = Q'g + Qg'$. En multipliant par $Qg = P$, on obtient $gQP' = PQ'g + PQg'$, c'est à dire

$$PQg' + (PQ' - P'Q)g = 0$$

Ainsi, $\boxed{g \text{ est solution d'une équation d'ordre 1}}$.

13. Montrer qu'une série entière $f(X) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n \in \mathbb{Q}[\![X]\!]$ est solution d'une équation différentielle si et seulement s'il existe un entier $d \geq 0$ et des polynômes non tous nuls $S_0, \dots, S_d \in \mathbb{Z}[X]$ tels que : pour tout $n \geq 0$,
$$S_0(n)c_n + \cdots + S_d(n)c_{n+d} = 0.$$

$\underline{\Rightarrow :}$ On commence par le sens direct. Supposons que $f(X) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n \in \mathbb{Q}[\![X]\!]$ est solution de l'équation différentielle.
$$(L \cdot f) = R_\mu(X) f^{(\mu)}(X) + \cdots + R_1(X) f'(X) + R_0(X) f(X) = 0,$$
où les polynômes sont non tous nuls. Quitte à multiplier par un dénominateur commun à tous les coefficients des $R_l(X)$, on peut supposer qu'ils sont à coefficients entiers. En notant pour simplifier $M = \max(\mu, \deg(R_1), \dots, \deg(R_\mu))$, on peut noter

$$L = \sum_{k,l=0}^{M} R_{k,l} X^k \left(\frac{d}{dX}\right)^l$$

en écrivant $R_l(X) = \sum_{k=0}^{M} R_{k,l} X^k$, avec $R_{k,l} \in \mathbb{Z}$. Comme on observe, pour $l \in \mathbb{N}$, que

$$f^{(l)}(X) = \sum_{n=l}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-l+1) c_n X^{n-l} = \sum_{n=l}^{\infty} \frac{n!}{(n-l)!} c_n X^{n-l} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+l)!}{n!} c_{n+l} X^n,$$

on peut développer l'expression de $L \cdot f$.

$$\begin{aligned}
L \cdot f &= \sum_{k,l=0}^{M} \sum_{n=0}^{\infty} R_{k,l} \frac{(n+l)!}{n!} c_{n+l} X^{n+k} \\
&= \sum_{k,l=0}^{M} \sum_{n=k}^{\infty} R_{k,l} \frac{(n-k+l)!}{(n-k)!} c_{n-k+l} X^n && \text{(pour } n \to n-k\text{)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{M} \sum_{k=0}^{\min(n,M)} R_{k,l} \frac{(n-k+l)!}{(n-k)!} c_{n-k+l} X^n && \text{(par interversion des sommes)}
\end{aligned}$$

Puisque $L \cdot f = 0$ alors pour $n \geq M$, on obtient l'équation

$$\sum_{k,l=0}^{M} R_{k,l} \frac{(n-k+l)!}{(n-k)!} c_{n-k+l} = \sum_{k,l=0}^{M} R_{M-k,l} \frac{(n-M+k+l)!}{(n-M+k)!} c_{n-M+k+l} = 0$$

(en faisant le changement de variable $k \to M-k$). En renommant $n \to n+M$, on obtient pour tout $n \geq 0$

$$\sum_{k,l=0}^{M} R_{M-k,l} \frac{(n+k+l)!}{(n+k)!} c_{n+k+l} = \sum_{m=0}^{2M} \sum_{k=\max(0,m-M)}^{\min(m,M)} R_{M-k,m-k} \frac{(n+m)!}{(n+k)!} c_{n+m} = 0,$$

pour le changement de variable $m = k + l$. Finalement, en posant

$$\forall m \in [\![0, 2M]\!],\ S_m(X) = \sum_{k=\max(0,m-M)}^{\min(m,M)} R_{M-k,m-k}(X+m)(X+m-1)\cdots(X+k+1) \in \mathbb{Z}[\![X]\!],$$

on a bien

$$\sum_{m=0}^{2M} S_m(n)c_{n+m} = 0$$

Les polynômes $S_0, \dots, S_{2M}$ sont non tous nuls car sinon puisque ils sont définis comme des combinaisons linéaires de polynômes échelonnés en degrés, on aurait

$$\forall m \in [\![0, 2M]\!],\ \forall k \in [\![\max(0, m-M), \min(l, M)]\!],\ R_{M-k,m-k} = 0$$

En faisant à l'envers les changements de variables, on obtiendrait $R_{k,l} = 0$ pour toute valeur de k et l, ce qui contredit que les polynômes $R_k(X)$ sont non tous nuls. Ceci conclut la preuve du sens direct en posant $d = 2l$: on a bien

$$\boxed{S_0(n)c_n + \cdots + S_d(n)c_{n+d} = 0.}$$

$\underline{\Leftarrow}$: Pour le sens réciproque, on pourrait montrer que l'on peut mettre le polynôme $S_0, \dots, S_d$ sous la forme que l'on obtient à la fin du sens direct afin de remonter les calculs. On propose une autre approche. On remarque que si on note $f(X) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n$,

$$\left(X\frac{d}{dX}\right) \cdot f = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n X^n$$

Il vient alors par récurrence immédiate que pour $k \in \mathbb{N}$

$$\left(X\frac{d}{dX}\right)^k \cdot f = \sum_{n=0}^{\infty} n^k c_n X^n$$

Il suit, par combinaison linéaire que pour un polynôme $T = \sum_{k=0}^{M} t_k X^k \in \mathbb{Q}[X]$, on a

$$T\left(X\frac{d}{dX}\right) \cdot f \overset{\text{déf}}{=} \sum_{k=0}^{M} t_k \left(X\frac{d}{dX}\right)^k \cdot f = \sum_{n=0}^{\infty} T(n) c_n X^n$$

Enfin pour $l \in \mathbb{N}$ on a aussi

$$X^l T\left(X\frac{d}{dX}\right) \cdot f = \sum_{n=l}^{\infty} T(n-l) c_{n-l} X^n$$

Ainsi, s'il existe des polynômes non tous nuls $S_0, \dots, S_d \in \mathbb{Z}[X]$ tels que : pour tout $n \geq 0$,

$$S_0(n)c_n + \cdots + S_k(n)c_{n+k} + \cdots + S_d(n)c_{n+d} = 0,$$

en faisant le changement de variable $n \to n-d$, cela donne pour tout $n \geq d$,

$$S_0(n-d)c_{n-d} + \cdots + S_k(n-d)c_{n-d+k} + \cdots + S_d(n-d)c_n = 0.$$

En posant les polynômes $T_k(X) = S_k(X-k)$, on a pour tout $n \geq d$,

$$T_0(n-d)c_{n-d} + \cdots + T_k(n-d+k)c_{n-d+k} + \cdots + T_d(n)c_n = 0,$$

Il suit que

$$\begin{aligned}
&\left[X^d T_0\left(X\frac{d}{dX}\right) + X^{d-1} T_1\left(X\frac{d}{dX}\right) + \cdots + T_d\left(X\frac{d}{dX}\right)\right] \cdot f \\
&\qquad = \sum_{n=d}^{\infty} T_0(n-d)c_{n-d}X^n + \sum_{n=d-1}^{\infty} T_1(n-d+1)c_{n-d+1}X^n + \cdots + \sum_{n=0}^{\infty} T_d(n)c_n X^n \\
&\qquad = \sum_{n=d}^{\infty} \underbrace{\left(T_0(n-d)c_{n-d} + \cdots + T_d(n)c_n\right)}_{=0} X^n
\end{aligned}$$

$$+\sum_{n=d-1}^{d-1} T_1(n-d+1)c_{n-d+1}X^n + \cdots + \sum_{n=0}^{d-1} T_d(n)c_nX^n$$
$$= \sum_{n=d-1}^{d-1} T_1(n-d+1)c_{n-d+1}X^n + \cdots + \sum_{n=0}^{d-1} T_d(n)c_nX^n$$

est un polynôme de degrés au plus $d-1$. Puisque dériver un tel polynôme d fois l'annule, il suit que f vérifie l'équation différentielle.

$$\left(\frac{d}{dX}\right)^d \left[X^d T_0\left(X\frac{d}{dX}\right) + X^{d-1}T_1\left(X\frac{d}{dX}\right) + \cdots + T_d\left(X\frac{d}{dX}\right)\right]\cdot f = 0$$

En développant cet opérateur différentiel, on obtient une équation sous la forme

$$(L\cdot f) = R_\mu(X)f^{(\mu)}(X) + \cdots + R_1(X)f'(X) + R_0(X)f(X) = 0.$$

Il reste à se convaincre que $L \neq 0$. Une rapide récurrence permet de se convaincre qu'il existe des coefficients $a_{k,l} \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\forall l \geq 1,\ \left(X\frac{d}{dX}\right)^l = \sum_{k=1}^{l} a_{k,l}X^k\left(\frac{d}{dX}\right)^k$$

Ainsi, il ne peut pas y avoir de simplifications entre les contributions venant de deux polynômes T_l différents. Finalement, en considérant le terme de degrés maximal d'un des T_l non nul, on vérifie bien que $L \neq 0$.
Ainsi, $\boxed{f \text{ est solution d'une équation différentielle}}$.

14. Donner une nouvelle preuve, basée sur les questions 12 et 13 ci-dessus, du fait que la série entière $\sum_{m=0}^{\infty} X^{m^2}$ n'est pas le développement d'une fraction rationnelle.

Notons $f = \sum_{m=0}^{\infty} X^{m^2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n$. Si f est le développement d'une fraction rationnelle, alors, par la question 12, f satisfait une équation différentielle. Puis par la question 13 il existe des polynômes non tous nuls $S_0, \ldots, S_d \in \mathbb{Z}[X]$ tels que : pour tout $n \geq 0$,

$$S_0(n)c_n + \cdots + S_d(n)c_{n+d} = 0.$$

Cependant, pour $M \geq d$ et $k \in [\![0, d]\!]$ en appliquant ce qui précède à $n = M^2 - k$, on obtient

$$S_0(M^2-k)c_{M^2-k} + \cdots + S_k(M^2-k)c_{M^2} + \cdots + S_d(M^2-k)c_{M^2+d-k} = 0$$

Comme $(M-1)^2 < M^2-k \leq M^2+M-k < (M+1)^2$, M^2 est le seul carré parfait atteint dans les indices. Cela donne

$$\forall M \geq d, S_k(M^2-k) = 0$$

Ayant une infinité de racines, le polynôme S_k est nul. Ceci étant vrai pour tout indice $k \in [\![0, d]\!]$ tous les polynômes sont nuls : Contradiction !
$\boxed{\text{Ainsi } \sum_{m=0}^{\infty} X^{m^2} \text{ n'est pas le développement en série d'une fraction rationnelle.}}$

15. Montrer que la série entière

$$h(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!(3n)!}{(n!)^5}X^n$$

est solution d'une équation différentielle, puis en expliciter une.

On note pour $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \frac{(2n)!(3n)!}{(n!)^5}$. On observe que

$$\forall n \geq 0,\ (2n+2)(2n+1)(3n+3)(3n+2)(3n+1)c_n - (n+1)^5 c_{n+1} = 0$$

Ainsi, par la question 13, on peut conclure que $\boxed{h \text{ est solution d'une équation différentielle}}$.

Pour expliciter l'équation différentielle, on suit une approche similaire à celle utilisée dans la démonstration

de la réciproque dans la question 13. D'une part on a

$$\left(X\frac{d}{dX}\right)^4 \cdot h = \sum_{n=0}^{\infty} n^4 c_n X^n \qquad \text{donc} \qquad \frac{d}{dX}\left(X\frac{d}{dX}\right)^4 \cdot h = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^5 c_{n+1} X^n.$$

D'autre part

$$\begin{aligned}&\left(3X\frac{d}{dX}+1\right)\left(3X\frac{d}{dX}+2\right)\left(3X\frac{d}{dX}+3\right)\left(2X\frac{d}{dX}+1\right)\left(2X\frac{d}{dX}+2\right)\cdot h\\ &\qquad = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+2)(2n+1)(3n+3)(3n+2)(3n+1)c_n X^n\end{aligned}$$

Ainsi h vérifie l'équation

$$\boxed{\left[\left(3X\frac{d}{dX}+1\right)\left(3X\frac{d}{dX}+2\right)\left(3X\frac{d}{dX}+3\right)\left(2X\frac{d}{dX}+1\right)\left(2X\frac{d}{dX}+2\right) - \frac{d}{dX}\left(X\frac{d}{dX}\right)^4\right]\cdot h = 0}$$

Je ne suis pas pleinement satisfait de ma réponse à cette question. Bien que je propose une équation explicite, l'opérateur différentiel n'est pas sous la forme définie au début de cette section. Cette forme peut être obtenue en développant la formule que je présente. Cependant, cela nécessiterait des calculs plus complexes qu'il n'est raisonnable de réaliser à la main. Je remercie par avance toute personne pouvant partager une réponse plus satisfaisante.

16. Monter que $h(X)$ ci-dessus est à coefficients entiers.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on remarque que

$$\frac{(2n)!(3n)!}{(n!)^5} = \left(\frac{(2n)!}{n!n!}\right)^2 \frac{(3n)!}{n!(2n)!} = \binom{2n}{n}^2 \binom{3n}{n}$$

qui est clairement un entier. $\boxed{\text{Ainsi } h(X) \text{ est à coefficients entiers.}}$

17. Montrer qu'une série entière $f(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} X^n \in \mathbb{Q}[\![X]\!]$ est solution d'une équation différentielle si et seulement si sa *transformée de Laplace*

$$\widehat{f}(X) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n$$

est solution d'une équation différentielle.

On utilise la caractérisation de la question 13.

$\underline{\Rightarrow :}$ Si $f(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} X^n \in \mathbb{Q}[\![X]\!]$ est solution d'une équation différentielle alors il existe des polynômes non tous nuls $S_0, \dots, S_d \in \mathbb{Z}[X]$ tels que

$$\forall n \geq 0,\ S_0(n)\frac{c_n}{n!} + \cdots + S_d(n)\frac{c_{n+d}}{(n+d)!} = 0$$

Il suit pour $n \in \mathbb{N}$, $S_0(n)c_n\frac{(n+d)!}{n!} + \cdots + S_d(n)c_{n+d}\frac{(n+d)!}{(n+d)!} = 0$, et donc

$$\forall n \geq 0,\ S_0(n)(n+d)(n+d-1)\cdots(n+1)c_n + S_1(n)(n+d)\cdots(n+2)c_{n+1}\cdots + S_d(n)c_{n+d} = 0$$

Ainsi

$$\forall n \geq 0,\ T_0(n)c_n + T_1(n)c_{n+1}\cdots + T_d(n)c_{n+d} = 0$$

pour les polynômes à coefficients entiers T_k définis pour $k = 0, \dots, d$ par $T_k(X) = S_k(X)(X+d)(X+d-1)\cdots(X+k+1)$. Comme ces polynômes sont clairement non tous nuls, par la question 13, on en déduit que $\boxed{\text{la transformé de Laplace } \widehat{f} \text{ de } f \text{ est solution d'une équation différentielle}}$.

$\underline{\Leftarrow :}$ Si $\widehat{f}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n$ est solution d'une équation différentielle alors il existe des polynômes non tous nuls $S_0, \dots, S_d \in \mathbb{Z}[X]$ tels que

$$\forall n \geq 0,\ S_0(n)c_n + \cdots + S_d(n)c_{n+d} = 0$$

Il suit pour $n \in \mathbb{N}$, $S_0(n)c_n/n! + \cdots + S_d(n)c_{n+d}/n! = 0$, et donc

$$\forall n \geq 0,\ S_0(n)\frac{c_n}{n!} + S_1(n)(n+1)\frac{c_{n+1}}{(n+1)!} \cdots + S_d(n)(n+d)(n+d-1)\cdots(n+1)\frac{c_{n+d}}{(n+d)!} = 0$$

Ainsi

$$\forall n \geq 0,\ T_0(n)\frac{c_n}{n!} + T_1(n)\frac{c_{n+1}}{(n+1)!} \cdots + T_d(n)\frac{c_{n+d}}{(n+d)!} = 0$$

pour les polynômes à coefficients entiers T_k définis pour $k = 0, \dots, d$ par $T_k(X) = S_k(X)(X+k)(X+k-1)\cdots(X+1)$. Comme ces polynômes sont clairement non tous nuls, à nouveau par la question 13, on en déduit que $\boxed{f \text{ est solution d'une équation différentielle}}$.

D. Stratégie de la démonstration du théorème 1

Soient $r \geq 2$ un entier et $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{Q}$ des rationnels distincts. Soient $b_1, \dots, b_r \in \mathbb{Q}^*$ des rationnels non nuls. Posons $e^{a_i X} \overset{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_i^n}{n!} X^n$ et considérons la série entière

$$f(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!} X^n \overset{\text{déf}}{=} b_1 e^{a_1 X} + \cdots + b_r e^{a_r X}$$

18. Montrer que la transformée de Laplace $\widehat{f}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n X^n$ est le développement en série entière de la fraction rationnelle

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{b_i}{1 - a_i X}.$$

En déduire que f n'est pas la série nulle.

Au vu de la définition de f, les coefficients u_n ont pour expression, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \sum_{i=1}^{r} b_i (a_i)^n$$

Ainsi,

$$\widehat{f}(X) = \sum_{i=1}^{r} b_i \sum_{n_0}^{\infty} (a_i X)^n = \boxed{\sum_{i=1}^{r} \frac{b_i}{1 - a_i X}}$$

puisque $(1 - a_i X)\sum_{n=0}^{\infty}(a_i X)^n = 1$. Il vient que $\widehat{f}(X)$ est une fraction rationnelle, dont la décomposition en éléments simples est donnée par la formule précédente. Par unicité de la décomposition en éléments simples, comme les b_i sont non nuls, $\widehat{f}$ n'est pas la fraction rationnelle nulle. Comme l'application $P/Q \mapsto g$ qui a une fraction rationnelle associe son développement en série entière est injective (elle est linéaire par la question 5, et si $g = 0$, alors l'équation $P = Q \cdot g$ impose $P/Q = 0$), $\widehat{f}(X)$ n'est pas la série entière nulle. Au vu du lien entre les coefficients de $f(X)$ et $\widehat{f}(X)$, $\boxed{f(X) \text{ n'est pas la série entière nulle}}$.

Considérons la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ définie en termes des coefficients u_n par la formule

$$v_n = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{u_i}{i!}$$

et la série entière

$$v(X) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n X^n \in \mathbb{Q}[\![X]\!].$$

19. Montrer l'égalité des séries entières

$$\sum_{n=0}^{\infty}(v_n - nv_{n-1})X^n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n X^n.$$

On note que la formule fait intervenir le coefficient v_{-1} qui n'est à priori pas définie. Cependant puisque qu'il est multiplié par 0, cela n'a pas d'importance. Par souci de rigueur, on pose alors $v_{-1} = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$v_n - nv_{n-1} = n!\sum_{i=0}^{n}\frac{u_i}{i!} - n(n-1)!\sum_{i=0}^{n-1}\frac{u_i}{i!} = n!\left(\sum_{i=}^{n}\frac{u_i}{i!} - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{u_i}{i!}\right) = n!\frac{u_n}{n!} = u_n$$

On vérifie de plus que $v_0 - 0v_{-1} = 0!\frac{u_0}{0!} = u_0$. Ainsi comme les séries ont les mêmes coefficients,

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}(v_n - nv_{n-1})X^n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n X^n}$$

20. Montrer que l'opérateur différentiel $L = -X^2\left(\frac{d}{dX}\right) + (1-X)$ agit sur $v(X)$ par

$$(L\cdot v)(X) = \sum_{i=1}^{r}\frac{b_i}{1-a_iX}$$

On calcule les différents termes

$$-X^2v'(X) = -\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)v_{n+1}X^{n+2} = -\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)v_{n-1}X^n = -\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)v_{n-1}X^n$$
$$v(X) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n X^n$$
$$-Xv(X) = -\sum_{n=0}^{\infty} v_n X^{n+1} = -\sum_{n=1}^{\infty} v_{n-1}X^n = -\sum_{n=0}^{\infty} v_{n-1}X^n$$

où on a ajouté les premiers termes des sommes, puisque les contributions sont nulles. En sommant ces trois termes on a bien

$$(L\cdot v)(X) = \sum_{n=0}^{\infty}\big[-(n-1)v_{n-1} + v_n - v_{n-1}\big]X^n = \sum_{n=0}^{\infty}\big[v_n - nv_{n-1}\big]X^n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n X^n = \sum_{i=1}^{r}\frac{b_i}{1-a_iX}$$

En utilisant les questions 19, puis 18. Ainsi, on a bien

$$\boxed{(L\cdot v)(X) = \sum_{i=1}^{r}\frac{b_i}{1-a_iX}}$$

21. En déduire que si $v(X)$ est le développement en série d'une fraction rationnelle P/Q alors tout élément de l'ensemble non vide $\{1/a_i | a_i \neq 0\}$ est un pôle de P/Q.

Si $v(X)$ est le développement en série d'une fraction rationnelle P/Q écrite sous forme réduite alors par compatibilité de l'association fraction rationnelle/développement en série avec la dérivée, on a l'équation

$$(L\cdot v)(X) = -X^2\frac{P'}{Q} + X^2\frac{PQ'}{Q^2} + (1-X)\frac{P}{Q} = \frac{-X^2P'Q + X^2PQ' + (1-X)PQ}{Q^2} = \sum_{i=1}^{r}\frac{b_i}{1-a_iX}$$

Comme $L\cdot v$ a pour pôles les éléments de $\{1/a_i | a_i \neq 0\}$, ce sont nécessairement des racines de Q^2, donc de Q. Comme on a choisi P/Q sous forme réduite, ce sont des pôles de P/Q. Donc tout élément de l'ensemble non

vide $\{1/a_i | a_i \neq 0\}$ est un pôle de P/Q.

22. Montrer que $v(X)$ n'est pas le développement en série d'une fraction rationnelle.

Il s'agit de poursuivre le raisonnement de la question précédente, en s'intéressant aux ordres des pôles. En supposant toujours que P/Q est réduite, on peut réécrire

$$L \cdot v = \frac{-X^2P' + (1-X)P}{Q} + \frac{X^2PQ'}{Q^2}$$

En prenant $i \in [\![1, r]\!]$ tel que $a_i \neq 0$, on sait par la question précédente que $1/a_i$ est un pôle de P/Q. En notant N l'ordre de $1/a_i$ en tant que pôle de P/Q (*i.e.* $N = \mathrm{ord}_{1/a_i}(Q)$), on a que

— $1/a_i$ est un pôle d'ordre inférieur ou égal à N ou n'est pas un pôle de $\frac{-X^2P'+(1-X)P}{Q}$,

— $1/a_i$ est un pôle de $\frac{X^2PQ'}{Q^2}$ d'ordre $2N - (N-1) = N + 1 > N$.

Ainsi la somme de ces deux fractions rationnelles a pour pôle $1/a_i$ d'ordre $N+1 \geq 2$. Or, cette somme vaut $\sum_{i=1}^{r} \frac{b_i}{1-a_iX}$ dont l'ordre du pôle $1/a_i$ est 1. C'est une contradiction, donc v n'est pas le développement en série d'une fraction rationnelle.

Nous avons ainsi réduit la démonstration du théorème 1 à celle de la proposition suivante, ce qui fera l'objet des parties E et F du sujet.

Proposition 1. *Si $b_1e^{a_1} + \cdots + b_re^{a_r} = 0$, alors la série entière $v(X)$ est le développement en série entière d'une fraction rationnelle à coefficients rationnels.*

On appelle *polynôme exponentiel* toute série entière à coefficients rationnels de la forme

$$f(X) = \sum_{i=1}^{s} P_i(X)e^{c_iX},$$

où $c_1, \cdots, c_s \in \mathbb{Q}$ sont des rationnels et $P_1, \cdots, P_s \in \mathbb{Q}[X]$ sont des polynômes.

23. Montrer que le théorème 1 est équivalent à l'énoncé suivant :

> Soit $f(X) \in \mathbb{Q}[\![X]\!]$ un polynôme exponentiel tel que $f(1) = \sum_{i=1}^{s} P_i(1)e^{c_i}$ s'annule.
> Alors $f(X)/(X-1)$ est encore un polynôme exponentiel.

$\Rightarrow$: On commence par montrer le sens direct. Supposons le théorème 1 vrai, soit $f(X) = \sum_{i=1}^{s} P_i(X)e^{c_iX}$ un polynôme exponentiel tel que $f(1) = 0$. Quitte à combiner les termes en facteurs des mêmes exponentielles, on peut supposer que les c_i sont distincts. Alors

$$\sum_{i=1}^{s} P_i(1)e^{c_i} = 0$$

est une relation de liaison entre le réels e^{c_i} où les c_i sont distincts. Le théorème 1 affirme alors que cette relation est nécessairement triviale, c'est-à-dire, $P_1(1) = P_2(1) = \cdots = P_s(1) = 0$. Ainsi, les polynômes P_i ont tous 1 pour racines. Comme on peut les factoriser par $X-1$, il suit que les $P_i/(X-1) = Q_i \in \mathbb{Q}[X]$ sont encore des polynômes. Donc $\frac{f(X)}{X-1} = \sum_{i=1}^{s} Q_ie^{c_i}$ est un polynôme exponentiel.

$\Leftarrow$: Supposons que pour tout polynôme exponentiel f tel que $f(1) = 0$, $f/X-1$ soit toujours un polynôme exponentiel. Montrons le théorème 1 par l'absurde. Supposons que $\alpha_1 < \cdots < \alpha_r \in \mathbb{Q}$ et que $\mu_1, \ldots, \mu_r \in \mathbb{Q}^*$ soient tels que

$$\mu_1e^{\alpha_1} + \cdots + \mu_re^{\alpha_r} = 0$$

Considérons le polynôme exponentiel $f(X) = \sum_{i=1}^{r} \mu_ie^{\alpha_iX}$. Comme on a bien $f(1) = 0$, on a par hypothèse que $f/X - 1$ est un polynôme exponentiel. Notons le

$$\frac{f(X)}{X-1} = \sum_{i=1}^{s} P_i(X)e^{c_iX}$$

en supposant $c_1 < \cdots < c_s$. Comme on manipule des polynômes exponentiels, les séries entières associées ont un rayon de convergence infini. Donc, on peut les évaluer en n'importe quel réel. Notamment, on peut considérer les limites en $+\infty$. D'une part

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-\alpha_r x}\frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} xe^{-\alpha_r x}\sum_{i=1}^{r}\frac{\mu_i}{x-1}e^{\alpha_i x} = \mu_r$$

car on a supposé $\alpha_1 < \cdots < \alpha_r$. D'autre part, on a

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-\alpha_r x}\frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x\to+\infty}\sum_{i=1}^{s} xP_i(x)e^{(c_i-\alpha_r)x} = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } c_s > \alpha_r \\ \pm\infty & \text{si } c_s = \alpha_r \\ 0 & \text{si } c_s < \alpha_r \end{cases}$$

ainsi comme μ_r est un rationnel non nul, c'est absurde. On a donc montré le théorème 1.

E. L'arithmétique des coefficients v_n

Rappelons l'hypothèse $b_1e^{a_1} + \cdots + b_re^{a_r} = 0$ de la proposition 1. Quitte à remplacer le polynôme exponentiel $f(X) = b_1e^{a_1X} + \cdots b_re^{a_rX}$ par un multiple entier, on peut supposer sans perte de généralité que les coefficients $u_0, \ldots, u_{r-1}$ sont des entiers.
On fait cette hypothèse dorénavant.

Définissons des nombres rationnels $s_1, \ldots, s_r$ par la formule

$$(T-a_1)\cdots(T-a_r) = T^r - s_1T^{r-1} - \cdots - s_{r-1}T - s_r.$$

24. Montrer l'égalité : pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+r} = s_1u_{n+r-1} + \cdots + s_ru_n.$$

D'un côté, on rappelle l'expression

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = b_1a_1^n + \cdots + b_ra_r^n.$$

De l'autre on vérifie que pour $i \in [\![1, r]\!]$,

$$a_i^{n+r} - s_1a_i^{n+r-1} - \cdots - s_ra_i^n = a_i^n(a_i-a_1)\cdots(a_i-a_r) = 0.$$

Donc par combinaison linéaire, on a bien

$$\boxed{u_{n+r} = s_1u_{n+r-1} + \cdots + s_ru_n}$$

Il s'agit en fait, du fait général qui décrit les solutions d'une équation récurrente linéaire d'ordre r pour les suites en termes des racines (simples ici) du polynôme associé, qui est une directe généralisation de la méthode pour les récurrences d'ordre 2.

Soit D un dénominateur commun des nombres rationnels $a_1, \ldots, a_r$ et soit

$$A = \max(1, |a_1|, \ldots, |a_r|).$$

25. Montrer que $D^nu_n \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \geq 0$.

L'expression des coefficients $s_1, \cdots, s_r$ est donnée par les relations coefficients/racines. En adaptant les signes avec les notations de l'énoncé on a

$$s_1 = \sum_{i=1}^{r} a_i \quad s_2 = -\sum_{1\leq i<j\leq r} a_ia_j \quad \text{etc.} \quad s_k = (-1)^{k+1}\sum_{1\leq i_1<\cdots i_k\leq r}\prod_{j=1}^{k} a_{i_j} \quad \text{etc.} \quad s_r = (-1)^{r+1}a_1\cdots a_r$$

pour $k \in [\![1, r]\!]$. On en déduit notamment que $D^ks_k \in \mathbb{Z}$, puisque s_k est une somme de produit de k facteurs. On peut alors montrer le résultat en procédant par récurrence d'ordre r.

— Initialisation : On a supposé sans perte de généralité que $u_0, \cdots, u_{r-1} \in \mathbb{Z}$ donc en multipliant par une puissance de D, on a bien
$$\forall n \in [\![0, r-1]\!],\ D^n u_n \in \mathbb{Z}.$$

— Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $D^k u_k \in \mathbb{Z}$ pour $k \in [\![n, n+r-1]\!]$. Par la question précédente, on a
$$D^{n+r}u_{n+r} = (Ds_1)(D^{n+r-1}u_{n+r-1}) + \cdots + (D^r s_r)(D^n u_n) \in \mathbb{Z},$$
car chaque terme entre parenthèse est un entier, soit par hypothèse de récurrence, soit par le calcul au début de cette réponse. Ceci conclut la récurrence.

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ D^n u_n \in \mathbb{Z}}$.

26. Montrer qu'il existe un nombre réel $c_1 > 0$ tel que : pour tout $n \geq 0$,
$$|v_n| \leq c_1 \frac{A^{n+1}}{n+1}.$$

On commence par écrire, puisque $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{u_i}{i!} = b_1 e^{a_1} + \cdots + b_r e^{a_r} = 0$:
$$|v_n| = \left| n! \sum_{i=0}^{n} \frac{u_i}{i!} \right| = \left| n! \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{u_i}{i!} \right| = \left| n! \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{r} b_j \frac{(a_j)^i}{i!} \right| \leq \left(\sum_{j=1}^{r} |b_j| \right) n! \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{A^i}{i!},$$
car pour tout $j \in [\![1, r]\!]$, $|a_j| \leq A$. On observe ensuite que $A/(i+1) \to 0$. Donc il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $i \geq N$, $A/(i+1) \leq 1/2$. Il suit par récurrence immédiate que pour $n \geq N$, et pour $i \geq n+1$, $A^i/i! \leq A^{n+1}/(n+1)!/2^{i-n-1}$ donc on peut majorer la somme
$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{A^i}{i!} \leq \frac{A^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2\frac{A^{n+1}}{(n+1)!}$$
En injectant ceci dans le calcul précédent, on obtient que pour $n \geq N$,
$$\frac{(n+1)|v_n|}{A^{n+1}} \leq 2 \left(\sum_{j=1}^{r} |b_i| \right) \frac{(n+1)n!}{A^{n+1}} \frac{A^{n+1}}{(n+1)!} = 2 \left(\sum_{j=1}^{r} |b_i| \right) \overset{\text{déf}}{=} c_0$$
qui est indépendant de n. Il suffit alors de poser
$$c_1 = \max\left(c_0, \frac{|v_0|}{A}, \frac{2|v_1|}{A^2}, \ldots, \frac{|v_{N-1}|}{A^N} \right)$$
pour obtenir
$$\boxed{\forall n \geq 0,\ |v_n| \leq c_1 \frac{A^{n+1}}{n+1}}$$

Pour tout entier $n, k \geq 0$, définissons le nombre rationnel $v_n(k)$ comme le coefficient en degrés n de la série entière
$$(1 - s_1 X - \cdots - s_r X^r)^k v(X) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(k) X^n$$

27. Montrer que $v(X)$ est le développement en série d'une fraction rationnelle si et seulement s'il existe un entier $k \geq 0$ tel que $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(k) X^n$ soit un polynôme.

$\Leftarrow$: On commence par le sens réciproque qui est immédiat. En effet s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(k) X^n$ soit un polynôme alors par définition $\boxed{v(X) \text{ est le développement de la fraction rationnelle}}$

$$\boxed{\frac{\sum_{n=0}^{\infty} v_n(k) X^n}{(1 - s_1 X - \cdots - s_r X^r)^k}}$$

$\Rightarrow$: Pour le sens direct, supposons que $v(X)$ est le développement en série d'une fraction rationnelle P/Q écrite sous forme réduite. En poursuivant, les arguments développés en questions 21 et 22, on commence par montrer que les seuls pôles de v sont les éléments de l'ensemble $\{1/a_i | a_i \neq 0\}$. En effet on a l'équation

$$\frac{-X^2P' + (1-X)P}{Q} + \frac{X^2PQ'}{Q^2} = \sum_{i=1}^{r} \frac{b_i}{1-a_iX}$$

Donc, si α est un pôle de P/Q, c'est à dire une racine de Q, (en suivant le même raisonnement consistant à analyser l'ordre du pôle dans les deux termes de la somme), c'est également un pôle du membre de droite. Donc $\alpha \in \{1/a_i | a_i \neq 0\}$.

On vérifie ensuite, en posant $T = 1/X$,

$$\begin{aligned} 1 - s_1X - \cdots - s_rX^r &= 1 - \frac{s_1}{T} - \cdots \frac{s_r}{T^r} = \frac{1}{T^r}(T^r - s_1T^{r-1} - \cdots - s_{r-1}T - s_r) \\ &= \frac{1}{T^r}(T-a_1)\cdots(T-a_r) = (1-\frac{a_1}{T})\cdots(1-\frac{a_r}{T}) \\ &= (1-a_1X)\cdots(1-a_rX) \end{aligned}$$

Ainsi, en considérant k le maximum des ordres des éléments de $\{1/a_i | a_i \neq 0\}$ en tant que pôles de P/Q,

$$(1 - s_1X - \cdots - s_rX^r)^k v(X) = (1-a_1)^k \cdots (1-a_rX)^k \frac{P}{Q} \in \mathbb{Q}[X].$$

Donc $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} v_n(k)X^n \text{ est un polynôme}}$.

Techniquement, puisqu'on a déjà montré en question 22 que $v(X)$ ne peut pas être le développement en série d'une fraction rationnelle, ce sens demande de montrer un résultat de la forme "$FAUX \Rightarrow A$", ce qui ne demande pas de justification.

28. Observer l'égalité : pour tout $n \geq r$ et $k \geq 0$,

$$v_n(k+1) = v_n(k) - s_1v_{n-1}(k) - \cdots - s_rv_{n-r}(k).$$

Il s'agit simplement de remarquer que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} v_n(k+1)X^n &= (1 - s_1X - \cdots - s_rX^r)\sum_{n=0}^{\infty} v_n(k)X^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} v_n(k)X^n - \sum_{n=1}^{\infty} s_1v_{n-1}(k)X^n - \cdots - \sum_{n=r}^{\infty} s_rv_{n-r}(k)X^n \end{aligned}$$

Donc pour $n \geq r$, on peut regrouper les termes de mêmes degrés pour obtenir

$$\boxed{v_n(k+1) = v_n(k) - s_1v_{n-1}(k) - \cdots - s_rv_{n-r}(k)}.$$

Posons $C = 1 + |s_1| + \cdots + |s_r|$.

29. Montrer que $D^nv_n(k) \in \mathbb{Z}$ et qu'il existe un nombre réel $c_2 > 0$ tel que

$$|v_n(k)| \leq c_2A^nC^k \text{ pour tout } n \geq kr.$$

On commence par remarquer que :

$$D^nv_n = D^nn!\sum_{i=0}^{n} \frac{u_i}{i!} = \sum_{i=0}^{n} (D^iu_i)\binom{n}{i}(n-i)!D^{n-i}.$$

Comme $D^i u_i \in \mathbb{Z}$ par la question 25, on a pour tout entier n , $D^n v_n \in \mathbb{Z}$. On observe enfin

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n(k) D^n X^n = (1 - s_1 DX - \cdots - s_r D^r X^r)^k \sum_{n=0}^{\infty} v_n D^n X^n$$

Le membre de droite étant le produit d'un polynôme et d'une série entière à coefficients entiers (on a vu en question 25 que $s_i D^i \in \mathbb{Z}$), le membre de gauche est également à coefficients entiers. On a donc bien

$$\boxed{\forall k, n \in \mathbb{N},\ D^n v_n(k) \in \mathbb{Z}}.$$

Pour la deuxième partie de la question, on pose $c_2 = Ac_1 > 0$ et on vérifie par récurrence sur k que "$\forall n \geq kr,\ |v_n(k)| \leq C_2 A^n C^k$".

— Initialisation : Soit $n \in \mathbb{N}$, on a déjà vu que $v_n(0) = v_n$ et $|v_n| \leq c_1 A^{n+1}/(n+1)$ (question 26). On a donc bien

$$|v_n(0)| \leq c_1 \frac{A^{n+1}}{n+1} \leq c_1 A^{n+1} = c_2 A^n C^0$$

— Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ et supposons que $\forall n \geq kr,\ |v_n(k)| \leq C_2 A^n C^k$. Soit alors $n \geq (k+1)r$. Par la relation de récurrence de la question 28, on obtient

$$\begin{aligned} |v_n(k+1)| &\leq |v_n(k)| + |s_1||v_{n-1}(k)| + \cdots + |s_r||v_{n-r}(k)| \\ &\leq c_2 A^n C^k + |s_1| c_2 A^{n-1} C^k + \cdots + |s_r| c_2 A^{n-r} C^k \\ &\leq c_2 C^k A^n (1 + |s_1| + \cdots + |s_r|) \\ &= c_2 A^n C^{k+1} \end{aligned}$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence (on a bien $n - i \geq kr$, si $i \leq r$) et en majorant $A^i \leq A^n$ (car $A \geq 1$).

Ceci conclut la récurrence et on a donc bien

$$\boxed{|v_n(k)| \leq c_2 A^n C^k \text{ pour tout } n \geq kr.}$$

30. Soit $l \geq 0$ un entier. Montrer qu'il existe un polynôme $P_l \in \mathbb{Q}[X]$ de degré $< r(l+1)$ satisfaisant à

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-l+1) u_{n-l} X^n = \frac{P_l(X)}{(1 - s_1 X - \cdots - s_r X^r)^{l+1}}$$

On commence par observer que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-l+1) u_{n-l} X^n &= \sum_{n=l}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-l+1) u_{n-l} X^n \\ &= X^l \sum_{n=l}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-l+1) u_{n-l} X^{n-l} \\ &= X^l \left(\frac{d}{dX}\right)^l \sum_{n=l}^{\infty} u_{n-l} X^n \\ &= X^l \left(\frac{d}{dX}\right)^l \sum_{n=0}^{\infty} u_n X^{n+l} \\ &= X^l \left(\frac{d}{dX}\right)^l [X^l u] \end{aligned}$$

où $u \overset{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} u_n X^n$. On rappelle de plus qu'on a précédemment calculé

$$u(X) = \sum_{i=1}^{r} \frac{b_i}{1 - a_i X}$$

Soit $i \in [\![1, r]\!]$. Si $a_i \neq 0$, on a, en posant $b_i X^l = R_i(X)(1 - a_i X) + c_i$ la division euclidienne de $b_i X^l$ par le polynôme non constant $1 - a_i X$ de sorte que $\deg R_i < l$,

$$\frac{b_i X^l}{1 - a_i X} = R_i + \frac{c_i}{1 - a_i X}$$

En dérivant l fois, du fait de son degré le polynôme R_i est envoyé sur zéro et on obtient

$$\left(\frac{d}{dX}\right)^l \left(\frac{b_i X^l}{1 - a_i X}\right) = \frac{c_i a_i^l l!}{(1 - a_i X)^{l+1}} = \frac{d_i}{(1 - a_i X)^{l+1}}$$

en posant $d_i = c_i a_i^l l!$. De même si $a_i = 0$ on a

$$\left(\frac{d}{dX}\right)^l \left(\frac{b_i X^l}{1 - a_i X}\right) = b_i l! = \frac{d_i}{(1 - a_i X)^{l+1}}$$

en posant cette fois-ci $d_i = b_i l!$. On peut ensuite écrire

$$\left(\frac{d}{dX}\right)^l \left[X^l u(X)\right] = \sum_{i=1}^{r} \frac{d_i}{(1 - a_i X)^{l+1}} = \frac{Q_l(X)}{(1 - a_1 X)^{l+1} \cdots (1 - a_r X)^{l+1}} = \frac{Q_l(X)}{(1 - s_1 X - \cdots - s_r X^r)^{l+1}}$$

L'égalité des dénominateurs est obtenue par un calcul effectué en question 27. Le polynôme $Q_l(X) \in \mathbb{Q}[X]$ est obtenu par réduction au même dénominateur. Comme il s'agit de multiplier une fraction par les $r - 1$ autres dénominateurs qui sont de degrés au plus $l + 1$, on a $\deg Q_l(x) \leq (r - 1)(l + 1)$. Alors, en posant $P_l = X^l Q_l \in \mathbb{Q}[X]$ on a d'une part

$$\begin{aligned} \deg P_l &\leq (l+1)(r-1) + l = (l+1)r - l + 1 + l = (l+1)r - 1 \\ &< \boxed{(l+1)r}, \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-l+1)u_{n-l}X^n &= X^l \left(\frac{d}{dX}\right)^l \left[X^l u(X)\right] \\ &= \boxed{\frac{P_l(X)}{(1 - s_1 X - \cdots - s_r X^r)^{l+1}}}. \end{aligned}$$

31. Définissons deux suites $(w_{n,k})_{n,k\geq 0}$ et $(w_n(k))_{n,k\geq 0}$ par les formules

$$w_{n,k} = n! \sum_{i=0}^{n-k} \frac{u_i}{i!} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} w_n(k) X^n = (1 - s_1 X - \cdots - s_r X^r)^k \sum_{n=0}^{\infty} w_{n,k} X^n$$

Montrer l'égalité $w_n(k) = v_n(k)$ pour tout n et k tels que $n \geq kr$.

Pour cela, on étudie la différence des séries entières associées

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (v_n(k) - w_n(k)) X^n &= (1 - s_1 X - \cdots s_r X^r)^k \sum_{n=0}^{\infty} (v_n - w_{n,k}) X^n \\ &= (1 - s_1 X - \cdots s_r X^r)^k \sum_{n=0}^{\infty} \left(n! \sum_{i=0}^{n} \frac{u_i}{i!} - n! \sum_{i=0}^{n-k} \frac{u_i}{i!} \right) X^n \\ &= (1 - s_1 X - \cdots s_r X^r)^k \sum_{n=0}^{\infty} n! \sum_{i=\max(0,n-k+1)}^{n} \frac{u_i}{i!} X^n \\ &= (1 - s_1 X - \cdots s_r X^r)^k \sum_{n=0}^{\infty} n! \sum_{l=0}^{\min(n,k-1)} \frac{u_{n-l}}{(n-l)!} X^n \end{aligned}$$

$$= (1 - s_1X - \cdots s_rX^r)^k \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\min(n,k-1)} n(n-1)\cdots(n-l+1)u_{n-l}X^n$$
$$= (1 - s_1X - \cdots s_rX^r)^k \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k-1} n(n-1)\cdots(n-l+1)u_{n-l}X^n$$
$$= (1 - s_1X - \cdots s_rX^r)^k \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-l+1)u_{n-l}X^n$$
$$= (1 - s_1X - \cdots s_rX^r)^k \sum_{l=0}^{k-1} \frac{P_l(X)}{(1 - s_1X - \cdots s_rX^r)^{l+1}}$$
$$= \sum_{l=0}^{k-1} P_l(X)(1 - s_1X - \cdots s_rX^r)^{(k-1)-l}$$

Par la question précédente, le terme d'indice l de cette somme est un polynôme de degrés strictement inférieur à $(l+1)r + (k-1-l)r = kr$ ainsi leur somme est un polynôme de degrés strictement inférieur à kr. Les deux séries $\sum v_n(k)X^n$ et $\sum w_n(k)$ ne différent que d'un polynôme de degrés au plus kr donc

$$\boxed{\forall n, k \in \mathbb{N},\ n \geq kr \Rightarrow w_n(k) = v_n(k)}$$

32. En déduire que $k!$ divise $D^n v_n(k)$ pour tout n et k tels que $n \geq kr$.

Par la question précédente, il s'agit de vérifier que $k!$ divise $D^n w_n(k)$ c'est à dire que $D^n w_n(k)/k!$ est bien un entier (ce qui garantit automatiquement que $D^n w_n(k)$ est un entier et donc que cette question a bien un sens). On observe que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n w_n(k)}{k!} X^n = (1 - s_1DX - \cdots s_rD^rX^r)^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n w_{n,k}}{k!} X^n$$

Ainsi si $\frac{D^n w_{n,k}}{k!}$ est un entier, alors puisque $(1 - s_1DX - \cdots s_rD^rX^r)$ est à coefficients entiers (on a montré en question 25 que $s_iD^i \in \mathbb{Z}$), par définition du produit sur les séries, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n w_n(k)}{k!} X^n$ est à coefficients entiers. Il suffit donc d'observer que

$$\frac{D^n w_{n,k}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(n-k)!}{i!} u_i D^n = \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{n-k} (n-k)(n-k-1)\cdots(i+1)u_iD^n \in \mathbb{Z}$$

par la question 25. Ainsi $\boxed{k! \text{ divise } D^n v_n(k) \text{ pour tout } n \text{ et } k \text{ tels que } n \geq kr}$.

33. Montrer l'égalité

$$v_n(k) = \sum_{i=1}^{r} b_i e^{a_i} \int_{a_i}^{\infty} e^{-t} t^{n-kr} (t-a_1)^k \cdots (t-a_r)^k \mathrm{d}t.$$

On constate que si $n < kr$ et que l'un des a_i est négatif, l'intégrale ne converge pas car des puissances négatives de t apparaissent. On suppose donc que l'énoncé demande de montrer l'égalité seulement pour $n \geq kr$. On note

$$x_n(k) = \sum_{i=1}^{r} b_i e^{a_i} \int_{a_i}^{\infty} e^{-t} t^{n-kr} (t-a_1)^k \cdots (t-a_r)^k \mathrm{d}t$$

Pour montrer l'égalité $v_n(k) = x_n(k)$, on vérifie que les $x_n(k)$ satisfont la même relation de récurrence que $v_n(k)$ à savoir

(a) Pour $k = 0$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n(0) = v_n(0) = v_n$.

(b) Pour tout $n \geq (k+1)r$ et $k \geq 0$, on a

$$x_n(k+1) = x_n(k) - s_1 x_{n-1}(k) - \cdots - s_r x_{n-r}(k)$$

On commence par vérifier les points (a) et (b) ci-dessus avant de conclure la question par récurrence. Pour (a), on fait une récurrence sur n :

— Initialisation :

$$x_0(0) = \sum_{i=1}^{r} b_i e^{a_i} \int_{a_i}^{\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{r} b_i e^{a_i} \left[-e^{-t}\right]_{a_i}^{\infty} = \sum_{i=1}^{r} b_i = u_0 = 0! \sum_{i=0}^{0} \frac{u_i}{i!} = v_0$$

— Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_n(0) = v_n$, alors par intégration par partie

$$\begin{aligned} x_{n+1}(0) &= \sum_{i=1}^{r} b_i e^{a_i} \int_{a_i}^{\infty} e^{-t} t^{n+1}\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{r} b_i e^{a_i} \left[-e^{-t}t^{n+1}\right]_{a_i}^{\infty} + \sum_{i=1}^{r} b_i e^{a_i} \int_{a_i}^{\infty} e^{-t}(n+1)t^n \mathrm{d}t \\ &= \sum_{i=1}^{r} b_i a_i^{n+1} + (n+1)x_n(0) = u_{n+1} + (n+1)v_n = u_{n+1} + (n+1)! \sum_{i=0}^{n} \frac{u_i}{i!} \\ &= (n+1)! \sum_{i=0}^{n+1} \frac{u_i}{i!} = v_{n+1} \end{aligned}$$

Pour (b) il suffit d'écrire pour $k \geq 0$ et $n \geq (k+1)r$

$$\begin{aligned} x_n(k+1) &= \sum_{i=1}^{r} b_i e^{a_i} \int_{a_i}^{\infty} e^{-t} t^{n-(k+1)r}(t-a_1)^{k+1} \cdots (t-a_r)^{k+1}\mathrm{d}t \\ &= \sum_{i=1}^{r} b_i e^{a_i} \int_{a_i}^{\infty} e^{-t} t^{n-(k+1)r}(t-a_1)^{k} \cdots (t-a_r)^{k}(t^r - s_1 t^{r-1} - \cdots - s_r)\mathrm{d}t \\ &= \sum_{i=1}^{r} b_i e^{a_i} \int_{a_i}^{\infty} e^{-t} t^{n-kr}(t-a_1)^{k} \cdots (t-a_r)^{k}\mathrm{d}t \\ &\quad - s_1 \sum_{i=1}^{r} b_i e^{a_i} \int_{a_i}^{\infty} e^{-t} t^{n-kr-1}(t-a_1)^{k} \cdots (t-a_r)^{k}\mathrm{d}t \\ &\quad - \cdots - s_r \sum_{i=1}^{r} b_i e^{a_i} \int_{a_i}^{\infty} e^{-t} t^{n-kr-r}(t-a_1)^{k} \cdots (t-a_r)^{k}\mathrm{d}t \\ &= x_n(k) - s_1 x_{n-1}(k) - \cdots - s_r x_{n-r}(k) \end{aligned}$$

On conclut alors la preuve de la question par une récurrence sur k : "Pour tout $n \in \mathbb{N}$, tel que $n \geq kr$, $x_n(k) = v_n(k)$".

— Initialisation : Il s'agit directement du point (a).

— Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq kr$, $x_n(k) = v_n(k)$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq (k+1)r$ alors par le point (b)

$$x_n(k+1) = x_n(k) - s_1 x_{n-1}(k) - \cdots - s_r x_{n-r}(k) = v_n(k) - s_1 x_{n-1}(k) - \cdots - s_r v_{n-r}(k) = v_n(k+1)$$

Où on a successivement utilisé le point (b), l'hypothèse de récurrence (on a bien $n - i \geq kr$, pour $i = 0, \ldots, r$) et la question 28. Ainsi on peut conclure que

$$\boxed{\forall k, n \in \mathbb{N},\ n \geq kr \Rightarrow v_n(k) = \sum_{i=1}^{r} b_i e^{a_i} \int_{a_i}^{\infty} e^{-t} t^{n-kr}(t-a_1)^{k} \cdots (t-a_r)^{k}\mathrm{d}t}$$

Cette question peut sembler hors de propos, puisque la représentation intégrale des coefficients $v_n(k)$ n'est pas utilisée dans la suite du sujet. Cependant, cette expression intégrale a été introduite par Hilbert dans une démonstration antérieure à celle présentée dans ce sujet du théorème d'Hermite-Lindemann-Weierstrass. Le fait que les coefficients $v_n(k)$ soient précisément des quantités intervenant dans le travail de Hilbert montre que, malgré des approches de démonstration en apparence très différentes, les deux preuves présentent de grandes similitudes.

F. Démonstration de la proposition 1

Dans cette partie, nous démontrons la proposition 1, concluant la démonstration du théorème 1. Il nous suffira de prouver qu'il existe un entier $k_0 \geq 0$ tel que la série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n(k_0) X^n$$

soit un polynôme (d'après la question 27).

34. Montrer que si $v_n(k)$ n'est pas nul et $n \geq kr$, alors

$$k! \leq |D^n v_n(k)| \leq c_2 (AD)^n C^k.$$

L'inégalité de droite est simplement obtenue en multipliant l'inégalité de la question 29 par D^n. Pour l'inégalité de gauche, on sait que, par la question 32, dès que $n \geq kr$, $k!$ divise $D^n v_n(k)$ et donc si $D^n v_n(k) \neq 0$ on a bien une inégalité entre les valeur absolues. Ainsi, si $n \geq kr$ et si $v_n(k) \neq 0$,

$$\boxed{k! \leq |D^n v_n(k)| \leq c_2 (AD)^n C^k}$$

35. En déduire qu'il existe un entier k_0 tel que

$$v_n(k) = 0 \text{ pour tous } k \geq k_0 \text{ et } kr \leq n \leq 10kr.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ satisfaisant à $kr \leq n \leq 10kr$, les inégalités de la question précédente peuvent être réécrites en

$$k! \leq |D_n^v(k)| \leq c_2 \big[(AD)^{10r} C\big]^k$$

Comme les constantes c_2, A, C et D ne dépendent pas de k, par croissance comparée $\lim\limits_{k\to\infty} c_2 \big[(AD)^{10r} C\big]^k / k! = 0$. Donc il existe un entier k_0 tel que

$$\forall k \geq k_0,\ k! > c_2 \big[(AD)^{10r} C\big]^k$$

Pour de tels valeurs de k, l'inégalité $k! \leq |D_n^v(k)| \leq c_2 \big[(AD)^{10r} C\big]^k$ n'est donc pas possible : ce que impose que $v_n(k)$ est nul. Ainsi

$$\boxed{\forall k \geq k_0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ kr \leq n \leq 10kr \Rightarrow v_n(k) = 0}$$

36. Conclure que $v_n(k_0) = 0$ pour tout $n \geq k_0 r$.

Il s'agit d'étendre le résultat de la question précédente à plus de valeur de n. On procède par récurrence sur $i \in \mathbb{N}$, en montrant : "$\forall k \geq k_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $kr \leq n \leq 10kr + i \Rightarrow v_n(k) = 0$".

- Initialisation : C'est exactement le contenu de la question précédente.
- Hérédité : Soit $i \in \mathbb{N}$ tel que l'hypothèse de récurrence soit vraie au rang i. Soit $k \geq k_0$ et $n \in \mathbb{N}$ satisfaisant $kr \leq n \leq 10kr + i + 1$. Si $n < 10kr + i + 1$ alors on obtient le résultat directement par hypothèse de récurrence. Il reste donc à traiter le cas $n = 10kr + i + 1$. Par la relation de récurrence de la question 28

$$v_{10kr+i+1} = v_{10kr+i+1}(k+1) + s_1 v_{10kr+i}(k) + \cdots + s_r v_{10kr+i+1-r}(k)$$

On vérifie que $(k+1)r \leq 10kr + i + 1 \leq 10(k+1)r + i$ donc par hypothèse de récurrence le premier terme de la somme est nul. De plus pour $j = 1, \ldots, r$, on vérifie également que $kr \leq 10kr + i + 1 - j \leq 10kr + i$. Donc de même, les autres termes de la somme sont également nuls. Ce qui conclut la démonstration par récurrence.

La démonstration par récurrence pour $k = k_0$ affirme que

$$\forall i \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ k_0 r \leq n \leq 10k_0 r + i \Rightarrow v_n(k_0) = 0$$

Comme pour tout valeur de n, on peut trouver une valeur de $i \in \mathbb{N}$ telle que $n \leq 10k_0r+i$, on peut conclure

$$\boxed{\forall n \geq k_0 r,\ v_n(k_0) = 0}$$

Le théorème est démontré !

G. Fonctions E

Dans cette dernière partie, on présente une généralisation à une classe plus large de séries entières à coefficients rationnels de l'énoncé de la question 23, à savoir le fait que le quotient par $X-1$ d'un polynôme exponentiel s'annulant en 1 est encore un polynôme exponentiel. Une *fonction E* (sous entendu : à coefficients rationnels) est une série entière

$$f(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} X^n \in \mathbb{Q}[\![X]\!]$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

(a) f est solution d'une équation différentielle ;

(b) il existe un nombre réel $C > 0$ tel que

$$|b_n| \leq C^n \text{ et } \text{dén}(b_0, \ldots, b_n) \leq C^n \text{ pour tout } n \geq 1,$$

où $\text{dén}(b_0, \ldots, b_n)$ désigne le plus petit entier $d \geq 1$ tel qe $db_0, \ldots, db_n$ soient des entiers ("le dénominateur commun de $b_0, \ldots, b_n$").

Les polynômes à coefficients rationnels sont des exemples "triviaux" de fonctions E. Rappelons que $\widehat{f}(X)$ désigne la transformée de Laplace introduite dans la question 17.

37. Monter que si f est une fonction E, alors la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!}\alpha^n$ converge pour tout nombre réel α. On note $f(\alpha)$ sa valeur.

L'hypothèse (b) implique notamment que le terme général de la série vérifie $b_n|\alpha|^n/n! = \mathcal{O}(C^n|\alpha|^n/n!)$. La série de terme général $C^n|\alpha|^n/n!$ étant absolument convergente (c'est l'exponentielle) par critère de comparaison entre séries, $\boxed{\text{la série numérique } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!}\alpha^n \text{ converge pour tout nombre réel } \alpha}$.

38. Soit f une fonction E qui n'est pas un polynôme. Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} b_n\alpha^n$ diverge pour tout nombre réel α avec $|\alpha| > R$.

Raisonnons par contraposée. Supposons que pour tout $R > 0$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $|\alpha| > R$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n\alpha^n$ converge. Montrons que $\widehat{f}$ (donc également f) est un polynôme. Pour $R = C$, il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $|\alpha| > C$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n\alpha^n$ converge. Pour $n \in \mathbb{N}$, on observe que

$$|b_n\alpha^n| \geq |b_nC^n| \geq |b_n \,\text{dén}(b_0, \ldots, b_n)| \in \mathbb{Z}$$

Par comparaison, la série à coefficients entiers $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \,\text{dén}(b_0, \ldots, b_n)$ converge également. La question 3, appliquée à $\alpha = 1$ assure que $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \,\text{dén}(b_0, \ldots, b_n)X^n$ est un polynôme. Comme $\text{dén}(b_0, \ldots, b_n)$ est non nul, il en va de même pour $\widehat{f}$. Donc, $\boxed{\text{si } f \text{ est une fonction } E \text{ qui n'est pas un polynôme alors } \sum_{n=0}^{\infty} b_n\alpha^n}$ $\boxed{\text{diverge dès que } |\alpha| > C}$.

39. Quelles sont les fonctions E telles que $\widehat{f}(X)$ est aussi une fonction E ?

Par la question 37, si $\widehat{f}(X)$ est une fonction E alors $\widehat{f}(X)$ a un rayon de convergence infini. Or, la question précédente affirme que si $\widehat{f}$ n'est pas un polynôme alors son rayon de convergence est fini. Donc f est un polynôme. Même si c'est marqué dans l'énoncé, on vérifie formellement que les polynômes sont des fonctions E. Soit $f = \sum_{n=0}^{N} \frac{b_n}{n!} X^n \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme de degrés N. Alors

(a) f est solution de l'équation $f^{(N+1)} = 0$.

(b) En posant $C = \max\{|b_0|, \ldots, |b_N|, \text{dén}(b_0, \ldots, b_N)\}$, on a bien

$$|b_n| \leq C^n \text{ et } \text{dén}(b_0, \ldots, b_n) \leq C^n \text{ pour tout } n \geq 1$$

Ainsi, les fonctions E telles que leur transformée de Laplace est aussi un fonction E sont exactement les polynômes.

40. Démontrer que les fonctions E sont stables par addition et multiplication.

On montre quelque chose d'un petit peu plus fort : on vérifie que les propriétés (a) et (b) sont chacune (indépendamment de l'autre) stables par somme et produit.

(a) Pour montrer que la somme et le produit de deux solutions d'équations différentielles sont encore solutions d'une équation différentielle, on mène un raisonnement d'algèbre linéaire sur le corps $\mathbb{Q}(X)$ des fractions rationnelles à coefficient rationnels. Cependant, $\mathbb{Q}[\![X]\!]$ ne peut pas directement être muni d'une structure de $\mathbb{Q}(X)$ espace vectoriel. En effet, on ne peut pas développer en série $1/X$, et donc le produit $1/X \cdot 1$ serait mal défini. Il faut donc travailler dans un espace plus gros.

On définit $\mathbb{Q}(\!(X)\!)$ l'espace des séries formelles de Laurent, constitué des éléments de la forme

$$f(X) = \sum_{n=N}^{\infty} b_n X^n$$

où $N \in \mathbb{Z}$. Il s'agit donc d'une extension des séries formelles, où l'on autorise un nombre fini de puissance négative de X. La somme et le produit sur de telles séries sont définis de manière analogue : terme à terme pour la somme, et en 'développant' formellement pour le produit. Pour $f(X) = \sum_{n=N}^{\infty} b_n X^n$ et $g(X) = \sum_{n=M}^{\infty} c_n X^n$ deux séries formelles de Laurent :

$$(f+g)(X) = \sum_{n=\min(N,M)}^{\infty} (b_n + c_n) X^n \qquad (f \cdot g)(X) = \sum_{n=N+M}^{\infty} \left(\sum_{k=N}^{n-M} b_k c_{n-k} \right) X^n$$

On peut vérifier (la réponse à cette question est déjà assez longue), comme pour les séries, que ces opérations munissent de $\mathbb{Q}(\!(X)\!)$ d'une structure d'anneau commutatif intègre (et même de corps). On a vu, en question 5, que les fractions rationnelles sans pôle en zéro de $\mathbb{Q}(X)$ peuvent être développées en séries entières. Grâce à l'extension aux séries de Laurent, toute les fractions fractionnelles, peuvent être développées en séries de Laurent. En effet, toute fraction rationnelle peut s'écrire sous la forme $P/(QX^k)$ où P/Q n'a pas de pôle en zéro. En considérant $f \in \mathbb{Q}[\![X]\!]$ le développement de P/Q, $f(X)/X^k$ est donc le développement en série de Laurent de $P/(QX^k)$. On vérifie alors que le produit externe de $\mathbb{Q}(X)$ sur $\mathbb{Q}(\!(X)\!)$ induit par le développement en série de Laurent, confère à $\mathbb{Q}(\!(X)\!)$ une structure de $\mathbb{Q}(X)$ espace vectoriel. On peut également définir la dérivée formelle d'une série formelle de Laurent par la formule $\left(\sum_{n=N}^{\infty} b_n X^n\right)' = \sum_{n=N}^{\infty} n b_n X^{n-1}$ et vérifier que cette opération vérifie bien les propriétés usuelles et est compatible avec la dérivation sur $\mathbb{Q}(X)$.

Pour $f \in \mathbb{Q}[\![X]\!]$ on définit

$$V[f] = \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}(X)}(f, f', f'', \dots, f^{(n)}, \dots)$$

le sous espace de $\mathbb{Q}(\!(X)\!)$ engendré par les dérivées successives de f. On montre alors le lemme suivant

Lemme 1. *$f \in \mathbb{Q}[\![X]\!]$ est solution d'une équation différentielle à coefficients dans $\mathbb{Q}[X]$ si est seulement si $V[f]$ est un sous espace de dimension fini de $\mathbb{Q}(\!(X)\!)$.*

$\Leftarrow$: Le sens réciproque est facile. Si $\dim V[f] = n$, alors la famille $f, f', \dots f^{(n)}$ (qui contient $n+1$ éléments) est liée sur $\mathbb{Q}(X)$. Il existe donc $n+1$ fractions rationnelles $Q_0, \dots Q_n$ telles que

$$Q_n f^{(n)} + \cdots + Q_1 f' + Q_0 f = 0$$

En multipliant par un dénominateur commun des Q_i on obtient bien une équation différentielle pour f à coefficients dans $\mathbb{Q}[X]$.

$\Rightarrow$: Supposons que f soit solution d'une équation différentielle d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{Q}[X]$. Quitte à diviser par le polynôme (non nul) en facteur de $f^{(n)}$, on peut supposer qu'on a la relation

$$f^{(n)} = Q_0 f + Q_1 f' + \cdots + Q_{n-1} f^{(n-1)} \tag{1}$$

avec $Q_i \in \mathbb{Q}(X)$ pour $i = 0, \dots, n-1$. On montre alors

$$V[f] = \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}(X)}(f, f', \dots, f^{(n-1)})$$

ce qui permet de conclure que $V[f]$ est de dimension finie (inférieur à n). L'inclusion $\supset$ est immédiate. L'autre inclusion est obtenue par récurrence : en dérivant l'équation (1) on observe que toute dérivée d'ordre supérieur à n peut être exprimée comme combinaison linéaire de dérivées d'ordres plus petits. En itérant, on obtient que $f^{(k)} \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}(X)}(f, f', \dots, f^{(n-1)})$ dès que $k \geq n$. Par combinaison linéaire on a donc bien le résultat.

Pour deux séries $f, g \in \mathbb{Q}[\![X]\!]$, on définit

$$V[f, g] = \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}(X)}\{f^{(k)} g^{(l)} | k, l \in \mathbb{N}\}$$

l'espace engendré par le produit des dérivées à tous les ordres de f et g. Si f et g sont toutes les deux solutions d'une équation différentielle à coefficients dans $\mathbb{Q}[X]$, alors $\dim V[f, g] < \infty$. En effet le même argument que celui du Lemme permet de réduire les ordres des dérivées de f et g pour ne faire apparaître que ceux strictement inférieurs aux ordres des équations. Plus précisément, si les ordres des équations de f et g sont respectivement n et m on a l'égalité

$$V[f, g] = \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}(X)} \left\{ f^{(k)} g^{(l)} \middle| k \in [\![0, n-1]\!],\ l \in [\![0, m-1]\!] \right\}.$$

qui est bien de dimension finie.

Après cette très longue introduction technique, on a enfin les outils pour clore cette partie de la question. Soient f et g deux solutions d'équations différentielles. On observe les inclusions

$$V[f+g] \subset V[f, g] \qquad\qquad V[f \cdot g] \subset V[f, g]$$

conséquence de la linéarité de la dérivée et de la formule de Leibniz pour la dérivée d'un produit. Comme $V[f, g]$ est de dimension finie il en va de même pour $V[f+g]$ et $V[f \cdot g]$. Le lemme permet de conclure que $f+g$ et $f \cdot g$ sont solutions d'une équation différentielle. Ainsi, la propriété (a) est stable par somme et produit.

(b) Soient $f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} X^n$ et $g = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} X^n$ deux fonctions vérifiant la propriété (b) : il existe deux réels $C, D > 0$ tels que pour $n \geq 1$,

$$|b_n| \leq C^n \qquad |c_n| \leq D^n \qquad \text{dén}(b_0, \dots, b_n) \leq C^n \qquad \text{dén}(c_0, \dots, c_n) \leq D^n$$

La somme $f + g$ a pour coefficients $(b_n + d_n)/n!$. On vérifie alors

$$|b_n + c_n| \leq C^n + D^n \leq (C + D)^n$$

et

$$\text{dén}(b_0 + c_0, \dots, b_n + c_n) \leq \text{dén}(b_0, \dots, b_n)\, \text{dén}(c_0, \dots, c_n) \leq (CD)^n$$

l'inégalité sur les dénominateurs communs étant obtenue en remarquant que $(b_i + c_i)\, \text{dén}(b_0, \dots, b_n)\, \text{dén}(c_0, \dots, c_n) \in \mathbb{Z}$ (pour $i \in [\![0, n]\!]$) et en utilisant la minimalité de $\text{dén}(b_0 + c_0, \dots, b_n + c_n)$. Donc le réel $\max(C + D, CD)$ convient et $f + g$ vérifie la propriété (b).

Le produit fg a pour coefficient

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k!} \frac{c_{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k c_{n-k}$$

On vérifie donc

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k c_{n-k} \right| \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |b_k| |c_{n-k}| \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} C^k D^{n-k} = (C + D)^n$$

Soit $i \in [\![0, n]\!]$ on observe que

$$\sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} b_k c_{i-k} \,\text{dén}(b_0, \ldots, b_n)\,\text{dén}(c_0, \ldots, c_n) \in \mathbb{Z}$$

Donc

$$\text{dén}(b_0, c_0, \ldots, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k c_{n-k}) \leq \text{dén}(b_0, \ldots, b_n)\,\text{dén}(c_0, \ldots, c_n) \leq (CD)^n$$

Donc le réel $\max(C+D, CD)$ convient également, et fg vérifie la propriété (b). Ainsi, la propriété (b) est stable par somme et produit.

On peut alors conclure que l'ensemble des fonctions E est stable par somme et produit.

41. Soit f un polynôme exponentiel. Montrer que f est une fonction E telle que $\widehat{f}$ est le développement en série entière d'une fraction rationnelle à pôles rationnels.

On a déjà vu que les polynômes sont des fonctions E. Il suffit alors de vérifier que les séries exponentielles e^{cX} (pour $c \in \mathbb{Q}$) sont des fonctions E, pour pouvoir conclure, par somme et produit, en utilisant la question précédente que les polynômes exponentiels sont des fonctions E. On vérifie alors aisément que si $f(X) = e^{cX} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{n!} X^n$ alors

(a) f satisfait $f' - cf = 0$.

(b) En posant $c = p/q$ ($p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$), il suffit de poser $C = \max(c, q)$ pour avoir si $n \geq 1$,

$$|c^n| \leq C^n \qquad\qquad \text{dén}(1, c, \ldots, c^n) \leq q^n \leq C^n.$$

Donc les polynômes exponentiels sont des fonctions E.

Comme la transformée de Laplace est linéaire, il suffit de vérifier que la transformée de Laplace de $X^k e^{cX}$ (pour $k \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{Q}$) est une fraction rationnelle à pôles rationnels, pour conclure que la transformée de Laplace d'un polynôme exponentiel est une fraction rationnelle à pôles rationnels. On écrit alors

$$\begin{aligned}\widehat{\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{n!} X^{n+k}\right)} &= \sum_{n=0}^{\infty} c^n \frac{(n+k)!}{n!} X^{n+k} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+k)\cdots(n+1) c^n X^{n+k} \\ &= X^k \left(\frac{d}{dX}\right)^k \sum_{n=0}^{\infty} C^n X^n = X^k \left(\frac{d}{dX}\right)^k \left(\frac{1}{1-cX}\right) \\ &= \frac{X^k c^k k!}{(1-cX)^{k+1}}\end{aligned}$$

qui est bien une fraction rationnelle à pôles rationnels ($1/c$ si $c \neq 0$, sinon c'est un polynôme). Ainsi, par combinaison linéaire, la transformée de Laplace d'un polynôme exponentiel est une fraction rationnelle à pôles rationnels.

42. Montrer que si $\sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n$ est le développement en série entière d'une fraction rationnelle à pôles rationnels, alors $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} X^n$ est une fonction E.

On commence par noter que si $\sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n$ est le développement en série entière d'une fraction rationnelle alors par convention elle n'a pas zéro comme pôle. Toute fraction rationnelle à pôles rationnels (non nuls) peut être décomposée en éléments simples sous la forme

$$R + \sum_{i=1}^{s} \frac{\beta_i}{(1-\alpha_i X)^{k_i}}$$

où $R \in \mathbb{Q}[X]$, $\alpha_i \in \mathbb{Q}^*$, $\beta_i \in \mathbb{Q}$ et $k_i \in \mathbb{N}^*$. Comme l'ensemble des fonctions E est stable par combinaisons

linéaires et que la transformée de Laplace est également linéaire, il suffit de montrer que si $f \in \mathbb{Q}[\![X]\!]$ a pour transformée de Laplace

$$\widehat{f}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n = \frac{1}{(1-aX)^{k+1}}$$

($a \in \mathbb{Q}^*$ et $k \in \mathbb{N}$) alors f est une fonction E.

Premièrement, puisque $\widehat{f}$ est le développement en série d'une fraction rationnelle alors par la question 12, $\widehat{f}$ est solution d'une équation différentielle. Puis par la question 17, f est également solution d'une équation différentielle.

Il reste donc à contrôler les coefficients b_n. On calcule

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(X) = \frac{1}{(1-aX)^{k+1}} &= \frac{1}{a^k k!}\left(\frac{d}{dX}\right)^k\left(\frac{1}{1-aX}\right) = \frac{1}{a^k k!}\left(\frac{d}{dX}\right)^k\left(\sum_{n=0}^{\infty} a^n X^n\right) \\
&= \frac{1}{a^k k!}\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a^n X^{n-k} \\
&= \frac{1}{a^k k!}\sum_{n=0}^{\infty}(n+k)(n+k-1)\cdots(n+1)a^{n+k}X^n \\
&= \frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}(n+k)(n+k-1)\cdots(n+1)a^n X^n
\end{aligned}$$

Alors pour $n \in \mathbb{N}$

$$b_n = \frac{(n+k)(n+k-1)\cdots(n+1)}{k!}a^n$$

On a

$$|b_n| \leq \frac{(n+k)^k}{k!}|a|^n \leq (n+k)^k(|a|+1)^n$$

On sait par croissance comparée que $(n+k)^k \underset{n\to\infty}{=} \mathcal{O}(2^n)$ donc il existe une constante $A > 1$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n+k)^k \leq A2^n \leq (2A)^n$$

Il vient alors pour $n \in \mathbb{N}*$, $|b_n| \leq (2A(|a|+1))^n$. De plus en écrivant sous forme réduite $a = p/q$ on a

$$\text{dén}(b_0, \ldots, b_n) \leq \text{dén}(\frac{1}{k!}, \frac{1}{k!p}, \ldots, \frac{1}{k!p^n}) = k!p^n \leq (k!p)^n$$

Ainsi pour $C = \max(2A(|a|+1), k!p)$ f vérifie la propriété (b). $\boxed{f \text{ est donc une fonction } E.}$

43. Montrer que la fonction de Bessel

$$J_0(X) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{X}{2}\right)^{2n}$$

est une fonction E telle que $J_0(X)$ satisfait à l'équation $(1+X^2)\widehat{J_0}(X)^2 = 1$. En déduire que $J_0(X)$ n'est pas un polynôme exponentiel.

Il s'agit de vérifier que $J_0(X)$ satisfait bien les deux propriétés (a) et (b). On commence par écrire

$$J_0(X) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\left(\frac{-1}{4}\right)^n\frac{(2n)!}{(n!)^2}X^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\left(\frac{-1}{4}\right)^n\binom{2n}{n}X^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}X^n = \sum_{n=0}^{\infty}c_n X^{2n}$$

où l'on a posé pour $n \in \mathbb{N}$, $b_{2n} = \left(\frac{-1}{4}\right)^n\binom{2n}{n}$ et $b_{2n+1} = 0$ ainsi que $c_n = \left(\frac{-1}{4}\right)^n\frac{1}{(n!)^2}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on observe que

$$c_{n+1} = \left(\frac{-1}{4}\right)^n\frac{1}{[(n+1)!]^2} = -\frac{1}{4}\frac{1}{(n+1)^2}c_n$$

On a donc la relation de récurrence $4(n+1)^2c_{n+1}+c_n=0$. Comme

$$J_0'(X)=\sum_{n=1}^{\infty}2nc_nX^{2n-1}$$
$$\text{donc,}\qquad \frac{d}{dX}(XJ_0'(X))=\sum_{n=1}^{\infty}(2n)^2c_nX^{2n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}4(n+1)^2c_{n+1}X^{2n+1}$$
$$\text{et,}\qquad XJ_0(X)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nX^{2n+1}$$

on observe que $J_0(X)$ vérifie l'équation différentielle, $\frac{d}{dX}(XJ_0')+XJ_0=0$, c'est à dire

$$XJ_0^{(2)}(X)+J_0'(X)+XJ_0(X)=0.$$

Il faut maintenant contrôler les coefficients b_n. Commes les coefficients d'ordre impair sont nuls, il suffit de contrôler ceux d'ordre pair. D'une part on observe que pour $n\in\mathbb{N}$

$$2^{2n}=(1+1)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\geq\binom{2n}{n}$$

On peut donc majorer :

$$|b_{2n}|=\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}\leq 1$$

De plus

$$\text{dén}(b_0,b_1,\ldots,b_{2n-1},b_{2n})=\text{dén}(b_0,b_2\ldots,b_{2n})\leq\text{dén}(1,1/2^2,\ldots,1/2^{2n})=2^{2n}$$

Ainsi, $C=2$ vérifie l'hypothèse (b). Donc $\boxed{J_0(X)\text{ est une fonction }E}$.

On a $\widehat{J}_0(X)=\sum_{n=0}^{\infty}b_{2n}X^{2n}$. Comme on observe que

$$b_{2n+2}=\left(\frac{-1}{4}\right)^{n+1}\binom{2n+2}{n+1}=-\frac{1}{4}\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}b_{2n},$$

on a la relation de récurrence $2(n+1)b_{2n+2}+(2n+1)b_{2n}=0$. Comme précédemment on remarque

$$\tfrac{d}{dX}\widehat{J}_0(X)=\sum_{n=0}^{\infty}2nb_{2n}X^{2n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}2(n+1)b_{2n+2}X^{2n+1}$$
$$X^2\tfrac{d}{dX}\widehat{J}_0(X)=X^2\sum_{n=0}^{\infty}2nb_{2n}X^{2n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}2nb_{2n}X^{2n+1}$$
$$X\widehat{J}_0(X)=\sum_{n=0}^{\infty}b_{2n}X^{2n+1}$$

En sommant, la relation de récurrence sur les b_{2n} assure que $(1+X^2)\widehat{J}_0(X)'+X\widehat{J}_0(X)=0$, c'est à dire

$$\widehat{J}_0(X)'+\frac{X}{1+X^2}\widehat{J}_0(X)=0$$

Comme on a vu que $|b_{2n}|\leq 1$ le rayon de convergence de $\widehat{J}_0(X)$ est d'au moins 1. Par compatibilité de la dérivée avec l'évaluation des séries entières dans leur rayon de convergence, on a alors l'équation différentielle (pour une fonction) pour $x\in]-1,1[$, $\widehat{J}_0(x)'+\frac{x}{1+x^2}\widehat{J}_0(x)=0$. Cette équation homogène linéaire d'ordre 1 se résout sur $]-1,1[$ grâce à une primitive de $x\mapsto\frac{x}{1+x^2}$ qui est $x\mapsto\frac{1}{2}\ln\bigl(1+x^2\bigr)$. La condition initiale $\widehat{J}_0(0)=b_0=1$ impose donc

$$\forall x\in]-1,1[,\ \widehat{J}_0(x)=e^{-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

On arrive alors à l'égalité (de fonctions) pour $x \in]-1,1[$, $(1+x^2)\widehat{J}_0(x)^2 = 1$. Les deux séries entières $(1+X^2)\widehat{J}_0(X)^2$ et 1, toutes deux de rayon de convergence strictement positif, sont égales (en tant que fonction) sur un voisinage de 0. Ainsi, le théorème d'unicité du développement en série entière assure l'égalité (en tant que série formelle)

$$\boxed{(1+X^2)\widehat{J}_0(X) = 1}$$

Finalement, supposons, par l'absurde, que $J_0(X)$ est un polynôme exponentiel. Alors par la question 41 $\widehat{J}_0(X)$ est le développement en série d'une fraction rationnelle à pôle rationnel. C'est donc également le cas de $\widehat{J}_0(X)^2 = \frac{1}{1+X^2}$ qui a pour pôle $\pm i \notin \mathbb{Q}$: Absurde ! Donc, $\boxed{J_0(X) \text{ n'est pas un polynôme exponentiel}}$.

44. Montrer que les zéros réels de la fonction de Bessel $J_0(X)$ sont simples, c'est-à-dire si $J_0(\alpha) = 0$, alors $J_0'(\alpha) \neq 0$.

On commence par observer que $J_0(0) = \frac{b_0}{0!} = 1 \neq 0$, donc 0 n'est pas une racine (multiple) de $J_0(X)$. Soit alors $\alpha \in \mathbb{R}^*$. On a vu en question 37, que $J_0(X)$ a un rayon de convergence infini. De même que précédemment, et en utilisant l'équation différentielle obtenue en question précédente, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

$$J_0''(x) + \frac{1}{x}J_0'(x) + J_0(x) = 0$$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre deux valable au voisinage de $\alpha \neq 0$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz affirme alors que si $J_0(\alpha) = J_0'(\alpha) = 0$ alors $x \mapsto J_0(x)$ est nulle au voisinage de α. Cela impliquerait que $J_0(X)$ est la série entière nulle, ce qui est absurde. Ainsi, $\boxed{\text{les zéros de } J_0(X) \text{ sont simples}}$.

45. Soit $f(X)$ une fonction E telle que $f(1) = 0$. Montrer que la série entière $f(X)/(X-1)$ est encore une fonction E.

On vérifie successivement les deux propriétés.

(a) On commence par remarquer que $\frac{1}{X-1}$ étant une fraction rationnelle, son développement en série entière satisfait une équation différentielle (question 12). En question 40, on a montré que l'ensemble des séries entières solutions d'une équation différentielle est stable par multiplication. Ainsi, si f est une fonction E, elle est solution d'une équation différentielle et donc alors $\boxed{f(X)/(X-1) \text{ est solution d'une équation différentielle}}$.

(b) En notant $f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!}X^n$, on obtient que

$$\frac{f(X)}{X-1} = -\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}X^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}X^n\right) = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{b_k}{k!}\right)X^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(n!\sum_{k=0}^{n}\frac{b_k}{k!}\right)X^n$$

On pose alors pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{b_k}{k!}$ de sorte à ce que $\frac{f}{X-1} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{v_n}{n!}X^n$. On remarque que ce sont exactement les coefficients introduits en partie D. On va donc utiliser des arguments similaires à ceux utilisés en partie E (notamment question 26) pour contrôler ces coefficients (le signe '$-$' global n'a pas d'importance). Comme f est une fonction E, on note $C > 0$ tel que pour $n \geq 1$,

$$|b_n| \leq C^n \qquad \text{dén}(b_0,\dots,b_n) \leq C^n$$

Soit $n \geq 1$, comme $f(1) = 0$, $\sum_{k=0}^{n}\frac{b_k}{k!} = -\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{b_k}{k!}$. Il suit donc que

$$|v_n| = \left|n!\sum_{k=0}^{n}\frac{b_k}{k!}\right| = \left|n!\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{b_k}{k!}\right| \leq n!\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|b_k|}{k!} \leq n!\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{C^k}{k!}$$

Comme la suite (C/k) tend vers 0, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq N$, $C/k \leq 1/2$. Par récurrence immédiate il vient que pour $k \geq n \geq N$,

$$\frac{C^k}{k!} \leq \frac{C^n}{n!}\frac{1}{2^{k-n}}$$

On peut donc majorer pour $n \geq N$,

$$|v_n| \leq n! \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{C^n}{n!} \frac{1}{2^{k-n}} \leq C^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = C^n$$

En posant $D = \max(C, 1, |v_1|, \ldots, |v_{N-1}|) > 0$, on alors

$$\boxed{\forall n \geq 1,\ |b_n| \leq D^n}$$

Enfin, soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$. On observe que

$$v_k \,\text{dén}(b_0, \ldots, b_n) = \sum_{i=0}^{k} \underbrace{\frac{k!}{i!}}_{\in\mathbb{Z}} \underbrace{b_i \,\text{dén}(b_0, \ldots, b_n)}_{\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}$$

Par minimalité du dénominateur commun, on en conclut que

$$\boxed{\text{dén}(v_0, \ldots, v_n) \leq \text{dén}(b_0, \ldots, b_n) \leq C^n \leq D^n}$$

Donc $f(X)/(X-1)$ est bien une fonction E.

Ce dernier résultat est l'un des ingrédients sur lequel repose la méthode mise en place par Y. André à la fin des années 90 pour démontrer le *théorème de Siegel-Shidlovskii*. Il s'agit d'un énoncé de transcendance pour les valeurs des fonction E en des nombre rationnels, qui généralise le théorème d'Hermite-Lindemann-Weierstrass et implique, par exemple, que le nombre $J_0(\alpha)$ est transcendant pour tout rationnel non nul α.

Fin du sujet