Corrigé sujet PSI (Math X-ENS)

Lucas NOEL et Lauriane TURELIER

1 Prémilinaires

1. Montrons que $\mathbb{M}_n(u) \neq \emptyset$ si et seulement si $R_u \neq 0$.
   Supposons que $\mathbb{M}_n(u) \neq \emptyset$. Il existe alors une matrice $A \in \mathbb{M}_n(u)$, ie, $\rho(A) < R_u$. Or on sait que $\rho(A) \geqslant 0$. Donc $R_u > 0$, a fortiori, il est non nul.
   Supposons maintenant que $R_u > 0$. La matrice $A = \frac{R_u}{2} I_n$ appartient à $\mathbb{M}_n(u)$. En effet $\text{Spec}(A) = \{\frac{R_u}{2}\}$ et alors $\rho(A) = \frac{R_u}{2} < R_u$.
   Si on considère la suite $(u_n)_n$ définie par pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n!$, alors $R_u = 0$. Ceci est en effet assuré par le théorème de D'Alembert puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = n+1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

2. Distinguons les cas : $R_u = 0$ ou $R_u > 0$.
   - Si $R_u = 0$. On a démontré en question précédente que $\mathbb{M}_n(u) = \emptyset$
   - Sinon, on a montré à la question précédente que si $R_u > 0$, on a $\frac{R_u}{2} I_n \in \mathbb{M}_n(u)$ et $\frac{R_u}{2} I_n \neq 0$.

3. Procédons par équivalence cyclique.
   - $(i) \Longrightarrow (ii)$. On suppose que $R_u = +\infty$. Comme on a déjà $\mathbb{M}_n(u) \subset M_n(\mathbb{C})$, regardons l'inclusion inverse. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Comme $\rho(A)$ est fini puisque c'est le maximum d'un ensemble fini d'éléments de $\mathbb{R}$, on a $\rho(A) < R_u$. Ainsi $A \in \mathbb{M}_n(u)$ et ceci montre l'égalité.
   - $(ii) \Longrightarrow (iii)$. Si $\mathbb{M}_n(u) = M_n(\mathbb{C})$. Il vient de manière immédiate que la condition (iii) est vérifiée puisque $M_n(\mathbb{C})$ est un espace vectoriel non vide.
   - $(iii) \Longrightarrow (i)$. Supposons que $\mathbb{M}_n(u) \neq \emptyset$ et pour toutes matrices $A, B \in \mathbb{M}_n(u)$, on a $A + B \in \mathbb{M}_n(u)$. D'après la question 1, $R_u > 0$. Supposons par l'absurde que R_u est fini. On a alors $\frac{R_u}{2} I_n \in \mathbb{M}_n(u)$. Donc par hypothèse, $R_u I_n = \frac{R_u}{2} I_n + \frac{R_u}{2} I_n \in \mathbb{M}_n(u)$. Or, comme $\rho(R_u I_n) = R_u$, on obtient $R_u < R_u$ ce qui est absurde. Donc $R_u = +\infty$.

   Considérons la suite $\left(\frac{1}{n!}\right)_n$. On a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{k!} \neq 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} = \frac{1}{k+1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi par le critère de D'Alembert on a $R_u = +\infty$.

4. Procédons par double implication.
   - $(ii) \Longrightarrow (i)$. Si A est nilpotente, alors $\rho(A) = 0$. En effet, comme il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$, le polynôme X^k annule A, donc 0 est la seule valeur propre de A. Donc pour toute suite v telle que $R_v > 0$, $A \in \mathbb{M}_n(v)$.
   - $(i) \Longrightarrow (ii)$. On suppose que A vérifie la propriété (i). Considérons alors la suite de suite $\mathcal{U} = (u(k))_k$ où pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la suite $u(k) = (k^n)_n$. On vérifie par le critère de D'Alembert que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $R_{u(k)} = \frac{1}{k} > 0$. Donc, par hypothèse, $A \in \mathbb{M}_n(u(k))$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. De fait, $0 \leqslant \rho(A) < \frac{1}{k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Ainsi par le théorème des gendarmes, $\rho(A) = 0$. Il vient que 0 est la seule valeur propre de A, donc $\chi_A = X^n$ et par le théorème de Cayley-Hamilton $A^n = 0$. Donc A est nilpotente.

5. Nous allons montrer par récurrence que pour tout $m \in N$, la suite $u^{(m)} = \left(\left(\prod_{i=1}^{m}(k+i)\right) u_{k+m}\right)_k$. On pose alors la proposition de récurrence suivante :

$$P(m) : \text{"}\forall k \in \mathbb{N}, \left(u^{(m)}\right)_k = (k+1)(k+2)...(k+m)u_{k+m}\text{"}$$

Initialisation : $P(0)$ est vraie par hypothèse.
Hérédité : Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $P(m)$ soit vraie. Par définition, on a $u^{(m+1)} = \left(u^{(m)}\right)^{(1)}$.
Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\left(u^{(m+1)}\right)_k &= \left(\left(u^{(m)}\right)^{(1)}\right)_k \\ &= (k+1)\left(u^{(m)}\right)_{k+1} \quad \text{par définition} \\ &= (k+1)(k+2)...(k+1+m)u_{k+1+m} \qquad \text{par hypothèse de récurrence}\end{aligned}$$

Donc $P(m+1)$ est vraie. Ce qui achève la récurrence.

Fixons maintenant $m \in \mathbb{N}$ et déterminons le rayon de convergence de $u^{(m)}$. Pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\left(u^{(m)}\right)_{k+1}}{\left(u^{(m)}\right)_k} = \underbrace{\frac{(k+2)(k+3)...(k+m+1)}{(k+1)(k+2)...(k+m)}}_{\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 1} \times \underbrace{\frac{u_{k+m+1}}{u_{k+m}}}_{\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{R_u}} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{R_u}.$$

Et comme $\left(\frac{\left(u^{(m)}\right)_{k+1}}{\left(u^{(m)}\right)_k}\right)$ converge, par le critère de D'Alembert, c'est vers $\frac{1}{R_{u^{(m)}}}$. Donc par unicité de la limite, on en déduit que $R_{u^{(m)}} = R_u$, donc que $D_{u^{(m)}} = D_u$.

6. Rappelons que pour des suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ on a $R_{a+b} \geqslant \min(R_a, R_b)$ et $R_{a\star b} \geqslant \min(R_a, R_b)$. Considérons alors $A \in \mathbb{M}_n(u) \cap \mathbb{M}_n(v)$. Alors, par définition $\rho(A) < R_u$ et $\rho(A) < R_v$. Donc $\rho(A) < \min(R_u, R_v)$. Alors on a $\rho(A) < R_{u+v}$ et $\rho(A) < R_{u\star v}$. Donc $A \in \mathbb{M}_n(u+v) \cap \mathbb{M}_n(u \star v)$.

7. **ATTENTION :** Il semble y avoir une erreur dans l'énoncé. Il faut ici supposer que les matrices symétriques sont **REELLES**. Même si ce résultat est vrai sans hypothèse de symétrie pour les matrices et dans le cas complexe, la démonstration de ce résultat met en jeu des théorèmes hors programme (cf : trigonalisation similtanée, pour les curieux).

   On se place alors dans le cas où A et B sont symétriques réelles. Comme elles commutent, AB est aussi symétrique, en effet $(AB)^T = B^T A^T = BA = AB$ et de plus, elle est réelle. Donc par le théorème spectral, AB est diagonalisable. On rappelle que sur $\mathbb{R}^n$, $(x, y) \mapsto x^\top y$ est un produit scalaire et on note $\|.\|$ sa norme associée.

   Soit λ une valeur propre telle que $|\lambda| = \rho(AB)$. Prenons alors $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\| = 1$ et $ABx = \lambda x$. On a alors $\|ABx\| = \rho(AB)\,\|x\| = \rho(AB)$.

   Or, pour toute matrice M symétrique réelle (qui est alors diagonalisable en base orthonormée), on a pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|Mx\| \leqslant \rho(M)\,\|x\|$. En effet, par le théorème spectral, il existe une matrice P orthogonale telle que $M = PDP^T$ avec $D = \text{diag}(d_1, ..., d_n)$. Dans ce cas,

$$\|Mx\|^2 = x^\top M^\top Mx = x^\top PDP^\top PDP^\top x = x^\top PD^2P^\top x = y^\top D^2 y = \|Dy\|^2$$

   avec $y = P^\top x$. Or $\|Dy\| \leqslant \rho(D)\,\|y\|$. Cependant, P étant orthogonale, on a $\|y\| = \|x\|$ et comme D et M sont semblables $\rho(M) = \rho(D)$. Finalement $\|Mx\| \leqslant \rho(M)\,\|x\|$.

Appliquons ce résultat avec A et B symétriques réelles :

$$\rho(AB) = \|ABx\| = \|A(Bx)\| \leqslant \rho(A)\,\|Bx\| \leqslant \rho(A)\rho(B)\,\|x\| = \rho(A)\rho(B)\ .$$

Donc nous avons, $\rho(AB) \leqslant \rho(A)\rho(B) < R_u^2 \leqslant R_u$, puisque $R_u \in]0,1]$. Donc $AB \in \mathbb{M}_n(u)$.

2 Fonctions de matrices

8. Remarquons que l'application
$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[X] & \to & M_n(\mathbb{C}) \\ P & \mapsto & P(A) \end{array} \right.$$
est bien définie et linéaire. Comme $M_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie et $\mathbb{C}[X]$ de dimension infinie, φ ne peut être injective. Ainsi $\mathscr{V}(A) = \ker(\varphi) \setminus \{0\}$ est non vide.

9. Commençons par montrer l'existence d'un tel polynôme. Compte tenu de la définition de l'entier m, il existe un polynôme $B \in \mathscr{V}(A)$ de degré m. En particulier, si $b_m \neq 0$ est le coefficient dominant de B, alors le polynôme $\varphi_A := \frac{1}{b_m}B \in \mathscr{V}(A)$, est de degré m et unitaire.
Il reste à montrer que φ_A est le seul polynôme vérifiant cette propriété. Soit ψ un autre polynôme vérifiant les propriétés (i), (ii) et (iii). On effectue alors la division euclidienne de ψ par φ_A : il existe alors deux polynômes à coefficients complexes Q et R tels que
$$\psi = \varphi_A \times Q + R \tag{1}$$
et tels que $\deg(R) < \deg(\varphi_A)$. Supposons par l'absurde que $R \neq 0$. Alors en évaluant la relation (1) en A, on obtient $\psi(A) = 0 = \varphi_A(A) \times Q(A) + R(A)$. En particulier, $R(A) = 0$, donc $R \in \mathscr{V}(A)$. Mais $\deg(R) < \deg(\varphi_A)$, donc ceci contredit la minimalité de m. Finalement, $R = 0$ et $\psi = \varphi_A Q$. Par propriétés des degrés, on trouve que $\deg(Q) = 0$, donc que $Q \in \mathbb{C}$. Mais comme φ_A et ψ sont tous deux unitaires, on en déduit que $Q = 1$, donc que $\psi = \varphi_A$.

10. Comme $P \in \mathscr{V}(A)$, $\deg(P) \geqslant m$. Ainsi, en effectuant la division euclidienne de P par φ_A, on obtient deux polynômes Q et R dans $\mathbb{C}[X]$ tels que $P = \varphi_A \times Q + R$ et $\deg(R) < \deg(\varphi_A)$. En évaluant cette relation en A, on trouve $R(A) = 0$. Comme à la question précédente, on déduit que $R = 0$. Donc φ_A divise P.

11. Soit λ une valeur propre de A. Montrons que λ est racine de φ_A. Comme λ est valeur propre de A, il existe un vecteur x non nul tel que $Ax = \lambda x$. Une récurrence immédiate permet de dire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k x = \lambda^k x$. Ainsi par linéarité, on trouve que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(A)x = P(\lambda)x$. Donc si on considère $P = \varphi_A$, on obtient $0 = \varphi_A(A)x = \varphi_A(\lambda)x$. Etant donné que $x \neq 0$, $\varphi_A(\lambda) = 0$.

    Réciproquement, supposons que λ est une racine de φ_A. Montrons que λ est une valeur propre de A. Comme λ est une racine de φ_A, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\varphi_A = (X - \lambda)Q$. Si on évalue cette relation en A, on obtient $0 = \varphi_A(A) = (A - \lambda I_n)Q(A)$. Remarquons d'abord que $Q(A) \neq 0$, puisque sinon, on aurait un polynome de degré plus petit que m qui annule A. Donc la matrice $Q(A)$ est de rang supérieur ou égal à 1, donc il existe $x \neq 0$ tel que $y := Q(A)x \neq 0$. On obtient alors, $0 = \varphi_A(A)x = (A - \lambda I_n)y$, ou encore $Ay = \lambda y$.

12. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Remarquons d'abord que si $B \in M_n(\mathbb{C})$ tel que $P(B) = 0$, alors on a $\overline{P}(\overline{B}) = 0$. Donc en appliquant ceci à $P = \varphi_A$ et $B = A \in M_n(\mathbb{R})$, on a $0 = \overline{\varphi_A}(\overline{A}) = \overline{\varphi_A}(A)$. Ce qui démontre que φ_A et $\overline{\varphi_A}$ annulent A et vérifient tous deux les propriétés de la question 9. Donc par unicité, on obtient $\varphi_A = \overline{\varphi_A}$, et donc $\varphi_A \in \mathbb{R}[X]$.

13. La linéarité de T se déduit directement de celle de la dérivée. On montre alors que T est injective. Soit $P \in \mathbb{C}_{m-1}[X]$ tel que $T(P) = 0$. Alors, pour tout $i \in [\![1, l]\!]$, λ_i est racine de P d'ordre m_i. Donc P a $m_1 + m_2 + ... + m_l = m$ racines, mais P est de degré au plus $m - 1$. Donc $P = 0$. Ce qui prouve que T est injective. Or, comme $\dim(\mathbb{C}_{m-1}[X]) = \dim(\mathbb{C}^m) = m$ et que T est linéaire, l'injectivité fournit la bijectivité. Donc T est un isomorphisme.

Considérons à présent le vecteur de $\mathbb{C}^m$, $D := (U^{(k)}(\lambda_i))_{i\in[\![1,l]\!],k\in[\![1,m_i-1]\!]}$. Comme T est un isomorphisme, il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{C}_{m-1}[X]$ tel que $T(Q) = D$.

14. Si $P = Q$, il n'y a rien à montrer. Sinon, on raisonne de nouveau par double implication. Commençons par supposer que $u(A) = P(A)$. En particulier, $P(A) = Q(A)$, donc $(P-Q)(A) = 0$. Donc $P - Q \in \mathscr{V}(A)$. Donc par la question (10), φ_A divise $P-Q$, et ainsi il existe un polynôme $B \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P - Q = B \times \varphi_A$. Soit $k \in \mathbb{N}$, alors par la formule de Leibniz, on a

$$P^{(k)} = Q^{(k)} + \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} B^{(j)} \varphi_A^{(k-j)} \ . \tag{2}$$

Compte tenu de la forme de φ_A démontrée précédemment, on trouve que pour tout $j \in [\![1,l]\!]$, pour tout $k \in [\![0, m_j-1]\!]$, $\varphi_A^{(k)}(\lambda_j) = 0$. Soit $j \in [\![1,l]\!]$. En évaluant alors la relation (2) en λ_j pour tout $k \in [\![0, m_j-1]\!]$, $P^{(k)}(\lambda_j) = Q^{(k)}(\lambda_j) = U^{(k)}(\lambda_j)$.
Réciproquement, supposons que pour tout $j \in [\![1,l]\!]$, et pour tout $k \in [\![0, m_j-1]\!]$, $P^{(k)}(\lambda_j) = U^{(k)}(\lambda_j) = Q^{(k)}(\lambda_j)$. Dans ce cas, si $j \in [\![1,l]\!]$, par linéarité de la dérivée, pour tout $k \in [\![0, m_j-1]\!]$, $(P-Q)^{(k)}(\lambda_j) = 0$. Donc λ_j est une racine de multiplicité au moins m_j, donc le polynôme $(X-\lambda_j)^{m_j}$ divise $P-Q$. Ceci étant vrai pour tout $j \in [\![1,l]\!]$, on en déduit que $\operatorname{ppcm}\left((X-\lambda_j)^{m_j}, j \in [\![1,l]\!]\right)$ divise $P-Q$. Mais comme pour tout $i \neq j$, $\lambda_j \neq \lambda_i$, on en déduit que $(X-\lambda_j)^{m_j}$ et $(X-\lambda_i)^{m_i}$ sont premiers entre eux. Ainsi, $\operatorname{ppcm}\left((X-\lambda_j)^{m_j}, j \in [\![1,l]\!]\right) = \varphi_A$. Donc φ_A divise $P-Q$, donc il existe $B \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P - Q = B \times \varphi_A$. Il reste alors à évaluer en A cette dernière relation et à utiliser le fait que $\varphi_A(A) = 0$ pour conclure que $P(A) = Q(A)$.

15. Si $\alpha = 0$, le résultat est immédiat. Supposons alors $\alpha \neq 0$. Remarquons d'abord que $\varphi_{\alpha I_n} = X - \alpha$. En effet, il est de degré 1 (donc de degré minimal), unitaire, annule αI_n et αI_n est non nul. Trouvons alors un polynôme P qui vérifie les conditions la question précédente, c'est à dire $P(\alpha) = U(\alpha)$ (qui est bien défini puisque $\alpha < R_u$). Comme nous n'avons qu'une condition sur P, nous pouvons le prendre constant, égal à la constante $U(\alpha)$. Par la question précédente, on a alors $u(\alpha I_n) = P(\alpha I_n) = U(\alpha) I_n$.

16. Comme à la question précédente, commençons par trouver le polynôme minimal de A. Remarquons que le polynôme $Q := (X-\alpha)(X-\beta)$ annule A, donc par la question 10, φ_A divise Q. Donc $\varphi_A = X - \alpha$, $\varphi_A = X - \beta$ ou $\varphi_A = Q$. Or comme $\alpha \neq \beta$, $A - \alpha I_2 \neq 0$ et $A - \beta I_2 \neq 0$, donc $\varphi_A = Q$. Trouvons maintenant un polynôme P qui vérifie les conditions $P(\alpha) = U(\alpha)$ et $P(\beta) = U(\beta)$ (qui sont bien définis puisque $\alpha, \beta \in D_u$). Le polynôme P défini par :

$$P(X) := \frac{U(\beta)}{\beta - \alpha}(X - \alpha) + \frac{U(\alpha)}{\alpha - \beta}(X - \beta)$$

convient. Nous avons alors $u(A) = P(A)$.

$$P(A) = \frac{U(\beta)}{\beta - \alpha}(A - \alpha I_2) + \frac{U(\alpha)}{\alpha - \beta}(A - \beta I_2) = \begin{pmatrix} U(\alpha) & \gamma \frac{U(\beta) - U(\alpha)}{\beta - \alpha} \\ 0 & U(\beta) \end{pmatrix} \ .$$

17. (a) Considérons la matrice $M := \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{C})$. En particulier, comme $\rho(M) = \max(\rho(A), \rho(B)) < R_u$, il vient que $M \in \mathbb{M}_{2n}(u)$. Calculons alors φ_M. Ecrivons

$$\varphi_A = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp(A)}} (X - \lambda)^{a_\lambda} \qquad \text{et} \qquad \varphi_B = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp(B)}} (X - \lambda)^{b_\lambda} \ .$$

Notons pour simplifier $S := \mathrm{Sp}(A) \cup \mathrm{Sp}(B)$ et pour tout $\lambda \in S$, $c_\lambda := \max(a_\lambda, b_\lambda)$. On note de plus $Q := \prod_{\lambda \in S} (X - \lambda)^{c_\lambda}$ et $\sigma := \sum_{\lambda \in S} c_\lambda$.

Montrons que $\varphi_M = Q$. En effet, $Q(M) = \begin{pmatrix} Q(A) & 0 \\ 0 & Q(B) \end{pmatrix} = 0$, donc φ_M divise Q. Or s'il existe $\lambda \in S$, tel que la multiplicité de λ dans φ_M est strictement inférieure à c_λ, alors $\varphi_M(A) \neq 0$ ou $\varphi_M(B) \neq 0$, puisque φ_A ou φ_B ne divisera par φ_M. Donc $\varphi_M = Q$.

Par la question (13), il existe un unique polynôme $R \in \mathbb{C}_{m-1}[X]$ tel que pour tout $\lambda \in S$, et pour tout $k \in [\![1, c_\lambda - 1]\!]$, $R^{(k)}(\lambda) = U^{(k)}(\lambda)$. En particulier, R vérifie ces conditions pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et pour tout $k \in [\![1, a_\lambda - 1]\!]$ ainsi que pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(B)$ et tout $k \in [\![1, b_\lambda - 1]\!]$. Donc R vérifie les conditions de la question (14) pour A et pour B. Donc $u(A) = R(A)$ et $u(B) = R(B)$.

(b) Etant donné que $AB, BA \in \mathbb{M}_n(u)$, on peut appliquer la question (17)(a). Il existe alors un polynôme $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que $u(AB) = R(AB)$ et $u(BA) = R(BA)$. Alors, on peut remarquer que pour tout $k \in [\![0, \deg(R)]\!]$, on a l'égalité $A(BA)^k = (AB)^k A$ (récurrence immédiate). Ainsi, R étant un polynôme, par linéarité, on a :
$$Au(BA) = AR(BA) = R(AB)A = u(AB)A \ .$$

18. Justifions que $A \in \mathbb{M}_n(u\star v)$. La question (6) assure que $\mathbb{M}_n(u) \cap \mathbb{M}_n(v) \subset \mathbb{M}_n(u\star v)$, donc comme $A \in \mathbb{M}_n(u) \cap \mathbb{M}_n(v)$, il vient que $A \in \mathbb{M}_n(u \star v)$.
Par définition de $u(A)$ et $v(A)$, il existe deux polynômes $Q_u, Q_v \in \mathbb{C}[X]$ tels que $u(A) = Q_u(A)$ et $v(A) = Q_v(A)$. Ces polynômes, par la question (14), vérifient pour tout $j \in [\![1, l]\!]$ et pour tout $k \in [\![0, m_j - 1]\!]$, $Q_u^{(k)}(\lambda_j) = U^{(k)}(\lambda_j)$ et $Q_v^{(k)}(\lambda_j) = V^{(k)}(\lambda_j)$. On pose $R := Q_u \times Q_v$ et $W(z) := \sum_{k=0}^{+\infty} (u \star v)_k z^k$. Par propriété du produit de Cauchy, pour tout $z \in D_{u\star v}$, $W(z) = U(z)V(z)$. En particulier, pour tout $x \in]-R_{u\star v}, R_{u\star v}[$, l'égalité reste vraie et la série entière est $\mathscr{C}^\infty(]-R_{u\star v}, R_{u\star v}[)$. De fait, par la formule de Leibniz, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in]-R_{u\star v}, R_{u\star v}[$,
$$W^{(k)}(x) = \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} U^{(m)}(x) V^{(k-m)}(x) \ . \tag{3}$$
En particulier, pour tout $j \in [\![1, l]\!]$ et pour tout $k \in [\![0, m_j - 1]\!]$, l'évaluation de (3) en λ_j, (qui a un sens puisque $\lambda_j \in [-\rho(A), \rho(A)] \subset]-R_{u\star v}, R_{u\star v}[$) donne
$$\begin{aligned} W^{(k)}(\lambda_j) &= \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} U^{(m)}(\lambda_j) V^{(k-m)}(\lambda_j) \\ &= \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} Q_u^{(m)}(\lambda_j) Q_v^{(k-m)}(\lambda_j) \text{ par hypothèse sur } Q_u \text{ et } Q_v \\ &= (Q_u Q_v)^{(k)}(\lambda_j) = R^{(k)}(\lambda_j) \ . \end{aligned}$$
Ainsi le polynôme R vérifie les conditions de la question (14), donc on a $(u \star v)(A) = R(A) = Q_u(A) \times Q_v(A) = u(A) \times v(A)$.

3 Cas de matrices diagonalisables

19. On pose $Q := (X - \lambda_1)...(X - \lambda_l)$. Comme les valeurs propres de A sont exactement les racines de φ_A d'après la question (11), on a $Q|\varphi_A$. Montrons maintenant que Q annule A. Comme A est diagonalisable, il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(d_1, ..., d_n)$ et où $d_j \in \mathrm{Sp}(A)$. Une récurrence immédiate fournit que pour tout polynôme $R \in \mathbb{C}[X]$, $R(A) = PR(D)P^{-1}$. En particulier, pour $R = Q$,
$$Q(A) = PQ(D)P^{-1} = P\mathrm{diag}(Q(d_1), ..., Q(d_n))P^{-1} = 0 \ .$$
Donc $Q \in \mathscr{V}(A)$. Par la question (10), on obtient donc que $\varphi_A | Q$. Comme φ_A et Q sont unitaires, $\varphi_A = Q$.

20. (a) On propose ici deux façons de procéder pour cette question :

Première méthode : On pose $P(X) := \sum_{k=0}^{l} U(\lambda_k) Q_k^A(X)$. Vérifons que P satisfait les conditions de la question (14). Soit $k \in [\![1, l]\!]$. Remarquons que $Q_i^A(\lambda_k) = 0$ si $i \neq k$ et $Q_k^A(\lambda_k) = 1$. Donc $P(\lambda_k) = \sum_{i=0}^{l} U(\lambda_i) Q_i^A(\lambda_k) = U(\lambda_k)$. Donc P satisfait les conditions de la question (14). Donc $u(A) = P(A) = \sum_{k=0}^{l} U(\lambda_k) Q_k^A(A)$.

Deuxième méthode : Par définition de $u(A)$, il existe $Q \in \mathbb{C}_{l-1}[X]$ tel que $u(A) = Q(A)$. Notons que $\mathscr{B} := \left(Q_k^A\right)$ forme une base de $\mathbb{C}_{l-1}[X]$. En effet :

- $\operatorname{card}(\mathscr{B}) = l = \dim\left(\mathbb{C}_{l-1}[X]\right)$
- Soit $(\alpha_1, ..., \alpha_l) \in \mathbb{C}^l$ tel que $\sum_{k=1}^{l} \alpha_k Q_k^A = 0$. Pour $m \in [\![1, l]\!]$, en évaluant la précédente relation en λ_m, on obtient que $\alpha_m = 0$. Ceci étant vrai pour tout $m \in [\![1, l]\!]$, on en déduit que $\mathscr{B}$ est libre, donc que c'est une base de $\mathbb{C}_{l-1}[X]$.

Comme $Q \in \mathbb{C}_{l-1}[X]$ et que $\mathscr{B}$ en constitue une base, il existe des coefficients $(\alpha_1, ..., \alpha_l) \in \mathbb{C}^l$ tels que $Q = \sum_{k=1}^{l} \alpha_k Q_k^A$. Pour $m \in [\![1, l]\!]$, en évaluant la précédente relation en λ_m, on obtient que $\alpha_m = Q(\lambda_m) = U(\lambda_m)$ d'après la question (13). Finalement, $Q = \sum_{k=1}^{l} U(\lambda_k) Q_k^A$, et il suffit d'évaluer cette relation en A pour obtenir que $u(A) = Q(A) = \sum_{k=1}^{l} U(\lambda_k) Q_k^A(A)$.

(b) Soit $k \in [\![1, l]\!]$. On pose pour tout $i \in [\![1, l]\!]$, $E_i := \ker(A - \lambda_i I_n)$. Comme A est diagonalisable, $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{l} E_i$. En particulier, E_k est en somme directe avec $F_k := \bigoplus_{i=1, i\neq k}^{l} E_i$. On va montrer que $Q_k^A(A)$ est la projection sur E_k parallèlement à F_k.

D'une part, si $x \in E_i$, avec $i \neq k$, alors $Q_k^A(A)x = \left[\prod_{j\neq k} \frac{A - \lambda_j I_n}{\lambda_k - \lambda_j}\right] x = \left[\prod_{j\neq k, j\neq i} \frac{A - \lambda_j I_n}{\lambda_k - \lambda_j}\right] \times \underbrace{\frac{(A - \lambda_i)x}{\lambda_k - \lambda_i}}_{=0} = 0.$

La première égalité venant du fait que A commute avec elle même et I_n, la deuxième du fait que $x \in E_i$. Donc par linéarité, pour tout $x \in F_k$, $Q_k^A(x) = 0$.
De l'autre, prenons $x \in E_k$. Remarquons que pour tout $i \in [\![1, l]\!]$, $i \neq k$, on a $(A - \lambda_i I_n)x = (\lambda_k - \lambda_i)x$. Donc une récurrence immédiate nous donne que $Q_k^A(A)x = x$. Donc on a bien montré que $Q_k^A(A)$ est la projection sur E_k parallèlement à F_k. Ainsi $\ker(Q_k^A(A)) = F_k$ et $\operatorname{Im}(Q_k^A(A)) = E_k$.

(c) Comme à la question précédente, on a $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{k=1}^{l} E_k$. Soient $k \in [\![1, l]\!]$ et $x \in E_k$. On a alors, $x \in F_i$ pour tout $i \neq k$. Donc pour tout $i \neq k$, $Q_i^A(A)x = 0$, par la question précédente et $Q_k^A(A)x = x$. Il vient alors par linéarité que $\sum_{i=1}^{l} Q_i^A(A)x = x$. Ceci étant vrai pour tout $k \in [\![1, l]\!]$, l'égalité est vraie sur $\mathbb{C}^n$ par linéarité. Donc on a $\sum_{i=1}^{l} Q_i^A(A) = I_n$.

21. A et BAB^{-1} étant semblables, elles ont le même spectre, donc a fortiori le même rayon spectral. Donc $BAB^{-1} \in \mathbb{M}_n(u)$. Ainsi par la question (17)(a), il existe $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que $u(A) = R(A)$ et $u(BAB^{-1}) = R(BAB^{-1})$. De plus on a, par récurrence immédiate, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(BAB^{-1})^k = BA^kB^{-1}$, donc pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(BAB^{-1}) = BP(A)B^{-1}$. Ainsi,

$$u(BAB^{-1}) = R(BAB^{-1}) = BR(A)B^{-1} = Bu(A)B^{-1} .$$

22. (a) Premièrement on a $A = SDS^{-1}$. Donc en composant l'égalité par φ_D, on obtient $\varphi_D(A) = S\varphi_D(D)S^{-1} = 0$, donc $\varphi_D(A) = 0$, ainsi $\varphi_A | \varphi_D$. De même en inversant la relation, on a $D = S^{-1}AS$ et en composant par φ_A, on obtient $\varphi_A(D) = 0$, donc, $\varphi_D | \varphi_A$. Comme ils sont tous les deux unitaires, on a $\varphi_A = \varphi_D$. D'une part, ceci implique que $D \in \mathbb{M}_n(u)$. De l'autre, par la question (13), il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{C}_{l-1}[X]$

tel que pour tout $i \in [\![1, l]\!]$, $U(\lambda_i) = Q(\lambda_i)$. Ainsi par la question (14), on a $u(D) = Q(D)$. Remarquons que les coefficient distincts de D sont les $(\lambda_i)_{i\in[\![1,l]\!]}$. Comme $D = \mathrm{diag}(d_1, ..., d_n)$, avec pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $d_j \in (\lambda_i)_{i\in[\![1,l]\!]}$, est diagonale, pour tout polynôme $R \in \mathbb{C}[X]$, on a $R(D) = \mathrm{diag}(R(d_1), ..., R(d_n))$. En particulier, pour $R = Q$, on obtient que $u(D) = Q(D)$ est diagonale avec, de plus,

$$[u(D)]_{i,i} = [Q(D)]_{i,i} = Q([D]_{i,i}) = u([D]_{i,i}),$$

par hypothèse sur Q.

(b) On sait que $A = SDS^{-1}$. En particulier, par la question (21) et la question précédente,

$$u(A) = u(SDS^{-1}) = Su(D)S^{-1} = S\mathrm{diag}(U(d_1), ..., U(d_n))S^{-1} .$$

4 Application à des cas particuliers

23. (a) Montrons que $H^n = 0$. En effet, si on considère l'application linéaire ψ de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associée à H, on obtient, si on note $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$, $\psi(e_1) = 0$ et $\psi(e_k) = e_{k-1}$ pour tout $k \in [\![2, n]\!]$. Par récurrence immédiate, on obtient que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\psi^i(e_k) = 0$ si $k \leqslant i$ et $\psi^i(e_k) = e_{k-i}$ sinon. Si on considère $i = n$, on a $\psi^n(e_k) = 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Donc $H^n = 0$.
Il vient alors que $\varphi_H | X^n$. Donc il existe $k \in [\![1, n]\!]$, tel que $\varphi_H = X^k$. Or par les calculs précédents, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $H^i \neq 0$, puisque $\psi^i(e_n) = e_{n-i} \neq 0$. Donc $\varphi_H \neq X^i$. Finalement, $\varphi_H = X^n$.

(b) Pour les mêmes raisons que pour la question précédente, on a $\varphi_A = (X-\alpha)^n$. On pose $Q := \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \frac{U^{(i)}(\alpha)}{i!}(X-\alpha)^i$. Montrons que Q vérifie les conditions de la question (14). Par la formule de Taylor pour les polynômes, on a $Q^{(k)}(\alpha) = U^{(k)}(\alpha)$, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$. Donc par la question (14), $u(A) = Q(A) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \frac{U^{(i)}(\alpha)}{i!} H^i$.
En utilisant la fonction ψ de la question précédente, on trouve que $H^k = \begin{pmatrix} (0) & I_{n-k} \\ (0) & (0) \end{pmatrix}$. On obtient alors la formule voulue pour $u(A)$.

24. (a) Etant donné que $Y^\top Y = 1 \neq 0$, il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $y_i \neq 0$. En notant $L_1, ..., L_n$ les vecteurs lignes de G, on peut écrire $L_j = y_ijZ^\top$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$. Ainsi pour tout $j \neq i$, on a $L_j = \frac{y_j}{y_i} L_i$. Donc tous les vecteurs lignes de G sont colinéaires à L_i qui est non nul puisque $Z \neq 0$ car $Z^\top Z = 1$. Ceci donne donc que G est de rang 1.
Considérons $x \in \mathbb{R}^n$. Par associativité du produit matriciel, on obtient $Gx = (YZ^\top)x = Y(Z^\top x)$. Et $Z^\top x$ étant maintenant un réel, ceci assure que $\mathrm{Im}(G) \subset \mathrm{Vect}(Y)$. Or, on vient de montrer que G est de rang 1, et $\mathrm{Vect}(Y)$ est de dimension 1. D'où l'égalité, $\mathrm{Im}(G) = \mathrm{Vect}(Y)$.

(b) Par le théorème du rang, $\ker(G)$ est de dimension $n - 1 > 0$. Donc 0 est valeur propre de G d'ordre au moins $n - 1$. Il nous reste à trouver la dernière valeur propre. Cette dernière existe puisque le polynôme caractérique χ_G que G, qui est de degré n et peut se factoriser par X^{n-1}. D'où, $\chi_G = X^{n-1}(X - \lambda)$. Comme χ_G est scindé, la somme des valeurs propres vaut $\mathrm{tr}(G)$. De fait, $(n-1) \times 0 + \lambda = \mathrm{tr}(G) = Z^\top Y$. Donc $\lambda = Z^\top Y$, et finalement, les valeurs propres de G sont bien 0 et $Z^\top Y$.

(c) On a directement $\rho(G) = |Z^\top Y|$. En effet, s'il est nul, alors toutes les valeurs propres valent 0 et sinon, comme $Z^\top Y$ est la seule valeur propre non nulle, son module est nécessairement le rayon spectral de G. Rappelons que $(V, W) \mapsto V^\top W$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, donc respecte l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Ainsi on a $|Z^\top Y| \leqslant (Z^\top Z)(Y^\top Y) = 1$. Donc $\rho(G) \leqslant 1 < R_u$. Donc $G \in \mathbb{M}_n(u)$.

(d) Montrons, d'abord, que si $Z^\top Y \neq 0$, G est diagonalisable. Comme précédemment, $\ker(G)$ est de dimension $n - 1$. La valeur propre $Z^\top Y$ étant non nulle, $\ker(G) \cap \ker\big(G - Z^\top Y I_n\big) = \{0\}$, donc $\ker\big(G - Z^\top Y I_n\big)$

est de dimension supérieure ou égale à 1. Ainsi par la formule de Grassmann, et le fait que $\ker(G) + \ker\left(G - Z^\top Y I_n\right) \subset \mathbb{R}^n$, on a

$$n \leqslant \dim(\ker(G)) + \dim(\ker(G - Z^\top Y I_n)) = \dim\Big(\ker(G) + \ker\Big(G - Z^\top Y I_n\Big)\Big) \leqslant n \ .$$

Donc, nécessairement, $n = \dim(\ker(G)) + \dim\left(\ker\left(G - Z^\top Y I_n\right)\right)$. On en conclut que G est diagonalisable. En particulier, par la question (19), on a directement, $\varphi_G = X\left(X - Z^\top Y\right)$.

(e) On cherche un polynôme P de degré 1 tel que $P(0) = U(0)$ et $P\left(Z^\top Y\right) = U\left(Z^\top Y\right)$. Prenons

$$P(X) = \frac{U\left(Z^\top Y\right) - U(0)}{Z^\top Y} X + U(0) \ .$$

Par la question (14), $U(G) = P(G) = U(0)I_n + \frac{U\left(Z^\top Y\right) - U(0)}{Z^\top Y} G$.

(f) On suppose maintenant que $Z^\top Y = 0$. Nous avons déjà dit $\ker(G)$ est de dimension $n-1$. Considérons $(b_1, ..., b_{n-1})$ une base de $\ker(G)$ et $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\mathrm{Vect}(x)$ soit un supplémentaire du noyau. Donc $(b_1, ..., b_{n-1}, x)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
Montrons que $G^2 = 0$. Déjà, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $G^2 b_i = 0$ puisque $b_i \in \ker(G)$. Comme $Gx \in \mathbb{R}^n$, il existe $\mu_1, ..., \mu_n$ tel que $Gx = \mu_1 b_1 + ... + \mu_{n-1} b_{n-1} + \mu_n x$. Donc $G^2 x = \mu_n Gx$. Comme $Gx \neq 0$ puisque $x \notin \ker(G)$, Gx est un vecteur propre de G associé à la valeur propre μ_n. Or, si $Z^\top Y = 0$, la seule valeur propre de G est 0. Donc $\mu_n = 0$ et $G^2 x = 0$. D'où $G^2 = 0$.
Par conséquent $\varphi_G | X^2$. Or, $G \neq 0$ car de rang 1, donc φ_G ne divise pas X. Donc $\varphi_G = X^2$.
Cherchons, maintenant, un polynôme P de degré 1 tel que $P(0) = U(0)$ et $P'(0) = U'(0)$. Le polynôme $P = U'(0)X + U(0)$ convient. Donc, par la question (14), $u(G) = P(G) = U'(0)G + U(0)I_n$.

25. (a) Soient $l, m \in [\![1, n]\!]$. Calculons le coefficient d'indice (l, m) de la matrice $F\overline{F}$.

$$\begin{aligned}\left[F\overline{F}\right]_{l,m} &= \sum_{r=1}^{n} [F]_{l,r} \left[\overline{F}\right]_{r,m} = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} \omega^{(l-1)(r-1)} \overline{\omega}^{(r-1)(m-1)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} e^{\frac{2i\pi}{n} r(m-l)} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad m = l \\ 0 & \quad \text{sinon} \end{cases} \ .\end{aligned}$$

La dernière égalité venant de la formule de sommation des termes d'une suite géométrique de raison $e^{\frac{2i\pi}{n}(m-l)} \neq 1$ si $m \neq l$. On en déduit que $F\overline{F} = I_n$. Donc F est bien inversible, d'inverse $\overline{F}$.

(b) Calculons F^2. Comme précédement, on a pour des indices $(l, m) \in [\![1, n]\!]$,

$$\begin{aligned}\left[F^2\right]_{l,m} &= \sum_{r=1}^{n} [F]_{l,r} \, [F]_{r,m} = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} \omega^{(l-1)(r-1)} \omega^{(r-1)(m-1)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} e^{\frac{-4i\pi}{n} r(m+l-2)} \ .\end{aligned}$$

Si $\frac{4i\pi}{n}(m + l - 2) \in 2i\pi\mathbb{Z}$, alors pour tout $r \in [\![0, n-1]\!]$, $e^{\frac{-4i\pi}{n} r(m+l-2)} = 1$ et $[F^2]_{l,m} = 1$. Sinon, $[F^2]_{l,m} = 0$ par la formule de sommation des termes d'une suite géométrique. Donc F^2 n'a que des coefficients valant 0 ou 1, donc $F^2 \in M_n(\mathbb{R})$.

(c) La question précédente assure que $F^2 \in M_n(\mathbb{R})$, donc $F^2 = \overline{F^2} = \overline{F}^2$. Donc en multipliant de chaque côté par F^2, on obtient $F^4 = F^2 \overline{F}^2 = (F\overline{F})^2 = I_n$ puisque F et $\overline{F}$ commutent. On remarque alors, par la relation $F^4 = I_n$ que le polynôme $X^4 - 1$ annule F. Donc φ_F divise $X^4 - 1$. Donc les valeurs propres de F sont contenues dans les racines de $X^4 - 1$, c'est à dire dans $\{-1, 1, -i, i\}$, qui sont toutes de module 1. En particulier, $\rho(F) = 1 < R_u$. Donc $F \in \mathbb{M}_n(u)$.

(d) Cherchons un polynôme Q de degré 3 qui vérifie $Q(1) = U(1)$, $Q(-1) = U(-1)$, $Q(i) = U(i)$ et $Q(-i) = U(-i)$. On pose $Q = \frac{1}{4}(U(1)(X+1) - U(-1)(X-1))(X^2+1) + \frac{i}{4}(U(i)(X+i) - U(-i)(X-i))(X^2-1)$. On a bien $Q(1) = U(1)$, $Q(-1) = U(-1)$, $Q(i) = U(i)$ et $Q(-i) = U(-i)$. En particulier, Q vérifie les conditions de la question (14) pour les valeurs propres de F qui sont incluses dans $\{-1, 1, -i, i\}$. Donc $u(F) = Q(F)$. On obtient bien la formule que l'on souhaite.

26. (a) Etant donné que X suit une loi binomiale de paramètres (N, p), pour tout $k \geqslant N+1$, $u_k = 0$. Donc U est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à N. Si on note $(\lambda_i)_{i \in [\![1,l]\!]}$ les valeurs propres disctinctes de A et $(m_i)_{i \in [\![1,l]\!]}$ leur multiplicité, U vérifie naturellement que pour tout $i \in [\![1, l]\!]$ et pour tout $k \in [\![0, m_i - 1]\!]$, $U^{(k)}(\lambda_i) = U^{(k)}(\lambda_i)$. Donc U vérifie les conditions de la question (14) et

$$u(A) = U(A) = \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} p^i (1-p)^{N-i} A^i = (pA + (1-p)I_n)^N \ .$$

La dernière égalité venant du fait que comme A et I_n commutent, on peut appliquer le binôme de Newton.

(b) Notons pour simplifier, $q := 1 - p$. Pour tout $k \geqslant 1$, $u_k = pq^{k-1}$ et $u_0 = 0$. On a alors (D'Alembert) $\frac{1}{R_u} = \lim\limits_{k \to +\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = q < 1$. Donc $R_u > 1$ et $(u_k)_k$ satisfait la condition C^*. Soit $z \in D_u$. Alors, par série géométrique, on a

$$U(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1} z^k = \frac{pz}{1-qz} \ .$$

Soit $A \in \mathbb{M}_n(u)$ diagonalisable. Il existe alors $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $D = \operatorname{diag}(d_1, ..., d_n)$ tels que $A = PDP^{-1}$. Montrons le résultat pour D. La question (22)(a) nous affirme que $u(D)$ est diagonale et que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $[u(D)]_{i,i} = U([D]_{i,i}) = U(d_i)$. Or $U(d_i) = \frac{pd_i}{1-qd_i}$. Donc

$$u(D) = \operatorname{diag}\left(\frac{pd_1}{1-qd_1}, ..., \frac{pd_n}{1-qd_n}\right) = p \times \operatorname{diag}\left(\frac{1}{1-qd_1}, ..., \frac{1}{1-qd_n}\right) \times \operatorname{diag}(d_1, ..., d_n) = p \times (I_n - qD)^{-1} \times D \ .$$

Le résultat est ainsi obtenu pour D. Par la question (21), on a alors $u(A) = Pu(D)P^{-1}$, donc

$$u(A) = Pu(D)P^{-1} = p \times P(I_n - qD)^{-1}P^{-1} \times PDP^{-1} = p \times (I_n - qA)^{-1} \times A \ ,$$

ce qui conclut.