ECOLES NORMALES SUPERIEURES

CONCOURS D'ADMISSION 2024

JEUDI 18 AVRIL 2024
08h00 - 14h00

FILIERE PC - Epreuve n° 7

PHYSIQUE C (U)

Durée : 6 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

Début de l'épreuve

Ce sujet comporte 13 pages numérotées de 1 à 13.

Consignes et indications générales

- *On néglige la gravité dans tout le sujet.*
- *Aucune question ne fait appel à la mécanique quantique.*
- *La justification des réponses et des étapes de raisonnement est prise en compte dans la notation.*
- *Pour les questions ouvertes appelant une justification ou une discussion, la longueur de la réponse attendue est entre quelques mots et quelques lignes (mais les réponses plus longues ne sont pas sanctionnées).*
- *Il est parfois demandé de vérifier que l'on retrouve une expression déjà obtenue dans une question précédente, ce qui peut aider à détecter et corriger d'éventuelles erreurs.*

Notations et conventions

- $(Oxyz)$ est un repère orthonormé, fixe dans le référentiel du laboratoire considéré comme un référentiel galiléen. Les vecteurs unitaires associés sont notés $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$.
- Élément de volume : $d\tau = dx\, dy\, dz$.
- Norme d'un vecteur : $A = \|\overrightarrow{A}\|$.
- $\dot{f}$ désigne la dérivée temporelle $\dfrac{df}{dt}$ d'une fonction $f(t)$, et $\ddot{f} = \dfrac{d^2f}{dt^2}$.
- Pour une fonction $f(\vec{r})$ qui ne dépend pas de la direction de $\vec{r}$, on pourra noter $f(r)$ au lieu de $f(\vec{r})$.
- « Positif » signifie « supérieur ou égal à zéro ».

Formulaire

En coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\text{grad}}\, f &= \frac{\partial f}{\partial r}\, \overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\, \overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\, \overrightarrow{u_\varphi}, \\
\text{div}\, \overrightarrow{A} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\, A_\theta\right) + \frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}.
\end{aligned}$$

$$\text{div}\left(f\,\overrightarrow{A}\right) = \overrightarrow{\text{grad}}\, f \cdot \overrightarrow{A} + f\,\text{div}\,\overrightarrow{A}$$

Données numériques

Masse molaire du lithium 6 : $M(^6\text{Li}) = 6{,}02\ \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$

Nombre d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6{,}02 \times 10^{23}\ \text{mol}^{-1}$

$k = 1{,}02 \times 10^{-18}\ \text{kg}\cdot\text{s}^{-2}$

$\sigma = 60\ \mu\text{m}$

Introduction

On appelle « système de particules en interaction » un système composé de N particules inter-agissant entre elles. Il peut s'agir par exemple de molécules dans un gaz ou un liquide, d'électrons et d'ions dans un plasma, ou encore d'étoiles dans une galaxie.

D'ordinaire, ces systèmes ont les caractéristiques suivantes. Dès que $N > 2$, il est impossible d'obtenir des résultats exacts sur l'évolution en fonction du temps des positions des N particules par des calculs analytiques, c'est-à-dire sans utiliser de simulations numériques. Cependant, lorsque N est grand, le comportement du système devient plus simple à décrire. Au bout d'un certain temps, le système atteint un état d'équilibre, décrit par la thermodynamique ou la statique des fluides. Ceci est vrai même si le système n'échange pas de chaleur avec son environnement. Pour décrire cet état d'équilibre aux échelles macroscopiques ou mésoscopiques, il suffit de connaître quelques fonctions qui relient entre elles des grandeurs thermodynamiques telles que la pression, la température ou l'énergie interne. La détermination de ces fonctions nécessite de construire des tableaux de données à partir de mesures expérimentales ou de simulations numériques (à la différence d'un gaz parfait, pour lequel ces fonctions ont des expressions connues). De plus, l'évolution d'un fluide en fonction du temps peut être décrite par la mécanique des fluides, qui fait intervenir quelques grandeurs supplémentaires telles que la viscosité dynamique. Ces grandeurs (appelées coefficients de transport) sont des fonctions des grandeurs thermodynamiques, et la détermination de ces fonctions nécessite là encore de construire des tableaux de données à partir d'expériences ou de simulations numériques.

Certains systèmes particuliers de particules en interaction possèdent des propriétés qui font exception à une ou plusieurs des caractéristiques énoncées dans le paragraphe précédent : on qualifiera de telles propriétés de *propriétés extraordinaires*.

Nous serons amenés à rencontrer de telles propriétés extraordinaires dans les parties 3 et 4. Alors que le système étudié en partie 3 n'a pas à ce jour de réalisation expérimentale, la partie 4 est reliée à des expériences actuelles avec des gaz froids. La partie 1 concerne la réalisation d'un piège optique pouvant servir dans ces expériences. Les parties suivantes sont indépendantes de la partie 1, à l'exception de deux questions où un lien avec la partie 1 sera indiqué dans l'énoncé. La partie 2 concerne un problème à une particule dont l'étude est utile pour les parties 3 et 4.

Partie 1 : Un atome dans un piège optique

Dans cette partie, on considère un atome de masse m, de vecteur position $\vec{r} = x\,\vec{u_x} + y\,\vec{u_y} + z\,\vec{u_z}$. L'atome est soumis à une force conservative $\vec{F}$. On note $U(\vec{r})$ l'énergie potentielle associée à cette force $\vec{F}$.

1) Dans cette question on suppose que U est de la forme

$$U(\vec{r}) = U(r) = U_0 + \frac{1}{2}\,k\,r^2 \tag{1}$$

où U_0 et k sont des constantes et $k > 0$. On pose $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

a) Montrer que chacune des fonctions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ vérifie une équation différentielle.

b) On note $\vec{v}(0)$ la vitesse de l'atome à $t = 0$. Exprimer $\vec{r}(t)$ en fonction de t, ω, $\vec{r}(0)$ et $\vec{v}(0)$.

Dans la suite de cette partie, on considère que la force $\vec{F}$ est due à l'effet de faisceaux laser, et on admet que l'énergie potentielle est

$$U(\vec{r}) = -\gamma \left\langle \|\vec{E}(\vec{r},t)\|^2 \right\rangle$$

où γ est une constante strictement positive, $\vec{E}(\vec{r},t)$ est le champ électrique, et $\left\langle \|\vec{E}(\vec{r},t)\|^2 \right\rangle$ désigne la moyenne temporelle (aussi appelée moyenne dans le temps) de $\|\vec{E}(\vec{r},t)\|^2$ à $\vec{r}$ fixé.
On utilise simultanément trois faisceaux laser. On admet que les champs électriques associés à chacun des trois faisceaux sont :

$$\begin{aligned}
\vec{E}_1(\vec{r},t) &= a(y,z)\cos(q\,x - \Omega\,t + \varphi_1)\,\vec{u_y}\\
\vec{E}_2(\vec{r},t) &= a(x,z)\cos(q\,y - \Omega\,t + \varphi_2)\,\vec{u_z}\\
\vec{E}_3(\vec{r},t) &= a(x,y)\cos(q\,z - \Omega\,t + \varphi_3)\,\vec{u_x}
\end{aligned}$$

où la fonction a est définie par

$$a(X,Y) = \mathscr{E}\,\exp\left(-\frac{X^2+Y^2}{\sigma^2}\right)$$

et où $\mathscr{E}$, σ, q, Ω, φ_1, φ_2 et φ_3 sont des paramètres constants, avec $\mathscr{E}$, σ, q et Ω strictement positifs (la longueur de Rayleigh n'apparaît pas car elle peut être considérée comme infinie).

2) Pour chacun des trois faisceaux, indiquer la direction et le sens de propagation ainsi que la polarisation de la lumière correspondants.

3) Exprimer $U(\vec{r})$ en fonction de x, y, z, γ, $\mathscr{E}$ et σ.

4) Montrer que si $r \ll \sigma$, alors

$$U(\vec{r}) - U(\vec{0}) \approx \frac{1}{2}\,k\,r^2 \tag{2}$$

où l'on exprimera k en fonction de γ, $\mathscr{E}$ et σ.

5) On considère un atome de lithium 6. On utilisera les données numériques figurant en bas de la page 1, en particulier la valeur de k.

a) On fait l'hypothèse que pour décrire le mouvement de l'atome, on peut remplacer $U(\vec{r})$ par son expression approchée donnée par l'équation (2). Déterminer la valeur numérique de la période du mouvement τ avec un chiffre significatif.

b) En $t = 0$, l'atome se trouve à l'origine avec une vitesse $v(0) = 1$ cm/s. L'hypothèse faite à la question **5a** est-elle légitime ?

6) Dans toute cette question, on considère une situation où les polarisations des faisceaux ne sont pas parfaitement contrôlées, tandis que les phases φ_1, φ_2 et φ_3 sont toujours fixées. Citer un effet qui apparaît alors et qui modifie le résultat obtenu à la question **3**. Proposer une modification des caractéristiques des faisceaux permettant d'éliminer cet effet et de retrouver le résultat de la question **3**. On pourra répondre brièvement et sans calculs.

Partie 2 : Une particule soumise à une force $\alpha/x^3 - k\,x$

Dans cette partie, on considère une particule de masse m se déplaçant à une dimension le long de la demi-droite (Ox), de sorte que son vecteur position est $\vec{r} = x\,\vec{u_x}$ avec $x > 0$.
La particule est soumise à une force $\vec{F} = F_x\;\vec{u_x}$ avec $F_x = \dfrac{\alpha}{x^3} - k\,x$, où α et k sont des constantes strictement positives.

7) Montrer que la force $\vec{F}$ est conservative, et que l'énergie potentielle correspondante s'écrit

$$U(x) = \frac{A}{x^2} + B\,x^2 + C$$

où C est une constante arbitraire et où l'on exprimera A et B en fonction de α et k.

Dans la suite on prend $C = 0$.

8) On pose $g = x^2$, et on note E l'énergie mécanique de la particule. Exprimer $m\,\ddot{g}$ en fonction de E, g et k.

9) On pose $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, $g_0 = g(t=0)$ et $h_0 = \dot{g}(t=0)$. En résolvant l'équation différentielle trouvée à la question précédente, exprimer $g(t)$ en fonction de t, g_0, h_0, ω et $\dfrac{E}{k}$.

Dans la suite, la particule est lâchée à $t = 0$ en $x = x_0$ avec une vitesse nulle.

10) Exprimer $x(t)$ en fonction de t, ω, $\dfrac{\alpha}{k}$ et x_0. Exprimer la période de $x(t)$ en fonction de ω.

11) Commenter brièvement le fait que la période est indépendante de l'amplitude.

12) On note x_{min} et x_{max} les valeurs minimale et maximale de la fonction $x(t)$. À partir de l'expression de $x(t)$ obtenue à la question **10**, tracer l'allure de $x(t)^2$ en fonction de t, et exprimer x_{min} et x_{max} en fonction de x_0 et $\dfrac{\alpha}{k}$. On distinguera entre les cas $x_0 > x_c$ et $x_0 < x_c$, où x_c est une grandeur que l'on exprimera en fonction de $\dfrac{\alpha}{k}$.

13) Tracer l'allure de $U(x)$. Par une approche énergétique, vérifier la validité des expressions de x_c, x_{min} et x_{max} obtenues à la question précédente.

Partie 3 : N particules interagissant par une force en $1/r^3$

Dans cette partie, on considère N particules ponctuelles de masse m se déplaçant dans l'espace à trois dimensions. On note $\vec{r_i}$ le vecteur position de la particule i, où l'entier i est compris entre 1 et N.
Les forces en jeu sont les suivantes :

- Chaque particule est soumise à une force extérieure conservative. On note $U_{\text{ext}}(\vec{r})$ l'énergie potentielle associée, aussi appelée potentiel extérieur. La force extérieure subie par la particule i est notée $\vec{F}_{\text{ext},i}$.
- Les particules interagissent entre elles. Chacune des N particules exerce une force sur chacune des $N-1$ autres particules. La force d'interaction exercée par la particule j sur la particule i, notée $\vec{F}_{j\to i}$, est supposée telle que
  - sa direction est celle de la droite joignant les particules i et j,
  - son sens correspond à une répulsion entre particules,

– sa norme est inversement proportionnelle au cube de la distance entre les particules, soit $\|\vec{F}_{j\to i}\| = \dfrac{\alpha}{r_{ij}^{\ 3}}$, où α est un paramètre constant positif, et r_{ij} est la distance entre les particules i et j.

On note $\mathscr{S}_i$ l'ensemble des entiers différents de i compris entre 1 et N, soit $\mathscr{S}_i = \{1; 2; \ldots; N\} \setminus \{i\}$. Pour désigner la somme sur les entiers i et j compris entre 1 et N tels que $i \neq j$, on utilise la notation concise $\displaystyle\sum_{i\neq j}$ au lieu de $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \sum_{j\in\mathscr{S}_i}$.

On note E_{cin} l'énergie cinétique totale du système constitué des N particules. On définit les grandeurs

$$E_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^{N} U_{\text{ext}}(\vec{r_i})$$

$$E_{\text{int}} = \frac{\alpha}{4} \sum_{i\neq j} \frac{1}{r_{ij}^{\ 2}}.$$

On admettra que $E = E_{\text{cin}} + E_{\text{ext}} + E_{\text{int}}$ est une constante du mouvement (E est l'énergie mécanique totale du système des N particules).

3.1 Potentiel extérieur quelconque

Dans cette sous-partie, on ne fait aucune hypothèse concernant la forme du potentiel extérieur $U_{\text{ext}}(\vec{r})$.

14) Écrire l'expression reliant $\vec{F}_{\text{ext},i}$ à la fonction U_{ext}.

15) Exprimer $\vec{F}_{j\to i}$ en fonction de $\vec{r_i}$, $\vec{r_j}$, r_{ij} et α.

On pose

$$G = \sum_{i=1}^{N} r_i^2$$

où $r_i^2 = \|\vec{r_i}\|^2$.

16) Exprimer $m\ddot{G}$ en fonction de $E_{\text{cin}} + E_{\text{int}}$ et de $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \vec{r_i} \cdot \vec{F}_{\text{ext},i}$.

3.2 Potentiel extérieur harmonique

Dans cette sous-partie, on considère le cas d'un potentiel extérieur de la forme $U_{\text{ext}}(\vec{r}) = \dfrac{1}{2} k\, r^2$ avec k une constante strictement positive. On pose $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

17) Montrer que $G(t)$ vérifie la même équation différentielle que celle obtenue pour $g(t)$ à la question **8**. En déduire l'expression de $G(t)$ en fonction de t, ω, $\dfrac{E}{k}$, et des grandeurs $G_0 = G(t=0)$ et $H_0 = \dot{G}(t=0)$.

18) Dans cette question on considère le cas où $\alpha = 0$. En utilisant le résultat de la question **1b**, exprimer $G(t)$ en fonction de t, de ω, des $\vec{r_i}(0)$ et des $\vec{v_i}(0)$. Vérifier que cette expression de $G(t)$ est équivalente à celle obtenue à la question **17**.

19) Dans le cas où α est non nul, donner des raisons pour lesquelles le résultat trouvé pour $G(t)$ à la question **17** est une propriété extraordinaire, dans le sens défini dans l'introduction du sujet.

3.3 Boîte sphérique

Dans cette sous-partie, on considère la situation suivante :

- Les N particules sont enfermées dans une boîte sphérique de rayon ℓ centrée à l'origine. La paroi de la boîte est donc l'ensemble des points de vecteur position $\vec{r}$ tel que $r = \ell$ (la paroi étant considérée comme infiniment fine, pour simplifier la discussion).
- $\vec{F}_{\text{ext},i}$ est la force exercée par la paroi de la boîte sur la particule i.
- Le potentiel extérieur correspondant U_{ext} vérifie les propriétés suivantes (on ne s'intéresse qu'à l'intérieur de la boîte, soit $r < \ell$) :
  (a) $U_{\text{ext}}(\vec{r}) = U_{\text{ext}}(r)$ ne dépend pas de la direction de $\vec{r}$
  (b) $U_{\text{ext}}(r) = 0$ pour $\ell - r$ supérieur à une certaine longueur ℓ_* qui vérifie $\ell_* \ll \ell$
  (c) $U_{\text{ext}}(r)$ est une fonction croissante et continue de r
  (d) $U_{\text{ext}}(r) \underset{r\to\ell}{\longrightarrow} +\infty$.

20) Tracer l'allure de la fonction $U_{\text{ext}}(r)$.

Dans la suite, on note $\langle f\rangle$ la moyenne temporelle sur une durée infiniment longue d'une grandeur dépendante du temps $f(t)$, soit

$$\langle f\rangle = \lim_{t_{\max}\to\infty} \frac{1}{t_{\max}} \int_0^{t_{\max}} f(t)\,dt\,.$$

Ainsi $\left\langle \ddot{G}\right\rangle$ désigne la moyenne temporelle sur une durée infiniment longue de $\ddot{G}(t)$.

21) **a)** Montrer que $|\dot{G}(t)| \leqslant D$ où D est une quantité indépendante de t dont on donnera l'expression.

b) En déduire que $\left\langle \ddot{G}\right\rangle = 0$.

Dans la suite, on considère une boîte de taille macroscopique contenant un grand nombre de particules. On admet que le système des N particules peut être considéré comme un fluide à l'équilibre, et on note P la pression du fluide au niveau de la paroi.

22) Justifier en quelques mots le fait que la valeur de P est la même en tout point de la paroi.

23) Pourquoi peut-on considérer que $\ell_* \ll \ell$? On attend une réponse brève, sans calcul ni estimation d'ordre de grandeur.

24) On note $\vec{u_i}$ le vecteur unitaire $\dfrac{\vec{r_i}}{r_i}$. Exprimer $\vec{F}_{\text{ext},i}$ en fonction de $\vec{u_i}$ et de $F_{\text{ext},i} = \|\vec{F}_{\text{ext},i}\|$.

25) On définit une surface Σ et un volume $\mathcal{R}$ comme suit (voir figure 1) :

- Σ est une petite portion de la paroi. La forme de Σ est approximativement un carré de côté ℓ_Σ, avec $\ell_\Sigma \ll \ell$.
- $\mathcal{R}$ est l'ensemble des points M dont le vecteur position est de la forme $\overrightarrow{OM} = u\,\overrightarrow{OM'}$ avec $M' \in \Sigma$ et u compris entre 0 et 1.

a) On note $\vec{F}_{\text{ext},\mathcal{R}}$ la force exercée par la paroi sur le fluide contenu dans $\mathcal{R}$. Donner une expression approchée simple de $\vec{F}_{\text{ext},\mathcal{R}}$ faisant apparaître P. Indiquer deux conditions sur ℓ_Σ (en plus de $\ell_\Sigma \ll \ell$) pour que cette expression soit valable.

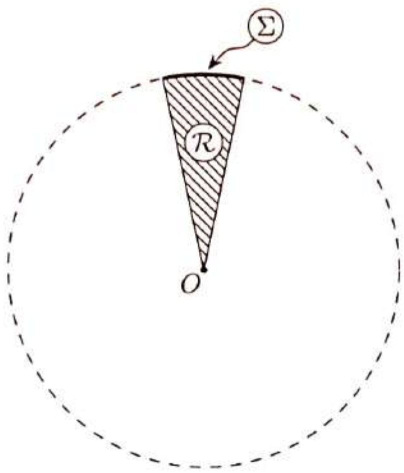

FIGURE 1 – Vue en coupe dans un plan passant par l'origine O, montrant l'intersection de ce plan avec la paroi de la boîte (cercle tireté), avec la surface Σ (arc de cercle en trait continu épais), et avec le volume $\mathcal{R}$ (zone hachurée).

b) On note $\mathscr{S}_{\mathcal{R}}$ l'ensemble des entiers i appartenant à $\{1;2;\ldots;N\}$ tels que la particule i est située dans la région $\mathcal{R}$. En utilisant le résultat obtenu à la question **25a**, obtenir une expression approchée simple de $\sum_{i\in\mathscr{S}_{\mathcal{R}}} F_{\text{ext},i}$ faisant apparaître P.

c) En déduire une expression approchée simple de $\sum_{i=1}^{N} F_{\text{ext},i}$ faisant apparaître P.

26) On identifie la moyenne temporelle $\langle E_{\text{cin}} + E_{\text{int}}\rangle$ avec l'énergie interne U du fluide. Montrer que

$$U \approx \frac{3}{2}\,P\,V \tag{3}$$

où V est le volume de la boîte. On utilisera notamment les résultats des questions **16** et **25c**.

27) Dans le cas où $\alpha = 0$, montrer directement que $U = \dfrac{3}{2}\,P\,V$ en utilisant des relations thermodynamiques connues et sans utiliser les résultats des questions précédentes.

Partie 4 : Propriétés macroscopiques d'un gaz unitaire

Dans cette partie, on s'intéresse aux propriétés macroscopiques d'un fluide particulier, appelé « gaz unitaire ». Il s'agit d'un gaz monoatomique, dans lequel les interactions entre atomes sont généralement loin d'être négligeables (même si elles décroissent rapidement avec la distance entre atomes) ; par exemple, l'équation d'état d'un gaz unitaire est très différente de celle d'un gaz parfait. La description microscopique d'un gaz unitaire fait appel à la mécanique quantique à N corps, et sort du cadre de ce sujet. Nous admettrons donc certaines propriétés d'un gaz unitaire, et nous en étudierons les conséquences en utilisant la thermodynamique, la statique des fluides, et la mécanique des fluides (respectivement dans les sous-parties 4.1, 4.2 et 4.3).

4.1 Thermodynamique du gaz homogène

Dans cette sous-partie, on s'intéresse à un gaz unitaire homogène de volume V. On admet que les principes de la thermodynamique sont applicables. On note N le nombre d'atomes composant le gaz, P la pression du gaz, U son énergie interne, S son entropie, T sa température, $n = \dfrac{N}{V}$ sa densité particulaire, et $s = \dfrac{S}{N}$ son entropie par atome.

Dans toute la suite du sujet, on admet qu'un gaz unitaire homogène à l'équilibre vérifie les propriétés suivantes :

- l'énergie interne et la pression sont liées par la relation

$$U = \frac{3}{2}\, P\, V \tag{4}$$

- la pression P est une fonction de n et s :

$$P = f_P(n, s) \tag{5}$$

où la fonction f_P ne dépend d'aucune autre grandeur thermodynamique que n et s.

28) On considère la transformation suivante. Un gaz unitaire est enfermé dans une boîte de volume V dont l'une des parois est un piston mobile. Les parois sont parfaitement isolantes thermiquement (autrement dit, la boîte est un calorimètre idéal). Le gaz est initialement à l'équilibre. On fait varier lentement le volume V de la boîte en déplaçant la paroi mobile.

a) Montrer que $P^3\, V^5$ est constant au cours de la transformation.

b) En déduire que f_P est de la forme

$$f_P(n, s) = n^{5/3}\, g_P(s) \tag{6}$$

où la fonction g_P ne dépend que de s et pas de n.

c) Indiquer brièvement en quoi l'équation (6) peut faciliter la détermination de la fonction f_P par des mesures expérimentales ou des simulations numériques.

29) **a)** Justifier brièvement et sans calculs que la propriété (5) est habituelle.

b) Proposer une brève justification physique intuitive du fait que la propriété (6) est inhabituelle.

c) En déduire que la propriété (4) est inhabituelle. On attend un raisonnement bref.

30) On considère la transformation suivante. Un gaz unitaire, initialement à l'équilibre, est enfermé dans une boîte de volume V fixé. On apporte lentement une petite quantité de chaleur au gaz.

a) En utilisant le premier et le deuxième principe de la thermodynamique, établir une relation entre la variation d'énergie interne du gaz et sa variation d'entropie.

b) En déduire que pour un gaz unitaire homogène à l'équilibre, on a

$$T = n^{2/3}\, g_T(s) \tag{7}$$

où g_T est une fonction de s (indépendante de n) que l'on exprimera en termes de g_P.

Dans la suite, on admet que la fonction g_T est strictement croissante et continue. La fonction g_T est donc inversible. On a donc, pour un gaz unitaire homogène à l'équilibre :

$$s = g_s\left(\frac{T}{n^{2/3}}\right) \tag{8}$$

où g_s est la fonction réciproque de g_T.

4.2 Statique des fluides

Dans cette sous-partie, on considère un gaz unitaire, à l'équilibre, soumis à une force extérieure indépendante du temps. On admet que le gaz peut être décrit par la statique des fluides.
Chaque atome subit une force extérieure $-k\,\vec{r}$, où $\vec{r}$ est le vecteur position de l'atome et k est un paramètre constant strictement positif (on rappelle que la gravité est négligée).
On note

- $n(\vec{r})$ la densité particulaire (c'est-à-dire le nombre d'atomes par unité de volume)
- $P(\vec{r})$ la pression
- $\vec{f}(\vec{r})$ la force extérieure par unité de volume subie par le gaz (aussi appelée densité volumique de force)
- $s(\vec{r})$ l'entropie par particule

au voisinage du point de vecteur position $\vec{r}$.

31) **a)** Donner une expression de $\vec{f}(\vec{r})$ faisant apparaître k et $n(\vec{r})$.

b) En utilisant l'équation locale de la statique des fluides, en déduire une relation entre les fonctions $P(\vec{r})$ et $n(\vec{r})$.

32) Justifier en quelques mots le fait que $n(\vec{r})$, $P(\vec{r})$ et $s(\vec{r})$ ne dépendent pas de la direction de $\vec{r}$.

33) Justifier en quelques mots le fait que la température T est uniforme dans tout le fluide.

34) Expliquer brièvement pourquoi, sous une hypothèse que l'on indiquera, on peut écrire

$$P(r) = n(r)^{5/3}\ g_P\big(s(r)\big) \tag{9}$$

$$s(r) = g_s\left(\frac{T}{n(r)^{2/3}}\right). \tag{10}$$

On admet dans la suite que $g_s(0) = 0$.

35) Dans cette question, on considère le cas où $T = 0$, et on admet que dans ce cas, il existe une distance R telle que : $n(r) > 0$ pour $r < R$, et $n(r) = 0$ pour $r \geqslant R$.

a) Exprimer $n(r)$ en fonction de r, $n(0)$ et R pour $r < R$; et exprimer R en fonction de k, $g_P(0)$ et $n(0)$.

b) Tracer l'allure de $n(r)$.

c) On admet que $g_P(0) = \xi\,\dfrac{\hbar^2}{m}$ où m est la masse d'un atome, $\hbar = 1{,}05 \times 10^{-34}$ J · s est la constante de Planck réduite, et ξ est une constante qui vaut $\xi \approx 0.7$ d'après des expériences et des simulations numériques concordantes. Déterminer la valeur numérique de R avec un chiffre significatif, pour des atomes de lithium 6 avec $n(0) = 2{,}7 \times 10^{19}$ m^{-3}. On utilisera $\sqrt{3{,}5} \approx 2$ et les données numériques figurant en bas de la page 1.

d) Dans le cas où la force extérieure est due aux faisceaux laser considérés dans la partie 1, cette force est-elle bien approximée par $-k\,\vec{r}$ pour tous les atomes du gaz ?

36) En réalité, T n'est jamais strictement nulle. Dans cette question, on considère que la température est non nulle mais proche de 0.

a) On admet que la fonction g_P est continue. Justifier en quelques lignes pourquoi $n(r)$ est proche du résultat trouvé à la question **35a** lorsque r est à la fois inférieur à R et pas trop proche de R.

b) On admet que la fonction $n(r)$ est strictement positive et décroissante sur l'ensemble des r positifs, et que $n(r) \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Tracer l'allure de $n(r)$.

4.3 Mécanique des fluides

Dans cette sous-partie, on considère un gaz unitaire soumis à une force extérieure dépendante du temps. On note $\vec{f}(\vec{r},t)$ la force extérieure par unité de volume subie par le gaz au voisinage du point de vecteur position $\vec{r}$ au temps t. On admet que le gaz peut être décrit par la mécanique des fluides. On note $n(\vec{r},t)$ la densité particulaire au voisinage du point de vecteur position $\vec{r}$ à l'instant t, et $\vec{v}(\vec{r},t)$ le champ eulérien de vitesse du fluide.
L'équation locale de conservation du nombre d'atomes s'écrit :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \mathrm{div}\left(n\,\vec{v}\right) = 0. \tag{11}$$

On introduit les notations :

- (x_1, x_2, x_3) pour les composantes (x, y, z) du vecteur $\vec{r}$ en coordonnées cartésiennes,
- (v_1, v_2, v_3) pour les composantes (v_x, v_y, v_z) du vecteur $\vec{v}$ en coordonnées cartésiennes,
- (f_1, f_2, f_3) pour les composantes (f_x, f_y, f_z) du vecteur $\vec{f}$ en coordonnées cartésiennes.

On admet que dans le cas général d'un fluide compressible, l'équation de Navier-Stokes générale en coordonnées cartésiennes s'écrit : pour tout i appartenant à $\{1;2;3\}$,

$$m\,n\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,v_i\right) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + f_i + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\,\delta_{ij}\,\mathrm{div}\,\vec{v}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\zeta\,\mathrm{div}\,\vec{v}\right) \tag{12}$$

où le fluide est supposé monoatomique, m est la masse d'un atome, P est la pression,
δ_{ij} est le symbole de Kronecker défini par

$$\delta_{ij} = \begin{array}{ll} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j\,, \end{array}$$

η est la viscosité dynamique, et ζ est une grandeur appelée « viscosité de dilatation ».

On note $s(\vec{r},t)$ l'entropie par atome au voisinage du point de vecteur position $\vec{r}$ à l'instant t.
On admet que s vérifie l'équation d'évolution

$$n\,T\left(\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\,s\right) = \text{div}\Big(\kappa\,\overrightarrow{\text{grad}}\,T\Big) + \frac{\eta}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\,\delta_{ij}\,\text{div}\,\vec{v}\right)^2 + \zeta\times\Big(\text{div}\,\vec{v}\Big)^2 \tag{13}$$

où T est la température et κ est la conductivité thermique du fluide.
En général, les grandeurs n, $\vec{v}$, P, $\vec{f}$, η, ζ, s, T et κ dépendent toutes de $\vec{r}$ et t.
On admet que les grandeurs η, ζ et κ (appelées coefficients de transport du fluide) sont positives, et sont des fonctions de n et T :

$$\eta(\vec{r},t) = f_\eta\Big(n(\vec{r},t),\,T(\vec{r},t)\Big)$$
$$\zeta(\vec{r},t) = f_\zeta\Big(n(\vec{r},t),\,T(\vec{r},t)\Big)$$
$$\kappa(\vec{r},t) = f_\kappa\Big(n(\vec{r},t),\,T(\vec{r},t)\Big)\,.$$

On considère la situation suivante. Chaque atome subit une force extérieure $-k(t)\,\vec{r}$, où $\vec{r}$ est le vecteur position de l'atome et

$$\begin{cases} k(t) = k_0 & \text{pour } t \leqslant 0 \\ k(t) = k_1 & \text{pour } t > 0 \end{cases} \qquad \text{avec } \; k_0 \neq k_1\,.$$

Pour $t \leqslant 0$, le fluide est à l'équilibre, à une température non nulle (on ne fait aucune autre hypothèse concernant l'état du fluide à $t \leqslant 0$).
On admettra que les fonctions $n(\vec{r},t)$, $\vec{v}(\vec{r},t)$, $s(\vec{r},t)$, $P(\vec{r},t)$ et $T(\vec{r},t)$ sont continues malgré la discontinuité de $k(t)$, et que $n(\vec{r},t)$ et $T(\vec{r},t)$ sont strictement positives pour tout $\vec{r}$ et t.

37) Donner une expression de $\vec{f}(\vec{r},t)$ faisant apparaître $k(t)$ et $n(\vec{r},t)$.

38) Justifier en quelques mots le fait que

- les fonctions $n(\vec{r},t)$, $s(\vec{r},t)$, $P(\vec{r},t)$ et $T(\vec{r},t)$ ne dépendent pas de la direction de $\vec{r}$
- le champ de vitesse est de la forme $\vec{v}(\vec{r},t) = v_r(r,t)\,\vec{u_r}$.

39) Vérifier que pour $t \leqslant 0$, l'équation de Navier-Stokes générale (12) se réduit à une équation beaucoup plus simple dont on indiquera le nom.

40) Expliquer brièvement pourquoi, sous des hypothèses que l'on indiquera, on peut écrire

$$P(r,t) = n(r,t)^{5/3}\,g_P\Big(s(r,t)\Big) \tag{14}$$
$$s(r,t) = g_s\left(\frac{T(r,t)}{n(r,t)^{2/3}}\right). \tag{15}$$

On note

- B_R la boule de rayon R centrée à l'origine
- $N_B(R,t)$ le nombre d'atomes situés dans B_R à l'instant t.

Dans la suite on admet la propriété suivante :

il existe une fonction $\lambda(t)$ définie pour $t \geqslant 0$ telle que

$$\begin{cases} \bullet \text{ pour tout } R, \text{ le nombre d'atomes } N_B\Big(\lambda(t)\,R\,,\,t\Big) \text{ est indépendant de } t & \text{(P1)} \\ \bullet\ \lambda(t) \text{ est une fonction périodique de } t & \text{(P2)} \\ \bullet\ \lambda(t=0) = 1\,. & \text{(P3)} \end{cases}$$

41) S'agit-il d'une propriété extraordinaire, dans le sens défini dans l'introduction du sujet ? Justifier brièvement.

42) Exprimer $N_B(R,t)$ en terme du profil de densité particulaire $n(r,t)$.

43) On pose $n_0(r) = n(r,0)$. Montrer que pour tout r et tout $t \geqslant 0$, on a

$$n(r,t) = \frac{n_0\left(\dfrac{r}{\lambda(t)}\right)}{\lambda(t)^3}\,. \tag{16}$$

44) **a)** Obtenir une expression de $\dfrac{\partial N_B}{\partial t}(R,t)$ faisant apparaître $v_r(R,t)$.

b) En déduire que pour tout r et tout $t \geqslant 0$, on a

$$v_r(r,t) = \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)}\,r\,. \tag{17}$$

45) On pose $K = \displaystyle\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\,\delta_{ik}\,\mathrm{div}\,\vec{v}\right)^2$. Calculer K.

46) On note $S(t)$ l'entropie totale du fluide. En supposant que les fonctions $n\,s\,v$ et $\kappa\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\ln T)$ tendent rapidement vers zéro pour $r \to \infty$, montrer que

$$\dot{S}(t) = \int \left[\frac{\kappa\,\|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,T\|^2}{T^2} + 9\left(\frac{\dot{\lambda}}{\lambda}\right)^2\,\frac{\zeta}{T}\right]\,d\tau\,. \tag{18}$$

Dans la suite on admet que pour tout r et pour t positif, $T(r,t)$ est une fonction périodique de t, de même période que $\lambda(t)$.

47) En déduire que $S(t)$ est constante.

48) **a)** Que peut-on en déduire concernant la viscosité de dilatation ζ d'un gaz unitaire ?

b) Indiquer brièvement en quoi ce résultat est une propriété extraordinaire, dans le sens défini dans l'introduction du sujet.

c) Proposer une explication intuitive du lien entre ce résultat et la périodicité de l'évolution du gaz.

49) **a)** En admettant que $\kappa > 0$, montrer que $T(r,t)$ est indépendant de r.

b) On note $T(r,t) = T(t)$, et $T_0 = T(t=0)$. Montrer que pour tout $t \geqslant 0$,

$$T(t) = \frac{T_0}{\lambda(t)^2}\,. \tag{19}$$

Indication : On pourra poser $b(t) = T(t)\,\lambda(t)^2$ et commencer par établir une expression de $S(t)$ faisant apparaître $b(t)$.

50) **a)** On pose $s_0(r) = s(r,0)$. Relier $s(r,t)$ à $s_0(r)$.

b) On pose $P_0(r) = P(r,0)$. Relier $P(r,t)$ à $P_0(r)$.

On pose $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k_0}{m}}$ et $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{k_1}{m}}$.

51) **a)** Montrer que pour $t > 0$, l'équation (12) est bien satisfaite à condition que $\lambda(t)$ vérifie une équation différentielle dont on exprimera les coefficients en termes de ω_0 et ω_1 .

b) En se ramenant au problème étudié dans la partie 2, en déduire l'expression de $\lambda(t)$ en fonction de t, ω_0 et ω_1.

52) On pose

$$G(t) = \sum_{i=1}^{N} \|\vec{r_i}(t)\|^2$$

où N est le nombre total d'atomes et $\vec{r_i}(t)$ est le vecteur position de l'atome i à l'instant t.

a) On pose $G_0 = G(t=0)$. Exprimer $G(t)$ en fonction de t, G_0, ω_0 et ω_1.

b) Vérifier que la forme du résultat obtenu est la même qu'à la question **17**, sans chercher à comparer les différents coefficients constants. Pouvait-on s'y attendre ?

c) Tracer l'allure de $G(t)$, en traitant séparément les cas limites $\omega_0 \gg \omega_1$ et $\omega_0 \ll \omega_1$. Expliquer brièvement en quoi les résultats obtenus dans ces cas limites sont conformes à l'intuition physique.

FIN DU SUJET

* *
*