

X-ENS Physique PSI 2024

PAR NOÉ DANIEL *noe.daniel@ens.psl.eu*

PROPOSITION DE CORRIGÉ

Avertissement. Je ne suis pas professeur, mais simplement un étudiant en physique, les réponses proposées peuvent manquer de précision voire dans le pire des cas être fausses.

1 Mouvement d'une goutte d'eau autour d'une aiguille.

1.1 Champ et potentiel électrostatiques produits par l'aiguille

1. La distribution est invariante par translation le long de l'axe (Oz) et par rotation autour de cet axe. Donc $\|\mathbf{E}\| = f(r)$. Les plans $(Me_r e_z)$ et $(Me_r e_\theta)$ sont des plans de symétrie. Donc on en déduit que $\mathbf{E} = E(r)e_r$.

On applique le théorème de Gauss sur une surface d'un cylindre de rayon r et de hauteur H

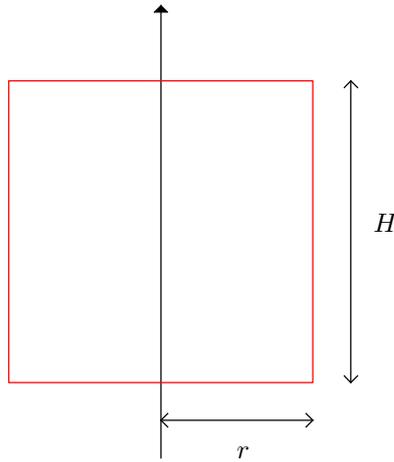


Figure 1. Schéma de la surface dans le plan (c'est une coupe du cylindre) (on le prendre dans le sens trigo)

On obtient :

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \frac{H\lambda}{\varepsilon_0} \\ 2\pi r H E(r) &= \frac{H\lambda}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

Donc on trouve :

$$\boxed{\mathbf{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0} \mathbf{e}_r}$$

2. Le lien entre \mathbf{E} et V est donné par : $\mathbf{E} = -\mathbf{grad}(V)$, on trouve donc que : V ne dépend ni de z , ni de θ et que :

$$\frac{dV}{dr} = -E(r) = \frac{-\lambda}{2\pi r \varepsilon_0}$$

Ce qui donne par intégration :

$$V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r) + \text{cte}$$

1.2 Etude du mouvement de la goutte

3. Selon moi, on ne peut pas tellement réutiliser l'approche d'une force centrale car la charge qui exerce une force sur la goutte n'est pas ponctuelle et les coordonnées sont cylindriques. La meilleure approche me semble être d'utiliser un PFD.

On applique le principe fondamental de la dynamique à la goutte d'eau et on sait que la seule force subie est : $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ qui est selon \mathbf{e}_r . On obtient donc avec la projection sur \mathbf{e}_z :

$$\ddot{z} = 0$$

Puis comme $\dot{z}(0) = 0$ car $\mathbf{v}(0)$ n'a pas de composante sur \mathbf{e}_z et que $z(0) = 0$, une double intégration donne : $z = \text{cte} = z(0) = 0$. Donc le mouvement est plan.

On calcule le moment cinétique par rapport à l'axe (Oz) :

$$\begin{aligned} L_z &= \left[(r \cdot \mathbf{e}_r + z \cdot \mathbf{e}_z) \wedge m \left(r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{r}\mathbf{e}_r + \underset{=0}{\dot{z}}\mathbf{e}_z \right) \right] \cdot \mathbf{e}_z \\ &= mr^2\dot{\theta} \end{aligned}$$

Le moment de \mathbf{F} par rapport à (Oz) étant nul, on a par le TMC en projection sur \mathbf{e}_z :

$$\frac{dL_z}{dt} = 0$$

Donc L_z est constant, on peut égaliser avec l'expression initiale :

$$\begin{aligned} mr_0^2\dot{\theta}(0) &= mr^2\dot{\theta} \\ r_0v_0 &= r^2\dot{\theta} \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{r_0v_0}{r^2}$$

4. L'énergie mécanique de la goutte donne donc :

$$\begin{aligned} E_m &= E_c + E_p \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + qV \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{r_0^2v_0^2}{r^2} - \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0} \ln(r) + \text{cte} \end{aligned}$$

Prenons la constante nulle (définie à une cte près) et alors :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}(r)}$$

Avec : $E_{p,\text{eff}(r)} = \frac{\alpha}{r^2} + \beta \ln(r)$ avec $\alpha = \frac{m(r_0v_0)^2}{2} > 0$ et $\beta = -\frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0} > 0$

5. On obtient une allure de la forme :

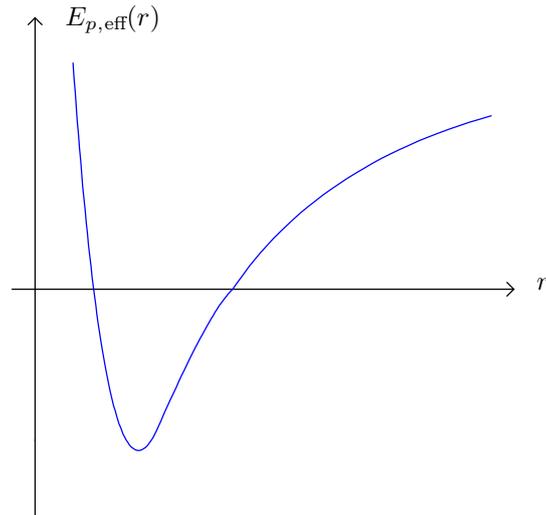


Figure 2. Allure de la fonction énergie potentielle effective

En notant E_{\min} le minimum de cette fonction atteint en r_{\min} , on distingue 3 possibilités :

- Si $E < E_{\min}$: pas de mouvement possible,
- Si $E = E_{\min}$: mouvement circulaire
- Si $E > E_{\min}$: mouvement lié

En conclusion, **il n'y a pas de possibilité d'avoir un état de diffusion.**

6. Mouvement circulaire de rayon r_0 . On applique le PFD à la goutte, cela nous donne en projection radiale :

$$-mr_0\dot{\theta}^2 = q\frac{\lambda}{2\pi r_0\epsilon_0}$$

Mais avec la projection orthoradiale, on trouve que $\dot{\theta}$ est constant et alors :

$$-mv_0^2 = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0}$$

Soit encore :

$$v_0 = \sqrt{-\frac{\lambda q}{2\pi m\epsilon_0}}$$

*Cohérent car $\lambda < 0$. Correspondance avec le minimum de l'énergie $E_{p,eff}$ donc trajectoire **stable**.*

7. Le mouvement n'est plus plan car lorsque l'on projette notre PFD sur \mathbf{e}_z on ne peut plus dire que $\dot{z} = 0$, désormais, $\dot{z} = \dot{z}(0) \neq 0$. La notion de "pas trop grand" s'entend en comparant :

$$\dot{z}(0) \ll v_0$$

Avec le v_0 trouvé en **6**.

Donc il est juste de considérer que r (rayon de la trajectoire) ne varie (quasiment) pas et donc le mouvement est **hélicoïdal**.

En reprenant le TMC avec le moment cinétique pris en O , on obtient après calculs :

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \underbrace{\left(\frac{v_0^2}{r_0^2} - \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 m r_0^2} \right)}_{=\omega_0^2} z = 0$$

Soit une pulsation du mouvement de ω_0 qu'on indentifie.

1.3 Prise en compte des frottements de l'air.

8. Le nombre de Reynolds est un nombre sans dimension qui est le rapport du temps caractéristique de diffusion de la quantité de mouvement (τ_{diff}) sur le temps caractéristique du mécanisme de convection (τ_{conv}) et donc :

$$\text{Re} = \frac{\tau_{\text{diff}}}{\tau_{\text{conv}}}$$

On obtient l'écriture du cours :

$$\text{Re} = \frac{UL}{\nu}$$

Avec U et L la vitesse et la longueur caractéristique de l'écoulement.

Pour l'AN, on identifie avec l'énoncé : $\tau_{\text{conv}} \sim 3\text{s}$ et τ_{diff} se calcule avec les données de l'ordre de 0,1s. Donc on trouve que $\text{Re} \sim 0,01$ et il faut se placer dans le régime de la force de STOKES.

Donc on adopte :

$$\mathbf{F} = -k_1\mathbf{v}$$

9. Mouvement quasi-circulaire, donc en appliquant un PFD à la goutte, on trouve :

$$\begin{aligned} m r \ddot{\theta}^2 &= -k v \quad (\text{orthoradiale}) \\ -m r \dot{\theta}^2 &= \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \quad (\text{radiale}) \end{aligned}$$

La projection radiale donne avec les questions d'avant :

$$\begin{aligned} \dot{\theta}^2 &= \frac{v^2}{r^2} \\ &= \frac{-q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 m} \end{aligned}$$

Avec l'hypothèse faite, on peut prendre $r = \text{cte}$ et donc avoir à nouveau :

$$v = \sqrt{-\frac{\lambda q}{2\pi m \varepsilon_0}}$$

10. La puissance est donnée par $\mathcal{P} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = -k_1 v^2$

Entre t et $t + dt$, on a une variation dr au niveau du rayon de la trajectoire et par le théorème de la puissance mécanique :

$$\begin{aligned} \frac{dE_m}{dt} &= \mathcal{P} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\left[\frac{mv^2}{2} - \frac{\lambda q}{2\pi\varepsilon_0} \ln(r + dr) \right] - \left[\frac{mv^2}{2} - \frac{\lambda q}{2\pi\varepsilon_0} \ln(r) \right] \right) \\ &= -\frac{\lambda q}{2\pi\varepsilon_0} \frac{d \ln(r)}{dr} \frac{dr}{dt} \\ &= \frac{-\lambda q}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} \frac{dr}{dt} \end{aligned}$$

Ce qui donne donc :

$$-k_1 v^2 = -\frac{\lambda q}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} \frac{dr}{dt}$$

Donc :

$$\frac{dr}{dt} = k_1 \frac{v^2}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{k_1}{m} \frac{1}{r}$$

On pose alors $\tau = \frac{m}{k_1}$ pour obtenir le résultat.

11. On obtient par résolution de l'EDL :

$$r(t) = A \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Puis en évaluant en 0, on a :

$$r(t) = r_0 \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

La goutte touche l'aiguille pour $r = R$, ce qui donne un temps de chute t_{chute} :

$$t_{\text{chute}} = \tau \ln\left(\frac{R}{r_0}\right)$$

AN. $t_{\text{chute}} \sim 80s$

12. D'après l'énoncé, un tour semble être réalisé en $3s = \tau_{\text{tour}}$, alors :

$$r(t + \tau_{\text{tour}}) = r_0 e^{-t/\tau} e^{-\tau_{\text{tour}}/\tau}$$

Soit une variation relative :

$$\begin{aligned} \frac{r(t + \tau_{\text{tour}}) - r(t)}{r(t)} &= \frac{r(t + \tau_{\text{tour}})}{r(t)} - 1 \\ &= e^{-\tau_{\text{tour}}/\tau} - 1 \\ &\sim -0.06 \end{aligned}$$

Cela donne du 6%, c'est tout de même non négligeable, mais l'approximation faite reste cohérente.

13. Entre 0 et τ_{tour} , les frottements produisent une force :

$$\|\mathbf{F}_1\| = \frac{2\pi r_0 k_1}{\tau_{\text{tour}}}$$

La goutte est massive, sphérique et a un poids :

$$\|\mathbf{P}\| = \frac{4}{3}\pi R^3 g \rho$$

Soit donc un ordre de grandeur :

$$\frac{\|\mathbf{F}_1\|}{\|\mathbf{P}\|} = \frac{9\pi\eta r_0}{R^2\tau_{\text{tour}}\rho g} \ll 1$$

Le poids est beaucoup trop grand devant les frottements. Pas possible de reproduire l'expérience sur Terre.

2 Motifs de vibration sur une plaque. Figures de Chladni.

2.1 Propagation d'ondes acoustiques dans les solides.

14. Chaque section carrée de surface r_0^2 correspond à une liaison. Donc pour une section droite d'aire dS , on a :

$$\delta N = \frac{dS}{r_0^2}$$

S'il y a un ressort, alors la force exercée par le ressort est $F = k(r - r_0)$ mais ici avec nos δN ressorts, on trouve : $\delta F = \delta N \times k(r - r_0)$, puis avec ce que l'on vient d'écrire :

$$\begin{aligned} \delta F &= \frac{k(r - r_0)}{r_0^2} dS \\ &= \frac{k}{r_0} \frac{(r - r_0)}{r_0} dS \end{aligned}$$

On peut identifier : $\partial_x \xi$ à $\frac{r - r_0}{r_0}$ et donc :

$$E = \frac{k}{r_0}$$

15. ODG : paramètre de maille d'un métal 300 à 500 pm, donc $E \sim 10^{10}$ Pa. Cohérent pour l'aluminium

16. Un solide est en bonne approximation une PII (*phase incompressible et indilatable*) et considérer donc que la largeur de la tranche à l'instant t reste approximativement de longueur dx .

La résultante des forces s'obtient en regardant la somme de celle qui s'exerce à gauche et celle qui s'exerce à droite, soit donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= ES \left(\left[\frac{\partial \xi}{\partial x} \right]_{x+dx,t} - \left[\frac{\partial \xi}{\partial x} \right]_{x,t} \right) \mathbf{e}_x \\ \mathbf{F} &= ES \left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right]_{x,t} dx \mathbf{e}_x \end{aligned}$$

17. On applique le PFD à notre épaisseur de tranche qui est donc de masse $\rho S dx$ et alors en projection, on a :

$$\rho S dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = ES \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx$$

Soit donc :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0$$

Qui est une équation de d'Alembert et on identifie la célérité :

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

On sait que E est homogène à une pression en $ML^{-1}T^{-2}$ et ρ est de dimension $M.L^{-3}$ donc :

$$[c] = \left(\frac{M.L^{-1}T^{-2}}{M.L^{-3}} \right)^{1/2} = L.T^{-1}$$

Donc c'est bien **homogène**.

18. AN $c_{\text{alu}} \sim 16.10^3 m.s^{-1}$

2.2 Vibration d'une plaque en flexion pure.

19. Si on considère une élongation selon l'axe Ox tel que $l \rightarrow l + \delta l = l(1 + \varepsilon)$ d'après l'énoncé. Alors on considère que l'on va sûrement avoir une rétraction sur les direction orthogonales, notons la $l \rightarrow l - \delta l_{\text{ortho}}$.

Le volume devient donc $V = l^3 \rightarrow V + \delta V = l(1 + \varepsilon)(l - \delta l_{\text{ortho}})^2$

Grâce au coefficient de POISSON, on a

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{\delta l_{\text{ortho}}/l}{\delta l/l} \\ \nu &= \frac{\delta l_{\text{ortho}}}{\delta l} \end{aligned}$$

Ce qui nous permet d'avoir :

$$\begin{aligned} V + \delta V &= l(1 + \varepsilon)(l - \nu \delta l)^2 \\ &= l^3(1 + \varepsilon)(1 - \nu \varepsilon)^2 \end{aligned}$$

En faisant le DL, on a :

$$V + \delta V = V(1 + \varepsilon)(1 - 2\nu\varepsilon)$$

Et en ne gardant que l'ordre 1,

$$\begin{aligned} V + \delta V &= V(1 + \varepsilon - 2\nu\varepsilon) \\ &= V + \varepsilon V(1 - 2\nu) \end{aligned}$$

Finalement, il vient :

$$\frac{\delta V}{V} = \varepsilon(1 - 2\nu)$$

Pour un matériau parfaitement incompressible, le terme de gauche est nul donc à $\varepsilon \neq 0$, on a :

$$1 - 2\nu_{\text{incomp}} = 0 \iff \boxed{\nu_{\text{incomp}} = \frac{1}{2}}$$

20. On injecte dans l'équation d'onde une solution en OPPH, ce qui donne :

$$\begin{aligned} D(-i\mathbf{K})^4 + \rho h(i\omega)^2 &= 0 \\ D\mathbf{K}^4 - \rho h\omega^2 &= 0 \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\omega = \mathbf{K}^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$$

Soit donc une vitesse de phase :

$$\begin{aligned} v_\varphi^2 &= \frac{\omega^2}{\mathbf{K}^2} \\ &= \omega \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \end{aligned}$$

Donc la vitesse de phase est :

$$\boxed{v_\varphi = \omega^{1/2} \left(\frac{D}{\rho h} \right)^{1/4}}$$

Le milieu est donc dispersif. **Les ondes se propagent avec atténuation.**

Pour la vitesse de groupe, on a :

$$v_g = \frac{d\omega}{d\mathbf{K}}$$

On différencie la relation de dispersion :

$$\begin{aligned} d\omega &= 2\mathbf{K} d\mathbf{K} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \\ v_g &= 2\mathbf{K} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \\ v_g &= 2v_\varphi \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\boxed{v_\varphi = 2\omega^{1/2} \left(\frac{D}{\rho h} \right)^{1/4}}$$

Or on remarque que $\mathbf{K} \in \mathbb{R} \rightarrow$ donc puisque $\mathbf{K} \notin \mathbb{C}$, pas d'atténuation.

21. Les conditions limites sur les bords s'écrivent donc :

$$\begin{aligned} z(0, y, t) = 0 &\Rightarrow A \cdot \sin(\varphi_x) = 0 \\ z(x, 0, t) = 0 &\Rightarrow A \cdot \sin(\varphi_y) = 0 \\ z(a, y, t) = 0 &\Rightarrow A \cdot \sin(K_x a + \varphi_x) = 0 \\ z(x, a, t) = 0 &\Rightarrow A \cdot \sin(K_y a + \varphi_y) = 0 \end{aligned}$$

Les relations suivantes sont obtenues en remarquant que certaines conditions aux limites sont valables $\forall t$, $\forall y$ ou $\forall x$, ce qui permet d'obtenir des termes non nuls et de forcer l'annulation de certains termes.

On va prendre $A \neq 0$, sinon $z = 0$, alors on en déduit :

$$\begin{aligned} \varphi_x &\equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \\ \varphi_y &\equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \\ K_x a + \varphi_x &\equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \\ K_y a + \varphi_y &\equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \end{aligned}$$

Ce qui donne pas somme des congruences :

$$\begin{aligned} K_x a &\equiv 0 [\pi] \\ K_y a &\equiv 0 [\pi] \end{aligned}$$

Il y a donc quantification et :

$$\boxed{K_x = \frac{\pi m}{a}} \text{ et } \boxed{K_y = \frac{\pi n}{a}}$$

Donc les pulsations propres sont données par :

$$\begin{aligned} \omega_{mn} &= \left(\left[\frac{\pi m}{a} \right]^2 + \left[\frac{\pi n}{a} \right]^2 \right) \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \\ &= \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} (m^2 + n^2) \end{aligned}$$

Puis en injectant l'expression de D :

$$\boxed{\omega_{mn} = \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{E h^2}{12 \rho (1 - \nu^2)}} [m^2 + n^2]}$$

2.3 Comparaison avec les résultats expérimentaux.

22. On sait que dans le cas des ondes stationnaires les noeuds sont séparés d'une distance $\frac{\lambda}{2}$. Et entre noeud et ventre plus proche, on a une distance $\frac{\lambda}{4}$.

Si on prend la 4e figure comme demandé, on trouve une distance entre lignes modales de $\sim 10\text{cm}$ pour $f \sim 1368\text{Hz}$, ce qui nous donne :

$$c \sim 2,5 \cdot 10^2 \text{ m.s}^{-1}$$

Non cohérent avec ce que l'on avait trouvé pour l'aluminium.

23. Si on prend le modèle de la partie précédente, il est attendu d'avoir : $f = hk$, on trouve bien des résultats qui sont ici cohérents. Des éventuels écarts pourraient émerger de la simplicité du modèle. En effet, pourquoi ne pas considérer une géométrie moins régulière qu'un cube ?

24. Sur la figure 6, on voit que les points sont répartis sans aucune tendance autour de la courbe et que cette dernière croise bien les écarts d'incertitude, la régression est donc cohérente.

Sur la figure 6, on a $f(K) = 0,222 K^2$, si on prend le modèle développé avant, on a :

$$\begin{aligned} f(K) &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{D}{\rho h} \right)^{1/2} K^2 \\ f(K) &\simeq 0,25 K^2 \end{aligned}$$

Donc on trouve toutefois un écart.

25. On propose un traitement énergétique.

- $E_{c,bille} = \frac{1}{2}m.v^2 = \frac{1}{2}\rho Vv^2$ avec $V = \frac{4}{3}\pi r_{bille}^3$
- L'air qu'occuperait un tel volume et de plus à une température T aurait une énergie thermique :

$$\mathcal{E}_T = \frac{3}{2} \frac{k_B T}{M N_a} \rho_{air} V \frac{k_B / N_a = R}{\frac{3}{M} \rho_{air} V T}$$

Si l'énergie est fournie à notre bille, alors elle acquiert une vitesse donnée par :

$$v \sim \left(\frac{\rho_{air} R T}{\rho M} \right)^{1/2}$$

Pour s'affranchir des fluctuations thermiques et de l'agitation qui en découle vis à vis de notre mouvement de longueur d'onde λ et de fréquence f , il est souhaitable que :

$$\frac{v}{f} \ll \lambda$$

26. CNTP, on a : $c_{s,air} = 340 m.s^{-1}$. Comme dans le cours, on peut remonter dans un cas plus général (GP...) :

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}}$$

Prenons pour l'air (diatomique) : $\gamma = 7/5$ et le v^2 de Q.25, alors, on a :

$$v^2 \ll c_s^2$$

Ce qui permet en vertu de la Q.25 d'affirmer que l'hypothèse est vérifiée.

3 Ralentissement de la matière et condensat de Bose-Einstein.

3.1 Modèle de l'électron élastiquement lié.

27. Symétrie sphérique... $\rightarrow \mathbf{E} = E(r)\mathbf{e}_r$. On applique le théorème de Gauss sur une sphère de gauss S_G de rayon $r < R$ centrée sur O .

$$\begin{aligned} \iint_{S_G} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ 4\pi r^2 E(r) &= \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Or $\frac{4}{3}\pi R^3 \rho = e$ donc :

$$\begin{aligned} 4\pi r^2 E(r) &= \frac{e}{\epsilon_0} \left(\frac{r}{R} \right)^3 \\ E(r) &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R^3} r \end{aligned}$$

Donc finalement :

$$\mathbf{E}(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R^3} r \mathbf{e}_r$$

La force subie par l'électron est donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -e\mathbf{E} \\ \mathbf{F} &= -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} (r - 0)\mathbf{e}_r \end{aligned}$$

On identifie à la loi de Hooke avec une constante de raideur effective :

$$k = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

28. On suppose l'absence de toute autre force, on applique le PFD à l'électron :

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} \mathbf{r}$$

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3 m} \mathbf{r} = 0$$

Donc on en déduit que $r(t) = A.\cos(\omega_0 t) + B.\sin(\omega_0 t)$ avec :

$$\omega_0 = e \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^3 m}}$$

Et grâce aux conditions initiales :

$$\boxed{r(t) = r_0 \cos(\omega_0 t)}$$

29. On identifie k dans notre écriture de ω_0 et on trouve :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Comme pour un ressort... et en connaissant la masse de l'électron $m \sim 9.10^{-31}$ kg et on sait que dans le visible $f \sim 10^{14}$ Hz, ce qui donne :

$$k \sim \frac{10^{-30}}{10^{28}} N.m^{-1}$$

$$k \sim 10^{-2} N.m^{-1}$$

30. En faisant comme pour un ressort, on a :

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k r^2$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} k r^2$$

$$= \frac{1}{2} m r_0^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2} k r_0^2 \cos^2(\omega_0 t)$$

Or $k = m\omega_0^2$ et $\cos^2 + \sin^2 = 1$ donc :

$$E_m = \frac{1}{2} k r_0^2$$

$$E_m = \frac{1}{2} m \omega_0^2 r_0^2$$

31. Grâce au PFD, on avait : $\ddot{r} = -\omega_0^2 r$ i.e $\ddot{r}^2 = \omega_0^4 r^2$ donc en moyennant :

$$\langle \ddot{r}^2 \rangle = \omega_0^4 \langle r^2 \rangle$$

$$= \left(\frac{2E_m}{m r_0^2} \right)^2 \underbrace{\langle r^2 \rangle}_{=r_0^2}$$

$$= \frac{2E_m^2}{m^2 r_0^2}$$

Puis avec l'expression de l'énoncé, on trouve :

$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{e^2}{3\pi\epsilon_0 c^3} \times \frac{E_m^2}{m^2 r_0^2}}$$

Par le théorème de la puissance mécanique : $\mathcal{P} = \underbrace{-}_{\text{perdue}} \frac{dE_m}{dt}$, ce qui aboutit à l'EDL :

$$\frac{dE_m}{dt} = -\frac{e^2}{3\pi\epsilon_0 c^3} \times \frac{E_m^2}{m^2 r_0^2}$$

32. Avec la durée caractéristique τ_0 :

$$\begin{aligned}\frac{E_m}{\tau_0} &= \left| -\frac{e^2}{3\pi\epsilon_0 c^3} \frac{E_m^2}{m^2 r_0^2} \right| \\ \tau_0 &= \frac{3\pi\epsilon_0 c^3 m^2 r_0^2}{e^2 E_m} \\ \tau_0 &= \frac{3\pi\epsilon_0 c^3 m^2 r_0^2}{e^2} \times \frac{2}{m\omega_0^2 r_0^2} \\ \tau_0 &= \frac{6\pi\epsilon_0 c^3 m}{e^2 \omega_0^2}\end{aligned}$$

Au bout de τ_0 , $E_m \rightarrow 0$, donc l'électron n'est plus excité, d'où le nom de τ_0 .

3.2 Interaction lumière-matière.

33. La partie magnétique de la force de Lorentz est négligeable si on considère que l'électron est **non relativiste**. C'est-à-dire que $v \ll c$. En effet, par la relation de structure :

$$\begin{aligned}\frac{vB}{E} &\sim \frac{v}{w} \\ &\sim \frac{v}{c}\end{aligned}$$

La longueur d'onde associée au laser ($\sim 10^{-7}$ à 10^{-6} m) est bien plus grande que l'échelle de l'atome (1 Angstrom). Donc on peut considérer que \mathbf{E} est constant comme si on restait autour de 0 pour son échelle de variation.

Alors :

$$\mathbf{E} \sim \mathbf{E}_0 \cos(\omega t)$$

34. PFD appliqué à l'électron :

$$\begin{aligned}m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} &= -e\mathbf{E} - \frac{m}{\tau_0} \frac{d\mathbf{r}}{dt} - k\mathbf{r} \\ m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \frac{m}{\tau_0} \frac{d\mathbf{r}}{dt} + k\mathbf{r} &= -e\mathbf{E}\end{aligned}$$

Le système est linéaire et le second membre est cosinusoidal à la pulsation ω , on peut passer en RSF.

$$-\omega^2 m \underline{r} + \frac{m}{\tau_0} (j\omega) \underline{r} + k \underline{r} = -e \underline{E}$$

Ce qui donne :

$$\underline{r} = \frac{-\frac{e}{m} \underline{E}}{\left(\frac{k}{m} - \omega^2 + j \frac{\omega}{\tau_0} \right)}$$

On identifie une pulsation ω_0 telle que $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

On en déduit donc par la suite que :

$$\underline{p} = \frac{e^2}{m} \frac{\underline{E}}{\left(\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega}{\tau_0} \right)}$$

35. Donc on peut obtenir de la formule :

$$\begin{aligned}\epsilon_0 \underline{\alpha} &= \frac{e^2}{m} \frac{1}{\left(\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega}{\tau_0} \right)} \\ \underline{\alpha} &= \frac{e^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\left(\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega}{\tau_0} \right)}\end{aligned}$$

Avec l'hypothèse sur δ , on a : $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$ donc on a $\omega \sim \omega_0$ et $\omega + \omega_0 \sim 2\omega_0$ donc :

$$\begin{aligned} \omega_0^2 - \omega^2 &= (\omega_0 - \omega)(\omega + \omega_0) \\ &\sim 2\delta\omega_0 \end{aligned}$$

Donc on a :

$$\begin{aligned} \underline{\alpha} &\simeq \frac{e^2}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{\left(2\delta\omega_0 + j\frac{\omega_0}{\tau_0}\right)} \\ &= \frac{e^2}{2\omega_0\varepsilon_0 m} \frac{1}{\left(\delta + j\frac{1}{2\tau_0}\right)} \\ &= \frac{e^2}{2\omega_0\varepsilon_0 m} \frac{\delta - j\frac{1}{2\tau_0}}{\delta^2 + \frac{1}{4\tau_0^2}} \end{aligned}$$

On identifie partie réelle et partie imaginaire :

$$\begin{aligned} \alpha' &= -\frac{\alpha_0}{2} \frac{\omega_0\delta}{\delta^2 + \Gamma^2/4} \\ \alpha'' &= \frac{\alpha_0}{2} \frac{\omega_0\Gamma/2}{\delta^2 + \Gamma^2/4} \end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= -\frac{e^2}{\varepsilon_0 m \omega_0^2} \\ \Gamma &= \frac{1}{\tau_0} \end{aligned}$$

36. C'est homogène à un **volume**.

37.

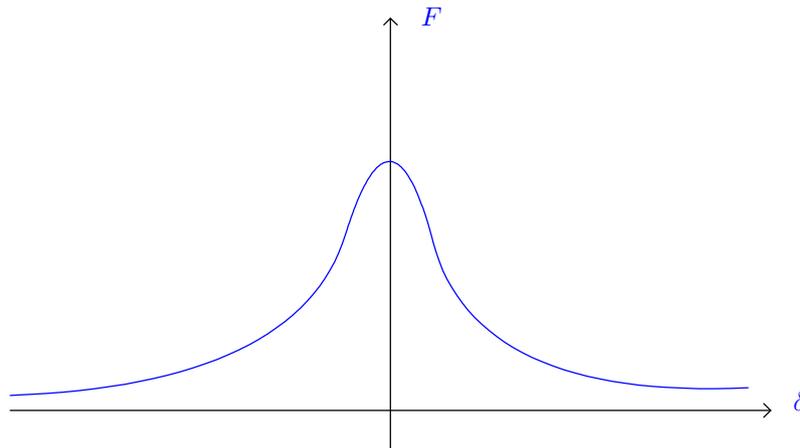


Figure 3. Allure « grossière »

38. Notons que l'on a $F = \frac{F_{\max}}{2}$, lorsque δ est tel que :

$$(\omega - \omega_0)^2 = \frac{1}{4\tau_0^2}$$

Ce qui se résout comme :

$$\omega - \omega_0 = \pm \frac{1}{2\tau_0}$$

Donc on considère :

$$\omega_{\pm} = \omega_0 \pm \frac{1}{2\tau_0}$$

Ce qui nous donne :

$$\Delta\omega = \frac{1}{\tau_0}$$

39. Aux conditions de résonance et $I = I_{\text{sat}}$, on remarque que :

$$\begin{aligned} F_{\text{max}} &= \hbar k \frac{\Gamma}{2} \\ &= \hbar \frac{k}{2\tau_0} \end{aligned}$$

Recomparons encore au poids :

$$\frac{P_{\text{pes}}}{F_{\text{max}}} = \frac{2Mg\tau_0}{\hbar k} \gg 1$$

F négligeable devant la pesanteur.

3.3 Ralentissement des atomes par laser.

40. Par le théorème d'équipartition de l'énergie :

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}k_B T$$

Donc, on en déduit :

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} \\ v &\sim 5 \cdot 10^2 \text{ m.s}^{-1} \end{aligned}$$

41. On obtient facilement que :

$$T' = T + \frac{\text{SR}(t'_2) - \text{SR}(t'_1)}{c}$$

42. Considérons $v \ll c$ (effet Doppler non relativiste). A l'ordre 1 en $t'_2 - t'_1$, écrivons :

$$\text{SR}(t'_2) = \text{SR}(t'_1) + \mathbf{v}(t'_2 - t'_1) \cdot \mathbf{u} + \dots$$

Ce qui donne avec ce qu'on a écrit Q.41 :

$$\begin{aligned} T' &= T + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{c} (t'_2 - t'_1) \\ T' &= T + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{c} T' \end{aligned}$$

Ce qui donne finalement :

$$\boxed{T = T' \left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{c} \right)}$$

Et en passant aux pulsations :

$$\boxed{\omega' = \omega \left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{c} \right)}$$

43. Si les atomes se dirigent en direction du laser, alors ils vont être ralentis. On a raisonné en moyenne. Les atomes n'ont pas tous la même vitesse, donc ce processus ne marche pas forcément pour tous les atomes vis à vis de l'immobilisation.

FIN DU CORRIGÉ