
Banque PT 2025 : physique A

Proposition de corrigé

clementpicard69000@gmail.com

I. Isolation thermique d'un toit

I.1. Cas d'une atmosphère sèche

1. $\vec{j} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T)$

Le transfert thermique s'effectue des températures les plus chaudes vers les plus froides. Or le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}T$ est dirigé des températures les plus froides vers les plus chaudes. Ce qui explique la présence du signe "-".

2. On applique le premier principe sur un volume élémentaire $d\tau$ de section S , compris entre les abscisses x et $x + dx$, donc $d\tau = Sdx$, pour une transformation entre une date t et $t + dt$:

$$U(t + dt) - U(t) = \Phi_{\text{entrant}}dt - \Phi_{\text{sortant}}dt$$

$$\rho d\tau c [T(t + dt) - T(t)] = j(x, t)Sdt - j(x + dx)Sdt$$

$$\rho S dx c \frac{\partial T}{\partial t} dt = -\frac{\partial j}{\partial x} S dx dt$$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x}$$

Or, à une dimension, la loi de Fourier se réécrit $\vec{j} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}T = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \vec{e}_x$, donc :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

3. On note $T(x = 0) = T_0$ et $T(x = d) = T_d$. On définit la résistance thermique R_{th} par :

$$R_{th} = \frac{|T_0 - T_d|}{\Phi}$$

En régime stationnaire, $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, donc l'équation précédente devient

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

$$T(x) = Ax + B$$

On exprime A et B en fonction de ces conditions aux limites :

$$T(x = 0) = A \times 0 + B \Rightarrow B = T_0$$

$$T(x = d) = Ad + T_0 \Rightarrow A = \frac{T_d - T_0}{d}$$

$$T(x) = \frac{T_d - T_0}{d} x + T_0$$

On calcule alors le flux Φ :

$$\Phi = jS$$

$$\Phi = -\lambda S \frac{dT}{dx}$$

$$\Phi = -\lambda S \frac{T_d - T_0}{d}$$

$$\Phi = \lambda S \frac{T_0 - T_d}{d}$$

On en déduit directement que $R_{th} = \frac{d}{\lambda S}$

4. $R_{th} = 10R_{th,toit}$

5.

$$R_{th} = \frac{d}{\lambda S}$$

$$d = 10R_{th,toit}\lambda S$$

Les applications numériques donnent :

$$d_l = 10 \times 1,0 \times 10^{-2} \times 3,2 \times 10^{-2} \times 100 = 3,2 \times 10^{-1} \text{ m}$$

$$d_o = 10 \times 1,0 \times 10^{-2} \times 4,0 \times 10^{-2} \times 100 = 4,0 \times 10^{-1} \text{ m}$$

6. $T(x=0, t)$ est maximale pour $\cos(\omega t) = 1$ et minimale pour $\cos(\omega t) = -1$. On en déduit alors que :

$$T_0 + T_1 = 37 \text{ et } T_0 - T_1 = 13$$

$$\Rightarrow T_0 = 25^\circ \text{ et } T_1 = 12^\circ$$

De plus, la fonction $\cos(\omega t)$ doit avoir une période $T = 24 \text{ h}$, ainsi :

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega = \frac{\pi}{12} \text{ rad.h}^{-1}$$

7. On remplace l'expression donnée de $T(x, t)$ dans l'équation de diffusion de la question 2 :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\rho c i \omega \underline{f}(x) e^{i\omega t} = \lambda \frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial x^2} e^{i\omega t}$$

$$i\omega \rho c \underline{f}(x) = \lambda \frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial x^2}$$

8. On remplace l'expression donnée de $\underline{f}(x)$ dans l'équation précédente :

$$i\omega\rho c \underline{f}(x) = \lambda \frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial x^2}$$

$$i\omega\rho c [\underline{A}e^{(1+i)x/\delta} + \underline{B}e^{-(1+i)x/\delta}] = \lambda \frac{(1+i)^2}{\delta^2} [\underline{A}e^{(1+i)x/\delta} + \underline{B}e^{-(1+i)x/\delta}]$$

$$i\omega\rho c = \lambda \frac{2i}{\delta^2}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2\lambda}{\omega\rho c}}$$

9. On garde seulement la propagation dans le sens des x croissants, donc $\underline{f}(x) = \underline{B}e^{-(1+i)x/\delta}$, donc :

$$\underline{T}(x, t) = T_0 + \underline{B}e^{-(1+i)x/\delta} e^{i\omega t}$$

$$\underline{T}(x, t) = T_0 + \underline{B}e^{-x/\delta} e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta})}$$

On repasse en réel :

$$T(x, t) = T_0 + \underline{B}e^{-x/\delta} \cos(\omega t - \frac{x}{\delta})$$

On trouve la constante $\underline{B}$ avec la condition $T(x = 0, t) = T_0 + T_1 \cos(\omega t)$:

$$T_0 + \underline{B}e^{-0/\delta} \cos(\omega t - \frac{0}{\delta}) = T_0 + T_1 \cos(\omega t)$$

$$\underline{B} = T_1$$

On en déduit que :

$$T(x, t) = T_0 + T_1 e^{-x/\delta} \cos(\omega(t - \frac{x}{\delta}))$$

$$T(d, t) = T_0 + T_1 e^{-d/\delta} \cos(\omega(t - \frac{d}{\delta}))$$

On identifie, en $x = d$, directement $\tau = \frac{d}{\delta\omega} = \frac{d}{\omega} \sqrt{\frac{\omega\rho c}{2\lambda}} = \sqrt{\frac{\rho c d^2}{2\omega\lambda}}$

10. Pour que $T(x = 0; t)$ et $T(x = d, t)$ soient en opposition de phase, il faut que $\omega\tau = \pi$:

$$\frac{\pi}{12} \tau = \pi$$

$$\tau = 12 \text{ h}$$

C'est donc la ouate de cellulose qui est la plus confortable d'un point de vue thermique.

II. De la cellule photovoltaïque au panneau solaire

11. Il faut autant de charges positives que de charges négatives pour assurer la neutralité électrique. En notant S la jonction l'aire de la jonction dans le plan (O ; y ; z), on a :

$$Q_+ = -Q_-$$

$$\rho_1 e_1 S = -\rho_2 e_2 S$$

$$\rho_1 e_1 = -\rho_2 e_2$$

12. Maxwell-Gauss : $\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

$$\iiint \text{div}(\vec{E}) d\tau = \iiint \frac{\rho}{\epsilon_0} d\tau$$

Or, d'après le théorème de Green-Ostrgradsky : $\iiint \text{div}(\vec{E}) d\tau = \iint \vec{E} \cdot \vec{dS}$, donc :

$$\iint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho d\tau$$

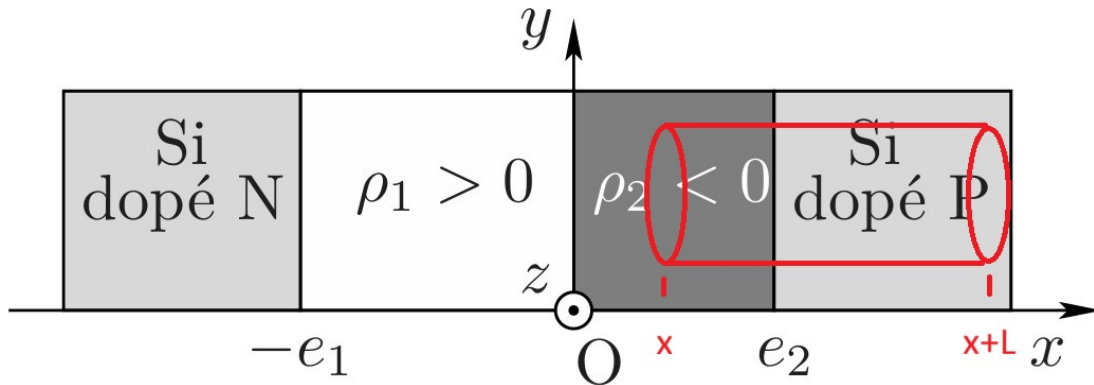
$$\Phi = \iint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

13. Les couches étant illimitées selon Oy et Oz, la distribution de charges est invariante par translation selon les axes (Oy) et (Oz). Donc le champ électrique ne dépend pas des variables y et z .

Soit un point M quelconque de l'espace. Les couches étant illimitées selon Oy et Oz, les plans $(M; \vec{e}_x; \vec{e}_y)$ et $(M; \vec{e}_x; \vec{e}_z)$ sont des plans de symétrie de la distribution de charges. Comme le champ électrique est contenu dans ces plans, il est dirigé selon $\vec{e}_x$.

On en conclut que $\vec{E} = E(x)\vec{e}_x$

14. Calculons le champ dans la zone $x \in [0; e_2]$. On choisit comme surface de Gauss le cylindre de sections S et de longueur L suivant :



On calcule les flux à travers les surfaces : le flux à travers la surface latérale est nulle car le champ est tangent à la surface, et le flux à travers le cercle en $x + L$ est nul car le champ est nul en ce point.

Ainsi $\Phi = \iint \vec{E} \cdot \vec{dS} = -E(x)S$ (on sort le champ de l'intégrale car il est constant sur le cercle situé en x).

D'après le théorème de Gauss : $\Phi = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$

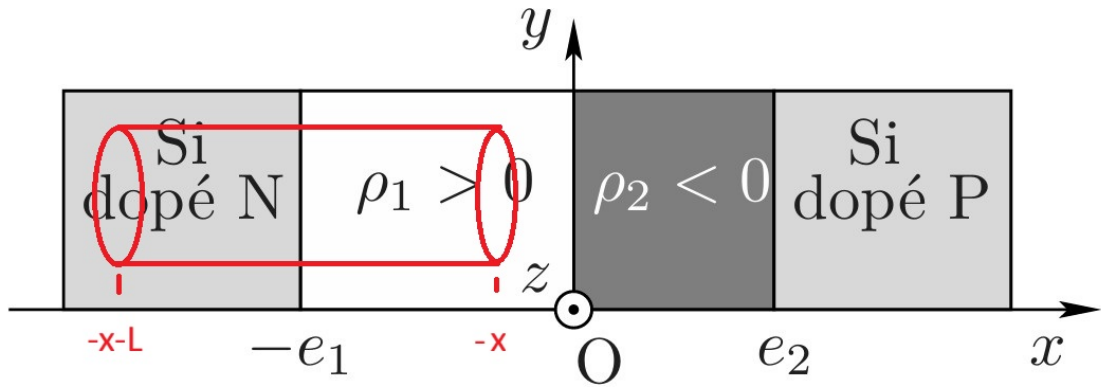
$$-E(x)S = \frac{\rho_2(e_2-x)S}{\epsilon_0}$$

$$E(x) = -\frac{\rho_2(e_2-x)}{\epsilon_0}$$

$$E(x) = \frac{\rho_1 e_1 (e_2 - x)}{e_2 \epsilon_0} \text{ avec la question 11.}$$

Calculons le champ dans la zone $x \in [-e_1; 0]$. On choisit comme surface de Gauss le cylindre de sections S et de longueur L suivant :

On calcule les flux à travers les surfaces : le flux à travers la surface latérale est nulle car le champ est tangent à la surface, et le flux à travers le cercle en $-x - L$ est nul car le champ est nul en ce point.



Ainsi $\Phi = \iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(-x)S$ (on sort le champ de l'intégrale car il est constant sur le cercle situé en $-x$).

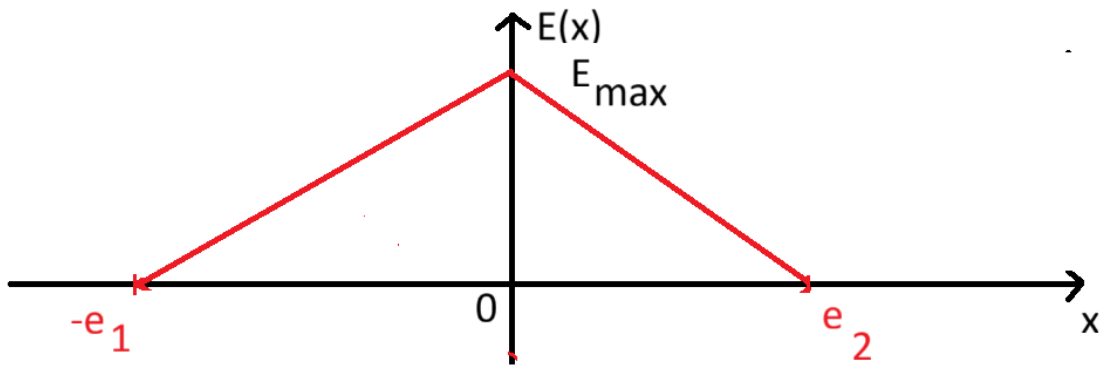
D'après le théorème de Gauss : $\Phi = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$

$$E(-x)S = \frac{\rho_1(e_1 - x)L}{\epsilon_0}$$

$$E(-x) = \frac{\rho_1(e_1 - x)}{\epsilon_0}$$

$$E(x) = \frac{\rho_1(e_1 + x)}{\epsilon_0}$$

15. En notant $E_{max} = E(0) = \frac{\rho_1 e_1}{\epsilon_0}$



16. Le champ électrique est dirigé selon $+\vec{e}_x$, donc la force électrique exercée sur les électrons $\vec{F} = q\vec{E}$ est dirigée selon $-\vec{e}_x$ car les électrons sont de charge négative.

Ainsi, cette force s'oppose au mouvement de diffusion de N vers P, elle stoppe donc la diffusion des électrons.

17. On sait que $P = UI$, donc $I = \frac{P}{U}$. Pour les courbes iso-puissance, P est une constante, donc les courbes iso-puissance sont des hyperboles.

18. En analysant les caractéristiques courant tension du panneau, on voit que pour des faibles tensions U , elles coupent des courbes iso puissance de plus en plus forte valeur de puissance, puis à

partir du moment où la caractéristique chute, elles coupent des courbes iso puissance de plus en plus faible valeur de puissance.

Ainsi, la puissance électrique fournie par le panneau passe bien par un maximum.

Pour une irradiance de 1 kW.m^{-2} , on a $P = 85 \text{ W}$ et $R^* = \frac{U^2}{P} = \frac{18^2}{85} = \frac{18 \times 18}{5 \times 17} \simeq 4\Omega$

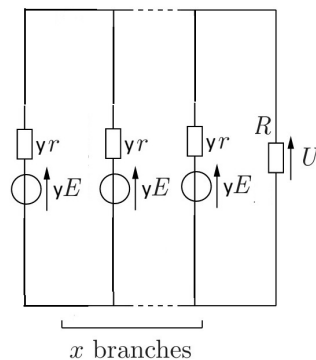
19. On définit le rendement η comme le quotient entre la puissance fournie par le panneau P_f sur la puissance recue P_r .

Dans le cadre de la question 18, $P_f = 85 \text{ W}$.

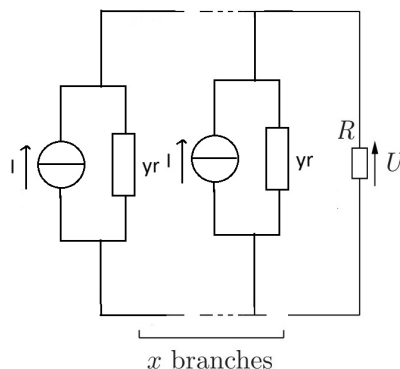
L'irradiance F étant la puissance surfacique recue par le panneau : $P_r = F \times N \times c^2 = 1 \times 10^3 \times 36 \times (\frac{1}{8})^2 = \frac{36000}{64} \text{ W}$

Ainsi : $\eta = \frac{P_f}{P_r} = \frac{85 \times 64}{36 \times 10^3} = 72 \times 10^{-3} = 7,2 \%$.

20. On associe dans chaque branche les résistances en série de chaque branche pour obtenir le circuit équivalent suivant :



Pour pouvoir associer les x branches en parallèles on passe en équivalent Norton. Le générateur d'intensité équivalent a une intensité $I = \frac{yE}{yr} = \frac{E}{r}$.

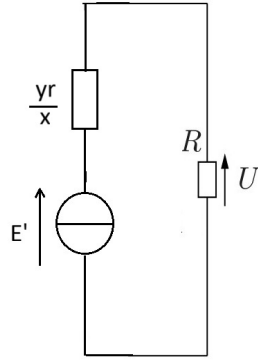
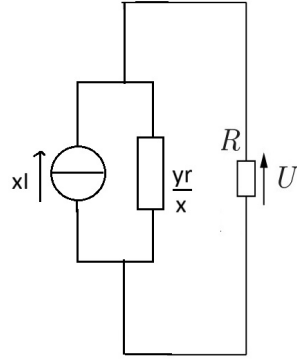


On associe les générateurs et les résistances. Pour les résistances, comme elles sont en parallèles, on a $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{yr} + \dots + \frac{1}{yr} = \frac{x}{yr}$, donc $R_{eq} = \frac{yr}{x}$:

On repasse en équivalent Thévenin. Le générateur de tension équivalent a pour tension $E' = \frac{yr}{x} x I = yE$, donc :

On applique alors un diviseur de tension :

$$U = \frac{R}{\frac{yr}{x} + R} E'$$



$$U = \frac{yR}{\frac{yR}{x} + R} E$$

$$U = \frac{xyR}{yR + xR} E \text{ Or } y = \frac{N}{x}$$

$$U = \frac{NR}{\frac{N}{x}R + xR} E$$

$$U = \frac{xNR}{Nr + x^2R} E$$

21 . $P = \frac{U^2}{R}$, donc

$$P = \frac{x^2 N^2 R}{(Nr + x^2 R)^2} E^2$$

On dérive P par rapport à x , on obtient :

$$\frac{dP}{dx} = N^2 R E^2 \frac{2x(Nr + x^2 R)^2 - x^2 \times 2 \times 2xR(Nr + x^2 R)}{(Nr + x^2 R)^4}$$

$$\frac{dP}{dx} = N^2 R E^2 \frac{2x(Nr + x^2 R) - 4x^3 R}{(Nr + x^2 R)^3}$$

$$\frac{dP}{dx} = 2x N^2 R E^2 \frac{Nr + x^2 R - 2x^2 R}{(Nr + x^2 R)^3}$$

$$\frac{dP}{dx} = 2x N^2 R E^2 \frac{Nr - x^2 R}{(Nr + x^2 R)^3}$$

La puissance est maximale si sa dérivée est nulle :

$$Nr - x^2 R = 0$$

$$x = \sqrt{\frac{Nr}{R}} \text{ et } y = \frac{N}{x} = \sqrt{\frac{NR}{r}}$$

22. Avec la question 21 : $P_{max} = \frac{x^2 N^2 R}{(Nr + x^2 R)^2} E^2$

$$P_{max} = \frac{\frac{Nr}{R} N^2 R}{(Nr + \frac{Nr}{R})^2} E^2$$

$$P_{max} = \frac{N^3 r}{4N^2 r^2} E^2$$

$$P_{max} = \frac{N}{4r} E^2$$

A l'aide d'une loi des mailles, en notant U_r la tension aux bornes d'une résistance r , en convention récepteur, on a :

$$-yU_r + yE = U$$

$$-yU_r = U - yE$$

$$-yU_r = \frac{xNR}{Nr + x^2 R} E - yE$$

$$-yU_r = \frac{xNR - yNr - yx^2 R}{Nr + x^2 R} E$$

$$-yU_r = \frac{\sqrt{\frac{Nr}{R}} NR - yNr - N\sqrt{\frac{Nr}{R}} R}{Nr + \frac{Nr}{R} R} E$$

$$-yU_r = \frac{-yNr}{2Nr} E$$

$$U_r = \frac{E}{2}$$

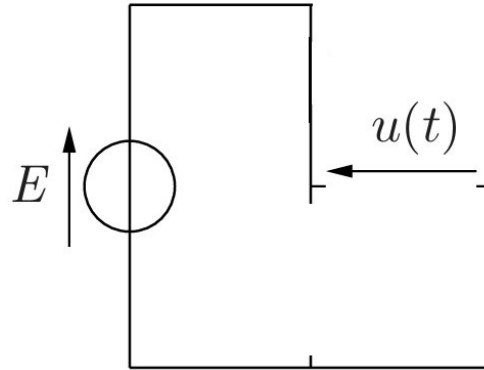
Donc la puissance dissipée par effet Joule par une résistance r est $\frac{U_r^2}{r} = \frac{E^2}{4r}$, ainsi :

$$P_J = \frac{NE^2}{4r}$$

La puissance dissipée par effet Joule par l'ensemble des résistances r est égale à celle fournie à la résistance R .

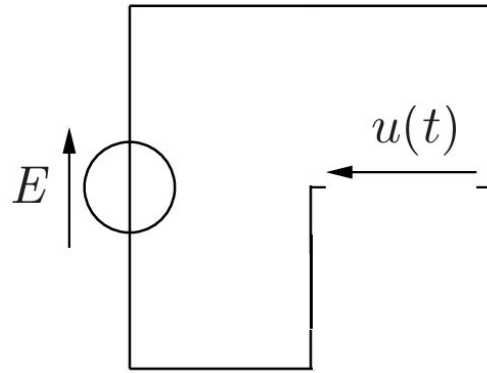
III. Conversion continu-alternatif : nécessité d'un onduleur

23. Pour $0 < t < \frac{T}{2}$, le circuit électrique est le suivant :

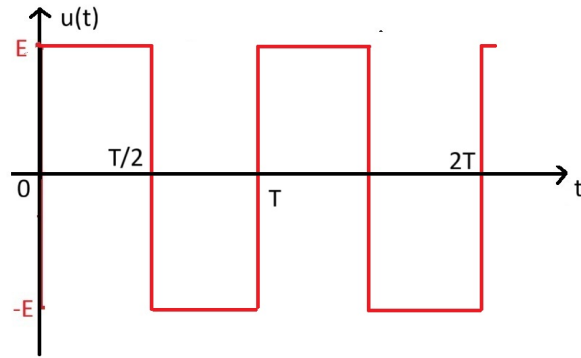


Donc, pour $0 < t < \frac{T}{2}$, $u(t) = E$.

Pour $\frac{T}{2} < t < T$, le circuit électrique est le suivant :



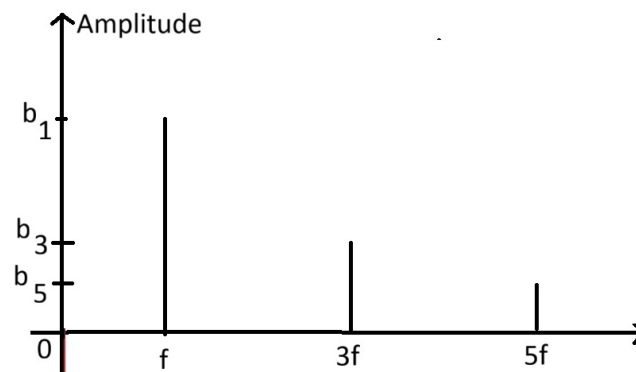
Donc, pour $\frac{T}{2} < t < T$, $u(t) = -E$. On obtient alors le graphe suivant :



24. On calcule alors b_n pour n allant de 0 à 5 :

$$b_0 = 0; b_1 = \frac{4E}{\pi}; b_2 = 0; b_3 = \frac{4E}{3\pi}; b_4 = 0; b_5 = \frac{4E}{5\pi}$$

On obtient alors le spectre suivant :



25.

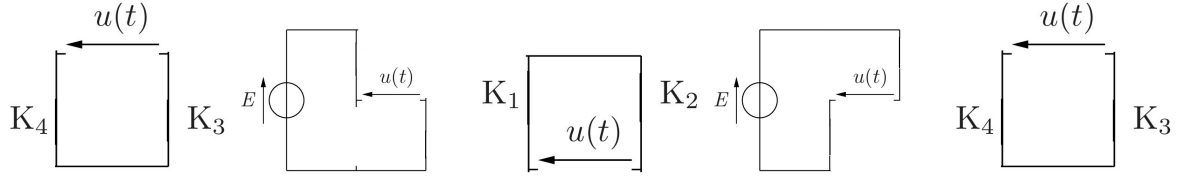
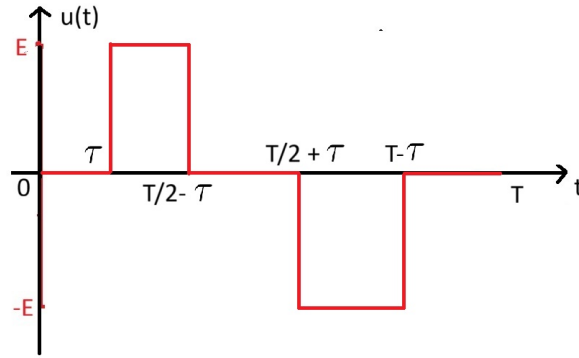


FIGURE 1 – Circuit équivalent dans les états respectifs $]0; \tau[$, $]\tau; T/2 - \tau[$, $]\tau/2 - \tau; T/2 + \tau[$, $]\tau/2 + \tau; T - \tau[$, $]\tau - \tau; T[$.

On obtient la figure suivante :



26. On a $U_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$ et $U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}$. On a donc :

$$U_0 = \frac{1}{T} \int_{\tau}^{T/2-\tau} E dt + \frac{1}{T} \int_{T/2+\tau}^{T-\tau} (-E) dt$$

$$U_0 = \frac{E(T/2-\tau-\tau)}{T} - \frac{E(T-\tau-T/2-\tau)}{T}$$

$$U_0 = \frac{E(T/2-2\tau-T/2+2\tau)}{T}$$

$$U_0 = 0$$

Pour la valeur efficace :

$$U_{eff}^2 = \frac{1}{T} \int_{\tau}^{T/2-\tau} E^2 dt + \frac{1}{T} \int_{T/2+\tau}^{T-\tau} (-E)^2 dt$$

$$U_{eff}^2 = \frac{E^2(T/2-\tau-\tau)}{T} + \frac{E^2(T-\tau-T/2-\tau)}{T}$$

$$U_{eff}^2 = \frac{E^2(T-4\tau)}{T}$$

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{T-4\tau}{T}} E$$

28. La composante $n = 1$ est le fondamental, et $b_2 = 0$. On cherche alors τ tel que $b_3 = 0$:

$$\frac{4E}{3\pi} \cos(6\pi f\tau) = 0$$

$$\cos(6\pi f\tau) = 0$$

$6\pi f\tau = \frac{\pi}{2}$ (on cherche la plus petite valeur de τ possible)

$$\tau = \frac{1}{12f}$$

29. La tension aux bornes de la résistance étant proportionnelle à l'intensité, on récupère directement l'intensité, contrairement à la tension aux bornes de l'inductance proportionnelle à $\frac{di}{dt}$

30. En notant u_L la tension aux bornes de l'inductance, on a : $\underline{u} = \underline{v} + \underline{u_L}$

$$\underline{u} = \underline{v} + jL\omega i$$

$$\underline{u} = \underline{v} + jL\omega \frac{v}{R}$$

$$\underline{u} = (1 + \frac{jL\omega}{R})\underline{v}$$

$$\frac{\underline{v}}{\underline{u}} = \frac{1}{1 + \frac{jL\omega}{R}}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{jL\omega}{R}}$$

On reconnaît la forme canonique d'un passe bas $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_c}}$, on identifie $\omega_c = \frac{R}{L}$ donc :

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{R}{2\pi L}$$

31. On a un filtre passe-bas.

Si L est trop petite, la fréquence de coupure sera trop haute et donc le filtre ne permettra pas de couper toutes les harmoniques restantes.

Si L est trop grande, la fréquence de coupure sera trop faible et donc le filtre coupera aussi la fréquence fondamentale que l'on souhaite garder.

32. Exprimons le gain en décible G_{dB} de ce filtre :

$$G_{dB} = 20\log(|\underline{H}|)$$

$$G_{dB} = 20\log(\frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\omega}{\omega_c})^2}})$$

$$G_{dB} = -10\log(1 + (\frac{\omega}{\omega_c})^2)$$

On calcule alors le gain en dB pour la composante fondamentale $\omega = \omega_c$ et pour la première harmonique non nulle $\omega = 5\omega_c$, car la valeur de τ choisie supprime déjà l'harmonique $3\omega_c$ (question 28) :

$$G_{dB}(\omega_c) = -10\log(1 + (1)^2) = -10\log(2) \simeq -3dB$$

$$G_{dB}(5\omega_c) = -10\log(1 + (5)^2) = -10\log(26) \simeq -14,1dB$$

Le cahier des charges est donc respecté.

On détermine L avec la fréquence de coupure égal à celle du signal :

$$f_c = \frac{R}{2\pi L}$$

$$L = \frac{R}{2\pi f_c}$$

$$L = \frac{100}{2\pi \times 50} = \frac{1}{\pi}$$

33. Le filtre ici est d'ordre 1. Pour atténuer davantage les harmoniques, on pourrait utiliser un filtre passe-bas d'ordre 2.

IV. Régulation du niveau d'un bassin

34. Il y a rétroaction entre la borne + et la sortie de l'ALI, l'ALI fonctionne donc en régime saturé.

35. On applique la loi des noeuds en terme de potentiel, sachant que l'ALI étant idéal de gain infini, $I^+ = 0$:

$$\frac{E - V^+}{R(1-x)} = \frac{V^+ - u_s}{Rx}$$

$$\frac{V^+}{x} + \frac{V^+}{1-x} = \frac{E}{1-x} + \frac{u_s}{x}$$

$$\frac{(1-x)V^+ + xV^+}{x(1-x)} = \frac{x E + (1-x)u_s}{x(1-x)}$$

$$V^+ = xE + (1-x)u_s$$

36. Il faut comparer V^+ et $V^- = u_{cn}$.

On aura $u_s = +V_{sat}$ tant que $V^+ > V^-$, donc tant que :

$$xE + (1-x)u_s > u_{cn}$$

$$u_{cn} < xE + (1-x)V_{sat}$$

On aura $u_s = -V_{sat}$ tant que $V^+ < V^-$, donc tant que :

$$xE + (1-x)u_s < u_{cn}$$

$$u_{cn} > xE - (1-x)V_{sat}$$

37. u_{cn} est proportionnel à la hauteur du bassin. De plus, $h \in [h_{min}; h_{max}]$.

Tant que u_{cn} , donc h , est plus grand qu'une certaine valeur, $u_s = -V_{sat}$ et donc la pompe est à l'arrêt et le bassin n'est plus rempli.

Tant que u_{cn} , donc h , est plus faible qu'une certaine valeur, $u_s = +V_{sat}$ et donc la pompe est en marche et le bassin se remplit, h augmente, jusqu'à ce que u_{cn} dépasse la valeur $xE + (1-x)V_{sat}$, et donc que u_s devienne égal à $-V_{sat}$ et la pompe s'arrête.

38. Comme $u_{cn} = \alpha h$, alors u_{cn} doit être égal à αh_{min} quand il y a bascule pour lancer la pompe, donc $xE - (1-x)V_{sat} = \alpha h_{min}$.

De plus, $h \leq h_{max}$, donc $u_{cn} \leq \alpha h_{max}$. Pour qu'il y ait bascule, il faut que $u_{cn} = \alpha h_{max}$ à la bascule donc $xE + (1-x)V_{sat} = \alpha h_{max}$

Le système est donc :

$$\begin{cases} xE - (1-x)V_{sat} = \alpha h_{min} \\ xE + (1-x)V_{sat} = \alpha h_{max} \end{cases}$$

39.

$$\begin{aligned} \begin{cases} xE - (1-x)V_{sat} = \alpha h_{min} \\ xE + (1-x)V_{sat} = \alpha h_{max} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} xE - (1-x)V_{sat} = \alpha h_{min} \\ 2(1-x)V_{sat} = \alpha(h_{max} - h_{min}) \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} xE - (1-x)V_{sat} = \alpha h_{min} \\ (1-x)V_{sat} = \frac{\alpha(h_{max}-h_{min})}{2} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} xE - (1-x)V_{sat} = \alpha h_{min} \\ x = \frac{2V_{sat}-\alpha(h_{max}-h_{min})}{2V_{sat}} \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} xE - \frac{\alpha(h_{max}-h_{min})}{2} = \alpha h_{min} \\ x = \frac{2V_{sat}-\alpha(h_{max}-h_{min})}{2V_{sat}} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} xE = \frac{\alpha(h_{min}+h_{max})}{2} \\ x = \frac{2V_{sat}-\alpha(h_{max}-h_{min})}{2V_{sat}} \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} E = \frac{\alpha(h_{min}+h_{max})}{2V_{sat}-\alpha(h_{max}-h_{min})} V_{sat} \\ x = \frac{2V_{sat}-\alpha(h_{max}-h_{min})}{2V_{sat}} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} E = \frac{5 \times 1,40}{20-5 \times 0,60} \times 10 = \frac{70}{17} V \\ x = \frac{20-5 \times 0,60}{20} = \frac{17}{20} \end{cases} \end{aligned}$$

40. On applique la relation de Bernoulli sur l'eau entre un point de hauteur $-z_e$ et un point à la sortie de la pompe de hauteur z_s , les deux points étant au à la pression atmosphérique P_0 . On note e_m l'énergie mécanique massique nécessaire pour pomper l'eau du point z_e au point z_s :

$$e_m = \frac{P_m}{D_v} = (P_0 + \frac{1}{2}\rho v_s^2 + \rho g z_s) - (P_0 + \frac{1}{2}\rho v_e^2 + \rho g z_e)$$

Avec P_m la puissance mécanique de la pompe. Par conservation du débit volumique entre z_e et z_s : $v_e S_e = v_s S_s \Rightarrow v_e = v_s$ car la section du tuyau reste constante.

$$P_m = D_v \rho g (z_s - z_e)$$

Or le rendement s'exprime $r = \frac{P_m}{P_e}$ donc :

$$P_e = \frac{D_v \rho g (z_s - z_e)}{r}$$

41. $Re = \frac{\rho L v}{\eta}$. Il permet de comparer les effets de viscosité aux effets laminaires.

On a $v = \frac{D_v}{S} = \frac{2 \times 10^{-3}}{\pi \times (2 \times 10^{-2})^2} \simeq \frac{10}{6} \text{ m.s}^{-1}$

$$Re = \frac{\rho L v}{\eta} = \frac{10^3 \times 20 \times \frac{10}{6}}{10^{-3}} = 3 \times 10^7$$

42. Sur la courbe de rugosité relative de 5×10^{-4} , au point d'abscisse $Re = 3 \times 10^7$, on lit en ordonnée $\xi = 0,017$

43. Pour compenser la perte de charge, il faut une puissance mécanique supplémentaire égale à $D_v \Delta P_c$, soit en tenant compte du rendement, une puissance électrique supplémentaire $\frac{D_v \Delta P_c}{r}$

On en déduit que $P'_e = P_e + \frac{D_v \Delta P_c}{r}$

$$P'_e = 186 + \frac{2 \times 10^{-3} \times 1,4 \times 10^4}{3/4} = 186 + \frac{28 \times 4}{3} = 222 \text{ W}$$

44. Comme à la question 18, on lit la puissance maximale d'un panneau solaire pour une irradiance de $0,6 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-2}$, on lit $P_{max} \simeq 48 \text{ W}$

Ainsi il faut $\frac{222}{48} \simeq 5$ panneau solaires.

V. Horloge à eau

45. L'eau ayant une répartition de masse uniforme, le centre de gravité se trouve au centre du volume d'eau donc $z_e = -b + \frac{h}{2}$

46. Par projection sur l'axe (Oz), en penchant le tube, l'altitude z_G devient $z_G \cos(\theta)$ et z_e devient $z_e \cos(\theta)$, donc :

$$E_p(\theta) = mgz_G \cos(\theta) + m_e g z_e \cos(\theta)$$

$$E_p(\theta) = [m_e(\frac{h}{2} - b) - ma]g \cos(\theta)$$

$$E_p(\theta) = [\rho h S(\frac{h}{2} - b) - ma]g \cos(\theta)$$

$$E_p(\theta) = X g \cos(\theta)$$

En posant $X = \rho h S(\frac{h}{2} - b) - ma$

47. Les points d'équilibre sont tels que $\frac{dE_p}{d\theta} = 0$

Or $\frac{dE_p}{d\theta} = -X g \sin(\theta)$ donc $\theta = 0$ est bien une position d'équilibre.

Pour analyser la stabilité, on dérive une seconde fois E_p et on évalue cette dérivée seconde en $\theta = 0$:

$$\frac{d^2 E_p}{d\theta^2} = -X g \cos(\theta)$$

$$\frac{d^2 E_p}{d\theta^2} |_{\theta=0} = -X g$$

Ainsi, la position d'équilibre est stable si $X < 0$ et instable si $X > 0$.

La hauteur critique est la hauteur pour laquelle le système passe de stable à instable, donc pour $X = 0$:

$$\rho h S(\frac{h}{2} - b) - ma = 0$$

$$\frac{\rho h^2 S}{2} - \rho b h S - ma = 0$$

$$h^2 - 2bh - \frac{2ma}{\rho S} = 0$$

48. On a une équation du second degré : $\Delta = 4b^2 + 8\frac{ma}{\rho S} > 0$

On a 2 solutions possibles, on ne garde que la solution positive car h_c est une hauteur :

$$h_c = \frac{2b + \sqrt{\Delta}}{2}$$

La vidange se faisant brusquement, on néglige le temps de vidange. Ainsi, la période T sera assimilé au temps de remplissage jusqu'à la hauteur h_c .

Le débit volumique D_v étant le volume par unité de temps, on a :

$$T = \frac{Sh_c}{D_v}$$

49. Avec la question 48, on observe que h_c croît avec la masse du tube.

Si la masse du tube est trop grande, il se peut que h_c dépasse la hauteur du tube, et donc que l'eau déborde du tube avant d'atteindre la hauteur critique, donc le tube ne basculera jamais.

Ainsi pour que le tube bascule, il faut $h_c < H$.

FIN DU CORRIGÉ