Notations

— Dans toute la suite, d désignera un entier strictement positif. On désignera par $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des matrices carrées de taille $d \times d$ à coefficients dans $\mathbb{R}$. Pour tous $A, B \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ on notera

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^T B)\,,$$

où $\operatorname{tr}(M) = \sum_{i=1}^d M_{ii}$ est la trace de la matrice $M \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ et M^T sa transposée. Selon la convention habituelle, M_{ij} désigne le coefficient de la i-ème ligne et de la j-ème colonne de la matrice M pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant d$.

— Pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^d$, on notera $|u|$ sa norme euclidienne canonique. Un tel vecteur sera considéré comme un vecteur colonne et u^T sera le vecteur ligne associé. On notera $\langle u, v\rangle_{\mathbb{R}^d} = u^T v$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^d$ lorsque u et v sont dans $\mathbb{R}^d$. En particulier on aura $|u|^2 = \langle u, u\rangle_{\mathbb{R}^d} = u^T u$.

— On notera I_d la matrice identité de $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$. On désignera par

$$\mathrm{O}_d(\mathbb{R}) = \{\ M \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R}) \mid M^T M = \mathrm{I}_d\}$$

le groupe orthogonal sur $\mathbb{R}^d$ et par

$$\mathrm{SO}_d(\mathbb{R}) = \{\ M \in \mathrm{O}_d(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\}$$

le groupe spécial orthogonal, où $\det(M)$ désigne le déterminant de $M \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R})$. On notera

$$\operatorname{Dep}(\mathbb{R}^d) = \mathbb{R}^d \times \mathrm{SO}_d(\mathbb{R})\,.$$

— Pour toute famille $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant d}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^d$, on notera $A = (a_1|\ldots|a_d)$ la matrice de $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ dont la i-ème colonne de A est formée des coordonnées du vecteur a_i.

— Pour toute famille de réels $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant d}$, on notera $\operatorname{Diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ la matrice diagonale de $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ de coefficients diagonaux $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant d}$.

1. Préliminaires

(1) Soit $R \in \mathrm{O}_d(\mathbb{R})$. Vérifier que $\det(R) \in \{-1, +1\}$.

(2) Vérifier que $(A, B) \mapsto \langle A, B \rangle$ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$. On notera $\|A\| = \sqrt{\langle A, A \rangle}$ la norme associée.

(3) (a) Montrer que pour tous $u, v \in \mathbb{R}^d$ et $A \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R})$, on a $\langle u, Av \rangle_{\mathbb{R}^d} = \langle uv^T, A \rangle$.

(b) Montrer que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ pour $A, B \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R})$.

(c) En déduire que pour tous A, B et C dans $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ on a

$$\langle A, BC \rangle = \langle B^T A, C \rangle = \langle AC^T, B \rangle \,.$$

(4) Soit $D = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ une matrice diagonale à coefficients positifs et soit $R \in \mathrm{O}_d(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$, on a $|R_{ii}| \leqslant 1$ où R_{ii} est le i-ème coefficient diagonal de R.

(b) En déduire que $\langle D, R \rangle \leqslant \mathrm{tr}(D)$.

2. Ensemble des déplacements de $\mathbb{R}^d$

Pour tout $g = (\tau, R) \in \mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)$, on note $\phi_g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ l'application définie par

$$\phi_g(x) = Rx + \tau \,.$$

On remarquera que lorsque $\tau = 0$, ϕ_g est une rotation vectorielle de l'espace $\mathbb{R}^d$, et lorsque $R = \mathrm{I}_d$, ϕ_g est une translation. Dans le cas général, on dira que ϕ_g est un déplacement de l'espace $\mathbb{R}^d$.

(5) (a) Vérifier que pour tous $a, b \in \mathbb{R}^d$ et $g \in \mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)$, on a $|\phi_g(a) - \phi_g(b)| = |a - b|$.

(b) Montrer pour tous $g, g' \in \mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)$, on a $\phi_g = \phi_{g'}$ si et seulement si $g = g'$.

(c) Montrer qu'il existe un unique $e \in \mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)$ tel que ϕ_e soit l'application identité sur $\mathbb{R}^d$ c'est-à-dire que $\phi_e(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

(6) (a) Vérifier que pour tous $g, g' \in \mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)$, il existe un unique $g'' \in \mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)$ tel que $\phi_{g''} = \phi_{g'} \circ \phi_g$. On notera $g'g$ cet élément dans la suite.

(b) Vérifier que pour tous g_1, g_2 et g_3 dans $\mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)$ on a $g_1(g_2g_3) = (g_1g_2)g_3$.

(7) Soit $g \in \mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)$.

(a) Montrer que ϕ_g est bijective. On note ϕ_g^{-1} son application réciproque.

(b) Montrer qu'il existe un unique $g' \in \mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)$, que l'on explicitera en fonction de g, tel que $\phi_{g'} = \phi_g^{-1}$. On notera $g' = g^{-1}$.

(c) Vérifier que $ge = eg = g$ puis que $gg^{-1} = g^{-1}g = e$.

(8) Pour quelles valeurs de d a-t-on $gg' = g'g$ pour tous $g, g' \in \mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)$?

3. Distance à déplacement près

On considère n un entier strictement positif et

$$\mathscr{E}_d^n(\mathbb{R}) = \{\boldsymbol{z} = (z_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \mid z_i \in \mathbb{R}^d,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

l'espace vectoriel des familles de n points dans $\mathbb{R}^d$ muni de la norme $\|\boldsymbol{z}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |z_i|^2}$.
Pour tous $g \in \mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)$ et $\boldsymbol{z} \in \mathscr{E}_d^n(\mathbb{R})$ on note

$$g \cdot \boldsymbol{z} = (\phi_g(z_i))_{1\leqslant i\leqslant n}\,. \qquad (1)$$

(9) (a) Montrer que pour tous $g, g' \in \mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)$ et $\boldsymbol{z} \in \mathscr{E}_d^n(\mathbb{R})$, on a $g\cdot(g'\cdot \boldsymbol{z}) = (gg')\cdot \boldsymbol{z}$.

(b) Montrer que pour tous $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathscr{E}_d^n(\mathbb{R})$ et tout $g \in \mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)$, si $\boldsymbol{x} = g\cdot \boldsymbol{y}$ alors $\boldsymbol{y} = g^{-1}\cdot \boldsymbol{x}$.

Pour tous $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathscr{E}_d^n(\mathbb{R})$, on note

$$\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \inf\{\ \|\boldsymbol{y} - g\cdot \boldsymbol{x}\| \mid g \in \mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)\ \}\,. \qquad (2)$$

(10) (a) Montrer que pour tous $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathscr{E}_d^n(\mathbb{R})$ et tout $g \in \mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\|g\cdot \boldsymbol{y} - g\cdot \boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\|\,.$$

(b) En déduire que $\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \delta(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$.

(c) Montrer que pour tous $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in \mathscr{E}_d^n(\mathbb{R})^3$ et $(g,g') \in (\mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d))^2$, on a

$$\|\boldsymbol{z} - g\cdot\boldsymbol{x}\| \leqslant \|\boldsymbol{z} - (gg')\cdot\boldsymbol{y}\| + \|g'\cdot\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\|.$$

(d) En déduire que $\delta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) \leqslant \delta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \delta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$.

(11) Pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathscr{E}_d^n(\mathbb{R})$, on note $c(\boldsymbol{x}) = \{\ \boldsymbol{y} \in \mathscr{E}_d^n(\mathbb{R}) \mid \exists g \in \mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d),\ g\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}\ \}$.

(a) Montrer que si $c(\boldsymbol{x}) \cap c(\boldsymbol{y}) \neq \emptyset$ alors $c(\boldsymbol{x}) = c(\boldsymbol{y})$.

(b) Montrer que si $c(\boldsymbol{x}) = c(\boldsymbol{y})$ alors $\delta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0$.

4. Un problème d'optimisation

On fixe dans cette partie $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathscr{E}_d^n(\mathbb{R})$ et on introduit pour tout $(\tau,R) \in \mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)$

$$J(\tau,R) = \sum_{i=1}^n |\boldsymbol{y}_i - (R\boldsymbol{x}_i + \tau)|^2 = \|\boldsymbol{y} - g\cdot\boldsymbol{x}\|^2$$

où $g = (\tau,R)$.

(12) On note $\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \boldsymbol{x}_i$ et $\overline{\boldsymbol{y}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \boldsymbol{y}_i$.

(a) Montrer que $J(\tau,R) = (\sum_{i=1}^n |\boldsymbol{y}_i - \overline{\boldsymbol{y}} - R(\boldsymbol{x}_i - \overline{\boldsymbol{x}})|^2) + n|\overline{\boldsymbol{y}} - R\overline{\boldsymbol{x}} - \tau|^2$.

(b) En déduire que pour tout $R \in \mathrm{SO}_d(\mathbb{R})$, l'application $\tau \mapsto J(\tau,R)$ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ a un unique minimum, noté $\tau(R)$, que l'on explicitera.

(13) On munit $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ de la topologie associée à la norme $\|M\| = \sqrt{\langle M,M\rangle}$.

(a) Montrer que l'application $f : \mathscr{M}_d(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M^T M$ est continue.

(b) Montrer que $\mathrm{SO}_d(\mathbb{R})$ est un sous-ensemble fermé borné de $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$.

(14) (a) Montrer qu'il existe $R_* \in \mathrm{SO}_d(\mathbb{R})$ tel que $J(\tau(R_*),R_*) \leqslant J(\tau,R)$ pour tout $(\tau,R) \in \mathrm{Dep}(\mathbb{R}^d)$.

(b) Montrer que R_* n'est pas forcément unique.

(15) Montrer que si $V_n(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |\boldsymbol{x}_i - \overline{\boldsymbol{x}}|^2$ et $V_n(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |\boldsymbol{y}_i - \overline{\boldsymbol{y}}|^2$ alors

$$\delta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2 = nV_n(\boldsymbol{x}) + nV_n(\boldsymbol{y}) - 2\sup_{R\in\mathrm{SO}_d(\mathbb{R})} \langle Z(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),R\rangle \tag{3}$$

où $Z(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ est une matrice que l'on précisera.

5. Calcul de $\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ dans le cas où $\det(Z(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) > 0$.

Soit $Z \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ une matrice inversible. On note $S = Z^T Z$.

(16) Montrer qu'il existe une famille décroissante $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant d}$ de réels strictement positifs et une base orthonormée $(u_1, \ldots, u_d)$ de $\mathbb{R}^d$ telle que $S u_i = \lambda_i u_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$.

On appellera *valeurs singulières* de Z la famille $(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_d})$.

(17) On considère $v_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} Z u_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$.

(a) Montrer que $(v_1, \ldots, v_d)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^d$.

(b) Vérifier que si $U = (u_1 | \ldots | u_d)$, $V = (v_1 | \ldots | v_d)$ et $D = \mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_d})$ alors $Z = V D U^T$.

(18) Mettre sous la forme précédente $Z = V D U^T$, en spécifiant vos choix de U, V et D, les matrices $Z_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $Z_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

(19) On considère que $\det(Z) > 0$.

(a) Montrer que si $R \in \mathrm{SO}_d(\mathbb{R})$ alors $V^T R U \in \mathrm{SO}_d(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que

$$\sup_{R \in \mathrm{SO}_d(\mathbb{R})} \langle Z, R \rangle = \sup_{R \in \mathrm{SO}_d(\mathbb{R})} \langle D, R \rangle .$$

(20) Donner la valeur de $\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ en fonction de $V_n(\boldsymbol{x})$, $V_n(\boldsymbol{y})$ et des valeurs singulières de $Z(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ dans le cas où $\det(Z(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) > 0$.

6. Le cas où $\det(Z(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) < 0$

On considère $R \in \mathrm{O}_d(\mathbb{R})$.

(21) (a) Montrer que si λ est une valeur propre de R alors $\lambda \in \{+1, -1\}$.

(b) Montrer que $\det(R + I) = \det(R)\det(I + R^T)$.

(c) En déduire que si $\det(R) = -1$ alors $\det(R + I) = 0$. - Trpv, $\det(R+I) = \det((R+I)^T) = \det(R^T + I)$

On suppose dorénavant que $\det(R) = -1$.

(22) (a) Montrer qu'il existe une base orthonormée $(u_1, \dots, u_d)$ de $\mathbb{R}^d$ telle que l'on a $Ru_d = -u_d$ et $u_d^T Rx = 0$ pour tout $x \in E_1$ où $E_1 = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_{d-1})$.

(b) En déduire que $R(E_1) \subset E_1$ puis que $R(E_1) = E_1$.

On considère une matrice $D = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ diagonale de coefficients diagonaux $\alpha_i \geqslant 0$ décroissants. On note $U = (u_1| \dots |u_d)$.

(23) (a) Vérifier que $\langle D, R\rangle = \langle S, R'\rangle$ où $R' = U^T RU$ et $S = U^T DU$.

(b) Montrer que si $R_0 = (R'_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant d-1} \in \mathscr{M}_{d-1}(\mathbb{R})$ alors $R_0 \in \mathrm{O}_{d-1}(\mathbb{R})$.

(24) On pose $S_0 = (S_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant d-1} \in \mathscr{M}_{d-1}(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que $\langle D, R\rangle = \mathrm{tr}(S_0 R_0) - S_{dd}$.

(b) Montrer que $\mathrm{tr}(S_0 R_0) \leqslant \mathrm{tr}(S_0)$.

(c) Montrer que $\mathrm{tr}(S_0) + S_{dd} = \mathrm{tr}(D)$ et en déduire que $\langle D, R\rangle \leqslant \mathrm{tr}(D) - 2S_{dd}$.

(25) (a) Montrer que $S_{dd} = \sum_{j=1}^{d} \alpha_j U_{jd}^2$ où $U = (U_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant d}$.

(b) En déduire que $\langle D, R\rangle \leqslant (\sum_{i=1}^{d-1} \alpha_i) - \alpha_d$.

(26) Donner la valeur de $\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ en fonction de $V_n(\boldsymbol{x})$, $V_n(\boldsymbol{y})$ et des valeurs singulières de $Z(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ dans le cas où $\det(Z(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) < 0$.