

X-ENS PC Maths 2024

PAR NOÉ DANIEL *noe.daniel@ens.psl.eu*

Proposition de corrigé

Avertissement. Je ne suis pas professeur de mathématiques, donc certaines erreurs ou imprécisions pourraient s'être glissées dans ce document.

1 Préliminaires

1. On a donc $\det(R^T R) = 1$ i.e $\det(R^T)\det(R) = \det(R)^2 = 1$ donc $\det(R) \in \{\pm 1\}$
2. C'est du cours.
- 3.

a) Soient $u, v \in \mathbb{R}^d$ et $A \in M_d(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \langle u, Av \rangle_{\mathbb{R}^d} &= \sum_{i=1}^d u_i [Av]_i \\ &= \sum_{i,j=1}^d u_i A_{ij} v_j \\ &= \sum_{i,j=1}^d A_{ij} [uv^T]_{i,j} \\ &= \langle A, uv^T \rangle \end{aligned}$$

b) Soient $A, B \in M_d(\mathbb{R})$, alors :

$$\begin{aligned} \text{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^d [AB]_{i,i} \\ &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d A_{ij} B_{ji} \\ &= \sum_{j=1}^d [BA]_{jj} \\ &= \text{tr}(BA) \end{aligned}$$

On vient de montrer que la trace est circulaire.

c) Soient $A, B, C \in M_d(\mathbb{R})$, alors :

$$\begin{aligned} \langle A, BC \rangle &= \text{tr}(A^T BC) \\ &= \text{tr}((B^T A)^T C) \\ &= \langle B^T A, C \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle A, BC \rangle &= \text{tr}(A^T BC) \\ &= \text{tr}(C A^T B) \\ &= \text{tr}((AC^T)^T B) \\ &= \langle AC^T, B \rangle \end{aligned}$$

4.

a) Le coefficient de colonne i et de ligne i de la matrice $R^T R$ a pour expression : $\sum_{j=1}^d R_{ij}^2$.

Or $R^T R = I$ donc, on en déduit que : $\sum_{j=1}^d R_{ij}^2 \leq 1$ et puisque chaque terme de la somme est positif, chaque terme est compris entre 0 et 1, d'où en particulier pour R_{ii} :

$$|R_{ii}| \leq 1$$

b) On écrit :

$$\begin{aligned} \langle D, R \rangle &= \text{tr}(D^T R) \\ &= \sum_{i=1}^d \underbrace{\alpha_i}_{\geq 0} \underbrace{R_{ii}}_{\leq 1} \\ &\leq \sum_{i=1}^d \alpha_i = \text{tr}(D) \end{aligned}$$

2 Ensemble des déplacements de \mathbb{R}^d

5.

a) Soient $a, b \in \mathbb{R}^d$ et $g = (\tau, R) \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned} |\phi_g(a) - \phi_g(b)| &= |Ra + \tau - Rb - \tau| \\ &= |R(a - b)| \\ &= |a - b| \end{aligned}$$

Car R est une matrice de $\text{SO}_d(\mathbb{R})$, elle représente une isométrie de déterminant 1, donc elle conserve la norme sur \mathbb{R}^d .

b) Soient $g = (\tau, R), g' = (\tau', R') \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$.

(\Leftarrow) Supposons $g = g'$, alors $\tau = \tau'$ et $R = R'$ donc clairement $\phi_g = \phi_{g'}$

(\Rightarrow) Supposons $\phi_g = \phi_{g'}$, alors en prenant $x = 0_d$, on a :

$$\phi_g(0_{\mathbb{R}^d}) = \phi_{g'}(0_{\mathbb{R}^d}) \quad \text{i.e.} \quad \tau = \tau'$$

Puis en prenant pour x chaque vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^d , on trouve que pour tout $1 \leq i \leq d$,

$$C_i(R) = C_i(R')$$

Donc toutes les colonnes de R sont celles de R' et par la suite, $R = R'$. On vient donc de montrer que $g = g'$.

Avertissement. Grâce à cette question, si on veut montrer des égalités avec unicité comme dans la suite, il suffit juste de trouver un élément qui convient et alors il sera nécessairement unique.

c) Par analyse-synthèse, supposons qu'il existe $e = (\tau_e, R_e)$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^d, \phi_e(x) = x$. Alors en prenant $x = 0_d$, on a :

$$\phi_e(0_{\mathbb{R}^d}) = \tau_e = 0_{\mathbb{R}^d} \quad \text{i.e.} \quad \tau_e = 0_{\mathbb{R}^d}$$

Donc désormais, on a $\forall x \in \mathbb{R}^d, \phi_e(x) = R_e x = x$. A nouveau en prenant la base canonique de \mathbb{R}^d , on trouve que les colonnes de R_e sont égales à celles de la matrice identité : I_d .

Donc $e = (0_{\mathbb{R}^d}, I_d)$

Synthèse. Cela convient et par la question précédente, il n'existe pas d'autres possibilités

6.

a) Soient $g = (\tau, R), g' = (\tau', R') \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$, par analyse synthèse,

Analyse. Supposons qu'il existe $g'' = (\tau'', R'') \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ tel que $\phi_{g''} = \phi_{g'} \circ \phi_g$.

En particulier pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned}\phi_{g''}(x) &= R''x + \tau'' \\ &= R'(Rx + \tau) + \tau' \\ &= R'Rx + R'\tau + \tau'\end{aligned}$$

En prenant $x = 0_{\mathbb{R}^d}$, on a :

$$\tau'' = R'\tau + \tau'$$

Puis on en déduit donc que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$R''x = R'Rx$$

Et en prenant chaque vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^d , on en déduit que $R'' = R'R$.

Synthèse. On vérifie que un tel g'' convient. Et par Q5.b, il est unique.

On a donc **existence** et **unicité** d'un tel g'' .

b) Soient $g_1 = (\tau_1, R_1)$, $g_2 = (\tau_2, R_2)$, $g_3 = (\tau_3, R_3) \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$.

$$\begin{aligned}g_2g_3 &= (R_2\tau_3 + \tau_2, R_2R_3) \\ g_1g_2 &= (R_1\tau_2 + \tau_1, R_1R_2)\end{aligned}$$

Notons

$$\begin{aligned}g_1(g_2g_3) &= g_a = (\tau_a, R_a) \\ (g_1g_2)g_3 &= g_b = (\tau_b, R_b)\end{aligned}$$

Ensuite, toujours avec la question précédente :

$$\begin{aligned}\tau_a &= R_1(R_2\tau_3 + \tau_2) + \tau_1 \\ R_a &= R_1R_2R_3 \\ \tau_b &= (R_1R_2)\tau_3 + (R_1\tau_2 + \tau_1) \\ R_b &= (R_1R_2)R_3 = R_1R_2R_3\end{aligned}$$

On a bien $\tau_a = \tau_b$ et $R_a = R_b$ donc $g_a = g_b$ d'où le résultat.

7.

a) $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$, $\phi_g(x) = y \iff Rx + \tau = y \iff x = R^{-1}(y - \tau) \iff x = R^T(y - \tau)$ d'où la bijectivité.

b) Analyse. Supposons qu'il existe $g' = (\tau', R') \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ tel que $\phi_{g'} = \phi_g^{-1}$

Alors, $\phi_g \circ \phi_{g'} = \text{Id} = \phi_e$. Puis par unicité d'après la question 6.a, on a : $gg' = e$

Donc on a grâce à la question 6.a)

$$\begin{aligned}\tau_e = 0 & \text{ i.e. } R\tau' + \tau = 0 \\ & \text{ i.e. } R\tau' = -\tau \\ & \text{ i.e. } \tau' = -R^T\tau\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_e = I_d & \text{ i.e. } RR' = I_d \\ & \text{ i.e. } R' = R^T\end{aligned}$$

Donc $g' = (-R^T\tau, R^T)$

c) Grâce aux questions précédentes, on a :

$$\begin{aligned} ge &= (R\tau_e + \tau, RR_e) = (\tau, RI_d) = (\tau, R) = g \\ eg &= (R_d\tau + \tau_e, R_eR) = (I_d\tau, I_dR) = (\tau, R) = g \end{aligned}$$

Ensuite, on a :

$$\begin{aligned} gg^{-1} &= (R[-R^T\tau] + \tau, RR^T) = (-I_d\tau + \tau, I_d) = (0, I_d) = e \\ g^{-1}g &= (R^T[\tau] - R^T\tau, R^TR) = (0, I_d) = e \end{aligned}$$

En fait e est l'élément neutre.

8. Grâce aux questions précédentes, $gg' = g'g$ si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}^d, R'Rx + R'\tau + \tau' = RR'x + R\tau' + \tau$. Lorsque $x = 0$, cela implique : $R'\tau + \tau' = R\tau' + \tau$ et alors la condition devient :

$$gg' = g'g \iff \begin{cases} RR' &= R'R \\ R'\tau + \tau' &= R\tau' + \tau \end{cases}$$

Si on se place avec $d \geq 2$, on peut choisir $g = (\tau, I)$, $g' = (0, R')$ en considérant toutefois que $R' \neq I$ et alors on a : $gg' = g'g$ si et seulement si $R'\tau = \tau$. Puisque R' diffère de l'identité, on peut choisir $\tau \in \mathbb{R}^d$ tel que : $R'\tau = \tau$, ce qui donne : $gg' \neq g'g$. **Les déplacements ne sont pas commutatifs pour $d \geq 2$.**

Toutefois pour $d = 1$, on se place avec des réels et **les déplacements sont alors commutatifs.**

3 Distance à déplacement près.

9.

a) Soient $g = (\tau, R)$, $g' = (\tau', R') \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathbf{z} = (z_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$, alors :

$$\begin{aligned} g.(g'.\mathbf{z}) &= \phi_g((g'.\mathbf{z})_{i_{1 \leq i \leq n}}) \\ &= [\phi_g(\phi_{g'}(z_i))]_{1 \leq i \leq n} \\ &= [\phi_g \circ \phi_{g'}(z_i)]_{1 \leq i \leq n} \\ &= [\phi_{gg'}(z_i)]_{1 \leq i \leq n} \\ &= (gg').\mathbf{z} \end{aligned}$$

b) Soient $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$ et $g = (\tau, R) \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$. Supposons que $\mathbf{x} = g.\mathbf{y}$. Quitte à « multiplier à gauche » par l'inverse de g , c'est-à-dire g^{-1} , alors on a :

$$g^{-1}.\mathbf{x} = g^{-1}.(g.\mathbf{y})$$

Puis on utilise la question 9.a et le fait que $g^{-1}g = e$, on a :

$$g^{-1}.\mathbf{x} = (g^{-1}g).\mathbf{y} = e.\mathbf{y} = \mathbf{y}$$

On a alors : $\mathbf{y} = g^{-1}.\mathbf{x}$

10.

a) Soient $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$ et $g = (\tau, R) \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$, on écrit :

$$\|g.\mathbf{y} - g.\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\phi_g(y_i) - \phi_g(x_i)|^2}$$

Puis par la question 5.a, on a pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$|\phi_g(y_i) - \phi_g(x_i)| = |y_i - x_i|$$

Donc :

$$\begin{aligned}\|g.\mathbf{y} - g.\mathbf{x}\| &= \sqrt{\sum_{i=1}^n |y_i - x_i|^2} \\ &= \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|\end{aligned}$$

b) Soient $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$, soit $g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$.

Posons $\mathbf{z} = g^{-1}.\mathbf{y}$, alors $\mathbf{y} = g.\mathbf{z}$, donc avec la question précédente :

$$\begin{aligned}\|\mathbf{y} - g.\mathbf{x}\| &= \|g.\mathbf{z} - g.\mathbf{x}\| \\ &= \|\mathbf{z} - \mathbf{x}\| \\ &= \|g^{-1}.\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \\ &= \|\mathbf{x} - g^{-1}.\mathbf{y}\|\end{aligned}$$

Sachant que pour tout $g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$, il existe un unique inverse $g^{-1} \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ l'application :

$$g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow g^{-1} \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$$

est bijective. Donc :

$$\begin{aligned}\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \inf \{ \|\mathbf{y} - g.\mathbf{x}\| \mid g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d) \} \\ &= \inf \{ \|\mathbf{y} - g^{-1}.\mathbf{x}\| \mid g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d) \}\end{aligned}$$

Donc en passant au sup, l'égalité étant vraie pour tout $g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$, on a :

$$\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

c) Soient $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})^3$ et $g, g' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$, alors on a notamment par inégalité triangulaire de la norme :

$$\begin{aligned}\|\mathbf{z} - g.\mathbf{x}\| &= \|\mathbf{z} - (gg').\mathbf{y} + (gg').\mathbf{y} - g.\mathbf{x}\| \\ &\leq \|\mathbf{z} - (gg').\mathbf{y}\| + \|(gg').\mathbf{y} - g.\mathbf{x}\|\end{aligned}$$

Puis par la question 10.a et la question 6.b :

$$\begin{aligned}\|\mathbf{z} - g.\mathbf{x}\| &\leq \|\mathbf{z} - (gg').\mathbf{y}\| + \|g(g'.\mathbf{y}) - g.\mathbf{x}\| \\ &\leq \|\mathbf{z} - (gg').\mathbf{y}\| + \|g'.\mathbf{y} - \mathbf{x}\|\end{aligned}$$

d) On utilise la question précédente et on passe d'abord au sup sur $g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$, ce qui donne que pour tous $g, g' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$,

$$\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq \|\mathbf{z} - g.\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{z} - (gg').\mathbf{y}\| + \|\mathbf{x} - g'.\mathbf{y}\|$$

Puis on a donc :

$$-\|\mathbf{x} - g'.\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{z} - (gg').\mathbf{y}\| - \delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})$$

Ce qui est vrai pour tout $g, g' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$:

$$-\delta(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = -\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \|\mathbf{z} - (gg').\mathbf{y}\| - \delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})$$

Donc on a pour tout $g, g' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$:

$$-\|\mathbf{z} - (gg').\mathbf{y}\| \leq \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})$$

Donc si c'est vrai pour tout $g, g' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$, prenons par exemple $g' = e$, alors on a pour tout $g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ et en passant à l'inf :

$$-\delta(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \leq -\|\mathbf{z} - (gg').\mathbf{y}\| \leq \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})$$

Ce qui donne finalement :

$$\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \delta(\mathbf{y}, \mathbf{z})$$

11. Soient $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$

a) Supposons que $c(\mathbf{x}) \cap c(\mathbf{y}) \neq \emptyset$. Donc il existe $\mathbf{z} \in c(\mathbf{x})$ et $\mathbf{z} \in c(\mathbf{y})$.

Par conséquent, il existe $g, f \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ tels que : $g.\mathbf{x} = \mathbf{z} = f.\mathbf{y}$ donc en particulier :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= g^{-1}(f.\mathbf{y}) \\ &= (g^{-1}f).\mathbf{y} \\ \mathbf{y} &= f^{-1}(g.\mathbf{x}) \\ &= (f^{-1}g).\mathbf{x} \end{aligned}$$

Montrons que $c(\mathbf{x}) \subset c(\mathbf{y})$. Soit $\mathbf{w} \in c(\mathbf{x})$, donc il existe $h \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ tel que $h.\mathbf{x} = \mathbf{w}$. Puis en se servant de l'hypothèse :

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= h.((g^{-1}f).\mathbf{y}) \\ &= \underbrace{(h(g^{-1}f))}_{\in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)}.\mathbf{y} \end{aligned}$$

Donc $\mathbf{w} \in c(\mathbf{y})$ donc $c(\mathbf{x}) \subset c(\mathbf{y})$.

En exploitant l'autre relation qui lie \mathbf{y} et \mathbf{x} , on montre de la même manière que $c(\mathbf{y}) \subset c(\mathbf{x})$. Donc par double inclusion, on a :

$$c(\mathbf{y}) = c(\mathbf{x})$$

b) Supposons que $c(\mathbf{x}) = c(\mathbf{y})$. En prenant $g = e$, on montre que $\mathbf{x} \in c(\mathbf{x})$ et $\mathbf{y} \in c(\mathbf{y})$. Donc on en déduit de l'hypothèse que $\mathbf{x} \in c(\mathbf{y})$ et $\mathbf{y} \in c(\mathbf{x})$.

Ensuite, puisque $\mathbf{y} \in c(\mathbf{x})$, il existe $g_0 \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ tel que $\mathbf{y} = g_0.\mathbf{x}$.

Pour tout $g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$,

$$\|\mathbf{y} - g.\mathbf{x}\| \geq 0$$

Donc par passage à l'inf, on a : $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$. Or on a aussi :

$$\|\mathbf{y} - g.\mathbf{x}\| = \|g_0.\mathbf{x} - g.\mathbf{x}\|$$

En particulier pour $g = g_0$, on a :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y} - g_0.\mathbf{x}\| &= \|g_0.\mathbf{x} - g_0.\mathbf{x}\| \\ &= \|\mathbf{x} - \mathbf{x}\| \quad (\text{cf. 10a}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc on a $0 \in \{\|\mathbf{y} - g.\mathbf{x}\| \mid g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)\} \subset \mathbb{R}^+$, ce qui permet vu ce que l'on a écrit plus haut d'affirmer que l'on a : $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

4 Un problème d'optimisation

12.

a) On écrit :

$$\begin{aligned} J(\tau, R) &= \sum_{i=1}^n |y_i - \bar{y} - R(x_i - \bar{x}) + \bar{y} - R\bar{x} - \tau|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n |y_i - \bar{y} - R(x_i - \bar{x})|^2 + n|\bar{y} - R\bar{x} - \tau|^2 + 2 \sum_{i=1}^n \langle y_i - \bar{y} - R(x_i - \bar{x}), \bar{y} - R\bar{x} - \tau \rangle_{\mathbb{R}^d} \end{aligned}$$

Remarquons que : $\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y} - R(x_i - \bar{x})) = 0$. Ce qui donne :

$$J(\tau, R) = \sum_{i=1}^n |y_i - \bar{y} - R(x_i - \bar{x})|^2 + n|\bar{y} - R\bar{x} - \tau|^2$$

en utilisant la bilinéarité du produit scalaire sur \mathbb{R}^d .

b) Donc en utilisant la question précédente, on en déduit que :

$$J(\tau, R) \geq \sum_{i=1}^n |y_i - \bar{y} - R(x_i - \bar{x})|^2$$

On note que l'égalité lieu ssi $\tau(R) = \bar{y} - R\bar{x}$.

13.

a) L'application $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \rightarrow (M, M) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})^2$ est linéaire en dimension finie, elle est continue. Par la suite, remarquons aussi que : $(A, B) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})^2 \rightarrow A^T B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ est bilinéaire en dimension finie, donc elle est continue. En composant ces deux applications, on obtient l'application f et par composition d'applications continues, f est continue sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

b) On remarque que $O_d(\mathbb{R}) = f^{-1}\{I\}$ et $\{I\}$ est un fermé de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, donc puisque l'image réciproque d'un fermé par une fonction continue est un fermé, on en déduit que $O_d(\mathbb{R})$ est un sous-ensemble fermé borné de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

Ensuite, on sait que le déterminant est continu car polynômial en les coefficients. L'ensemble $\{1\}$ étant fermé, on en conclut que $\{M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}), \det(M) = 1\}$ est un fermé de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

L'intersection de ces deux ensembles décrit $SO_d(\mathbb{R})$ qui est un fermé de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ car l'intersection de deux fermés de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

Montrons qu'il est borné. Si $M \in SO_d(\mathbb{R})$, alors :

$$\begin{aligned} \|M\| &= \sqrt{\langle M, M \rangle} \\ &= \sqrt{\text{tr}(M^T M)} \\ &= \sqrt{d} \end{aligned}$$

Donc $SO_d(\mathbb{R})$ est bien **un sous-ensemble fermé borné de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$** .

14.

a) Considérons l'application : $\varphi: R \rightarrow J(\tau(R), R)$. φ est continue, donc par théorème des bornes atteintes, elle est minorée sur $SO_d(\mathbb{R})$ qui est un compact (fermé borné) et de plus elle atteint ses bornes. Donc il existe $R_\star \in SO_d(\mathbb{R})$ tel que pour tout $(t, R) \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned} J(\tau(R_\star), R_\star) &\leq J(\tau(R), R) \\ &\leq J(\tau, R) \end{aligned}$$

Par la question 12.b pour la dernière inégalité.

b) Supposons que pour tout $1 \leq k \leq d$, on ait $x_k = x_d$ et $y_k = y_d$, alors les valeurs moyennes sont : $\bar{x} = x_d$ et $\bar{y} = y_d$, et alors pour tout déplacement (τ, R) , on obtient : $J(\tau(R), R) = 0$. Tout déplacement permet d'atteindre le minimum. Donc R_\star n'est pas nécessairement unique.

15. Soit $R \in SO_d(\mathbb{R})$, écrivons dans la même idée qu'en début de partie, et avec le fait que R représente matriciellement une isométrie :

$$\begin{aligned} J(\tau(R), R) &= \sum_{i=1}^n (|y_i - \bar{y}|^2 + |R(x_i - \bar{x})|^2) - 2 \sum_{i=1}^n \langle y_i - \bar{y}, R(x_i - \bar{x}) \rangle_{\mathbb{R}^d} \\ &= nV_n(y) + \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|^2 - 2 \sum_{i=1}^n \langle y_i - \bar{y}, R(x_i - \bar{x}) \rangle_{\mathbb{R}^d} \\ &= nV_n(y) + nV_n(x) - 2 \sum_{i=1}^n \langle y_i - \bar{y}, R(x_i - \bar{x}) \rangle_{\mathbb{R}^d} \end{aligned}$$

Puis grâce à la question 3a :

$$J(\tau(R), R) = nV_n(y) + nV_n(x) - 2 \sum_{i=1}^n \langle [(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})^T], R \rangle$$

Puis par bilinéarité du produit scalaire :

$$J(\tau(R), R) = nV_n(y) + nV_n(x) - 2 \left\langle \underbrace{\sum_{i=1}^n [(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})^T]}_{=Z(x, y)}, R \right\rangle$$

$$J(\tau(R), R) = nV_n(y) + nV_n(x) - 2 \langle Z(x, y), R \rangle$$

Puis on a facilement avec les questions précédentes :

$$\begin{aligned} \delta(x, y)^2 &= \inf_{(\tau, R) \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)} J(\tau, R) \\ &= \inf_{R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})} J(\tau(R), R) \\ &= nV_n(y) + nV_n(x) - 2 \sup_{R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})} \langle Z(x, y), R \rangle \end{aligned}$$

D'où le résultat.

5 Calcul de $\delta(x, y)$ dans le cas où $\det(Z(x, y)) > 0$

16. On montre que S est symétrique définie positive. Soit $x \in \mathbb{R}^d$, on a donc :

$$\begin{aligned} x^T S x &= x^T Z^T Z x \\ &= (Zx)^T (Zx) \\ &= |Zx|^2 \end{aligned}$$

Alors on a déjà : $x^T S x \geq 0$ et $x^T S x = 0 \iff |Zx| = 0 \iff Zx = 0 \iff x = 0$ car Z est inversible. Donc on en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0_{\mathbb{R}^d}\}, x^T S x > 0$

Donc S est symétrique définie positive réelle, elle est donc diagonalisable et son spectre est à valeurs strictement positives. Il existe donc d valeurs propres strictement positives (quitte à en prendre des valeurs propres égales), on les prends dans l'ordre décroissant pour construire une famille $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq d}$ et une base de vecteurs propres correspondant à la base de diagonalisation avec les λ_i pris dans le bon ordre.

On a donc démontré le résultat.

17.

a) La famille (v_1, \dots, v_d) comporte d éléments. Montrons qu'elle est libre pour qu'elle forme une base. Considérons donc μ_1, \dots, μ_d des réels tels que :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^d \mu_i v_i &= 0 \\ Z \sum_{i=1}^d \frac{\mu_i}{\sqrt{\lambda_i}} u_i &= 0 \end{aligned}$$

Or Z est inversible donc on a nécessairement :

$$\sum_{i=1}^d \frac{\mu_i}{\sqrt{\lambda_i}} u_i = 0$$

Puis comme (u_1, \dots, u_d) est une base, elle est en particulier une famille libre donc pour tout $1 \leq i \leq d$, on a :

$$\frac{\mu_i}{\sqrt{\lambda_i}} = 0$$

Puis par stricte positivité des (λ_i) , on en déduit que $\mu_i = 0$ pour tout $1 \leq i \leq d$. Donc la famille $(v_i)_{1 \leq i \leq d}$ est une famille libre à d éléments, c'est une base de \mathbb{R}^d . Montrons qu'elle est orthonormée.

Soient $1 \leq i, j \leq d$, alors :

$$\begin{aligned} \langle v_i, v_j \rangle_{\mathbb{R}^d} = v_i^T v_j &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} (Z u_i)^T (Z u_j) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} u_i^T S u_j \\ &= \sqrt{\frac{\lambda_j}{\lambda_i}} u_i^T u_j \\ &= \sqrt{\frac{\lambda_j}{\lambda_i}} \langle u_i, u_j \rangle_{\mathbb{R}^d} \\ &\quad \neq 0 \text{ (vap} > 0) \end{aligned}$$

Puisque $(u_i)_{1 \leq i \leq d}$ est orthonormée, on en déduit :

$$\langle v_i, v_j \rangle_{\mathbb{R}^d} = \sqrt{\frac{\lambda_j}{\lambda_i}} \delta_{ij} = \delta_{ij}$$

D'où le résultat.

b) Supposons que U, V et D soient de la forme de l'énoncé.

Or puisque $\forall 1 \leq i \leq d, Z u_i = \sqrt{\lambda_i} v_i$, on en déduit que : $ZU = DV = VD$, puis comme U est la matrice de passage d'une BON à une autre, alors $U \in O_d(\mathbb{R})$, donc U est inversible d'inverse U^T , ainsi :

$$\begin{aligned} Z &= VDU^{-1} \\ &= VDU^T \end{aligned}$$

18. On peut prendre : $U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, D_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, V_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, U_2 = U_1, D_2 = D_1$ et $V_2 = -V_1$.

19. On suppose que $\det(Z) > 0$

a) Supposons que $R \in SO_d(\mathbb{R})$, déjà il faut montrer que $A = V^T R U \in O_d(\mathbb{R})$, on écrit donc :

$$\begin{aligned} A^T &= (V^T R U)^T \\ &= (V^T (R U))^T \\ &= (R U)^T (V^T)^T \\ &= U^T R^T V \end{aligned}$$

Donc :

$$A^T A = (U^T R^T V)(V^T R U)$$

Puisque R et U, V sont des matrices orthogonales (comme matrices de passage entre deux BON), on a :

$$\begin{aligned} A^T A &= U^T R^T (V V^T) R U \\ &= U^T R^T R U \\ &= U^T U \\ &= I_d \end{aligned}$$

Donc on a déjà : $V^T R U \in O_d(\mathbb{R})$. Maintenant, montrons que $\det(A) = 1$. On écrit donc :

$$\begin{aligned} \det A &= \det(V) \det(R) \det(U) \\ &= \det(V) \det(U) \end{aligned}$$

En effet, $\det(R) = 1$ car $R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})$. Pour conclure, servons nous des différentes relations établies en 17.b : $\det(Z) = \det(U)\det(V)\det(D)$. Puis D étant diagonale, on a : $\det(D) = \prod_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i} > 0$ et comme $\det(Z) > 0$, on en conclut que :

$$\det(U)\det(V) > 0$$

Puisque $\det(U), \det(V) \in \{\pm 1\}$, on a nécessairement $\det(U)\det(V) = 1$, donc on a $\det(A) = 1$. Donc :

$$V^T R U \in \text{SO}_d(\mathbb{R})$$

b) Soit $R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})$, alors avec $A = V^T R U$

$$\begin{aligned} \langle Z, R \rangle &= \text{tr}(Z^T R) \\ &= \text{tr}(R^T Z) \\ &= \text{tr}(R^T V D U^T) \\ &= \text{tr}(U^T R^T V D) \\ &= \text{tr}(A^T D) \\ &= \langle A, D \rangle \\ &= \langle V^T R U, D \rangle \end{aligned}$$

Or $R \in \text{SO}_d(\mathbb{R}) \longrightarrow V^T R U \in \text{SO}_d(\mathbb{R})$ est bijective d'après 19.a, donc on a :

$$\sup_{R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})} \langle Z, R \rangle = \sup_{R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})} \langle V^T R U, D \rangle$$

Puis avec l'égalité, le résultat suit.

20. En partant de la partie 1, $\langle D, R \rangle \leq \text{tr}(D)$ et on a bien entendu égalité si R est l'identité. Alors :

$$\begin{aligned} \sup_{R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})} \langle Z(x, y), R \rangle &= \sup_{R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})} \langle D, R \rangle \\ &= \text{tr}(D) \\ &= \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i} \end{aligned}$$

Avec Q15, $\delta(x, y)^2 = nV_n(x) + nV_n(y) - 2\sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i}$, puis on prend la racine pour obtenir le résultat.

6 Le cas où $\det(Z(x, y)) < 0$

21.

a) Supposons que λ valeur propre de R . Soit u un vecteur propre (donc non nul) correspondant, alors :

$$\begin{aligned} u^T R^T R u &= u^T u = |u|^2 \\ u^T R^T R u &= (Ru)^T (Ru)^T = |Ru|^2 = |\lambda|^2 |u|^2 \end{aligned}$$

Puisque $u \neq 0$ car vect. propre, par positivité de la norme : $|u| > 0$, donc $|\lambda|^2 = 1$ donc $\lambda \in \{\pm 1\}$

b) On écrit :

$$\begin{aligned} \det(R + I) &= \det(R + R R^T) \\ &= \det(R(I + R^T)) \\ &= \det(R)\det(I + R^T) \end{aligned}$$

c) Supposons que $\det(R) = -1$, alors on a par ce qui précède :

$$\begin{aligned} \det(R + I) &= -\det(I + R^T) \\ &= -\det([I + R^T]^T) \\ &= -\det(I + R) \end{aligned}$$

Donc $2 \det(I + R) = 0$ donc $\det(I + R) = 0$

22. On suppose que $\det(R) = -1$

- a) Par la question précédente : $\det(R + I) = 0$, c'est-à-dire que $\chi_R(-1) = 0$, donc -1 est une valeur propre de R . Notons u_d le vecteur propre associé. Soit $E_{-1} = \text{Vect}(u_d)$. On est en dimension finie, prenons un espace supplémentaire orthogonal de dimension $d - 1$ et on complète la BON en (u_1, \dots, u_d) .

On a donc $Ru_d = -u_d$. Or on a $RR^T = I$ donc par associativité du produit matriciel :

$$\begin{aligned} I &= u_d \\ &= R^T R u_d \\ &= R^T (R u_d) \\ &= R^T (-u_d) \end{aligned}$$

Donc on en déduit que :

$$R^T u_d = -u_d$$

Ce qui s'écrit aussi en transposant :

$$u_d^T R = -u_d^T$$

Soit $x \in E_1$, donc puisque E_1 est pris orthogonal à E_{-1} , on a $u_d^T x = 0$, donc il suit

$$\begin{aligned} u_d^T R x &= -u_d^T x \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'où le résultat.

- b) Soit $y \in R(E_1)$, alors il existe $x \in E_1$ tel que $y = Rx$. Pour que $y \in E_1$, il suffit qu'il soit orthogonal à E_{-1} car on a pris :

$$\mathbb{R}^d = E_1 \oplus E_{-1}$$

Donc il faut que $u_d^T y = 0$, mais grâce à la question précédente et vu que $x \in E_1$,

$$u_d^T y = u_d^T R x = 0$$

Donc $y \perp u_d$ donc $y \in E_{-1}^\perp = E_1$ d'où : $R(E_1) \subset E_1$.

Posons $v_i = R^T u_i$ pour $1 \leq i \leq d - 1$, on pose aussi $w_i = R v_i$. Montrons que $w_i \in R(E_1)$ en montrant que $v_i \in E_1$.

$$\begin{aligned} \langle u_d, v_i \rangle &= u_d^T (R^T u_i) \\ &= (R u_d)^T u_i \\ &= (-u_d^T) u_i \\ &= -\langle u_d, u_i \rangle \\ &= 0 \quad \text{car } 1 \leq i \leq d - 1 \end{aligned}$$

Donc on vient de montrer que pour tout $1 \leq i \leq d - 1$, $v_i \in E_1$ donc $w = R v_i = R R^T u_i = u_i \in R(E_1)$ pour tout $1 \leq i \leq d - 1$, on vient donc de montrer que $\text{Vect}(u_1, \dots, u_{d-1}) \subset R(E_1)$ et donc il en suit que :

$$E_1 = R(E_1)$$

23.

a) Notons d'abord que $U \in O_d(\mathbb{R})$, on a donc :

$$\begin{aligned} \langle S, R' \rangle &= \text{tr}(S^T R') \\ &= \text{tr}([U^T D U]^T [U^T R U]) \\ &= \text{tr}(U^T D^T U U^T R U) \\ &= \text{tr}(U^T D^T R U) \\ &= \text{tr}(U U^T D^T R) \\ &= \text{tr}(D^T R) \\ &= \langle D, R \rangle \end{aligned}$$

b) On sait que l'on a choisi u_d de sorte que $R u_d = -u_d$ et $R(E_1) = E_1$ par ce qui précède, R' s'obtient par changement de base sous la forme d'une matrice diagonale blocs :

$$R' = \begin{pmatrix} R_0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Or il est aisé de voir que $R' \in O_d(\mathbb{R})$ car R et U sont orthogonales. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} R'^T R' &= \begin{pmatrix} R_0^T R_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= I_d \end{aligned}$$

Donc par identification : $R_0^T R_0 = I_{d-1}$, donc $R_0 \in O_{d-1}(\mathbb{R})$.

24.

a) On écrit :

$$\begin{aligned} \langle D, R \rangle &= \langle S, R' \rangle \\ &= \text{tr}(S^T R') \\ &= \text{tr}\left(S^T \begin{pmatrix} R_0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \text{tr}\left(\begin{pmatrix} S_0^T R_0 & 0 \\ 0 & -S_{dd} \end{pmatrix}\right) \\ &= \text{tr}(S_0^T R_0) - S_{dd} \end{aligned}$$

Or S est symétrique réelle et donc S_0 aussi, donc :

$$\langle D, R \rangle = \text{tr}(S_0 R_0) - S_{dd}$$

b) Notons que S_0 est symétrique réelle, donc par le théorème spectral il existe D_2 une matrice diagonale et $Q_2 \in O_{d-1}(\mathbb{R})$ telles que $S_0 = Q_2^T D_2 Q_2$, donc :

$$\begin{aligned} \text{tr}(S_0 R_0) &= \text{tr}(Q_2^T D_2 Q_2 R_0) \\ &= \text{tr}(D_2 Q_2 R_0 Q_2^T) \end{aligned}$$

Mais $Q_2 R_0 Q_2^T \in O_{d-1}(\mathbb{R})$ donc avec la partie 1, on trouve que :

$$\text{tr}(S_0 R_0) \leq \text{tr}(D_2) = \text{tr}(S_0)$$

c) On sait que :

$$\begin{aligned} \text{tr}(S) &= \text{tr}\begin{pmatrix} S_0 & \dots \\ \dots & S_{dd} \end{pmatrix} \\ &= \text{tr}(S_0) + S_{dd} \end{aligned}$$

Mais S est semblable à D , donc $\text{tr}(D) = \text{tr}(S_0) + S_{\text{dd}}$.

Alors en regroupant a,b,c : $\langle D, R \rangle = \text{tr}(S_0 R_0) - S_{\text{dd}} \leq \text{tr}(S_0) - S_{\text{dd}} = \text{tr}(D) - 2S_{\text{dd}}$

25.

a) Par définition de S et du produit matriciel :

$$\begin{aligned} S_{\text{dd}} &= [U^T D U]_{d,d} \\ &= \sum_{i=1}^d [U^T D]_{d,i} U_{i,d} \\ &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d [U^T]_{d,j} D_{j,i} U_{i,d} \\ &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d U_{j,d} (\alpha_j \delta_{i,j}) U_{i,d} \\ &= \sum_{j=1}^d \alpha_j U_{jd}^2 \end{aligned}$$

b) Notons d'abord que $U \in O_d(\mathbb{R})$ et donc le coefficient d'ordre (d, d) de $U U^T = I_d$ s'écrit :

$$\sum_{j=1}^d U_{jd}^2 = 1$$

Or on sait que les α_i sont décroissants donc :

$$S_{\text{dd}} \geq \sum_{j=1}^d \alpha_d U_{jd}^2 = \alpha_d$$

Donc avec Q24c, on a : $\langle D, R \rangle \leq \text{tr}(D) - 2S_{\text{dd}} \leq (\sum_{i=1}^d \alpha_i) - 2\alpha_d = (\sum_{i=1}^{d-1} \alpha_i) - \alpha_d$

26. Notre raisonnement est guidé par celui de la partie 5, posons donc $S = Z^T Z$ où Z est réellement $Z(x, y)$. On peut toujours reprendre certains résultats de la partie 5 comme Q16, Q17. Mais grâce à la partie 6, on peut désormais écrire que : (notons $\mathcal{A} = O_d(\mathbb{R}) \setminus \text{SO}_d(\mathbb{R})$, et prenons pour les $\alpha_i = \sqrt{\lambda_i}$)

$$\begin{aligned} \sup_{R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})} \langle Z, R \rangle &= \sup_{R \in \mathcal{A}} \langle D, R \rangle \\ &\leq \sum_{i=1}^{d-1} \alpha_i - \alpha_d \end{aligned}$$

L'égalité étant atteinte pour : $R = \begin{pmatrix} I_{d-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Ce qui nous donne donc :

$$\sup_{R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})} \langle Z, R \rangle = \sum_{i=1}^{d-1} \sqrt{\lambda_i} - \sqrt{\lambda_d}$$

D'où :

$$\delta(x, y)^2 = n V_n(x) + n V_n(y) - 2 \left(\sum_{i=1}^{d-1} \sqrt{\lambda_i} - \sqrt{\lambda_d} \right)$$

FIN DU CORRIGÉ