Éléments de correction : CCP MP Maths 1 2025

Thomas Chen – Site personnel cliquable

6 mai 2025

Ne pas hésiter à signaler ce que vous pensez être une erreur.

Exercice 1

1. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$, f' est continue sur $]-1,1[$ donc l'image de $]-1,1[$ par f' hérite du caractère connexe par arcs de l'intervalle $]-1,1[$. On a bien $f'(]-1,1[)$ qui est connexe par arcs.
2. (a) Soit $t \in]-1,1[$. Si $t \leq 0$, alors $f(t) - f(0) = (0,0)$. Sinon,

$$\frac{f(t)-f(0)}{t} = \left(t\sin\left(\frac{1}{t}\right), t\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right)$$

et puisque cos et sin sont bornées,

$$\left(t\sin\left(\frac{1}{t}\right), t\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} (0,0).$$

Ainsi, f est dérivable en 0 et $f'(0) = (0,0)$.
Ensuite, f est dérivable sur $]-1,1[\setminus\{0\}$ car, composante par composante, elle est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
Si $t < 0$, f est constante donc f' est nulle sur $]-1,0]$. Si $t > 0$, on dérive composante par composante :

$$\forall t \in]0,1[, f'(t) = \left(2t\sin\left(\frac{1}{t}\right) - \cos\left(\frac{1}{t}\right), 2t\cos\left(\frac{1}{t}\right) + \sin\left(\frac{1}{t}\right)\right).$$

(b) On calcule :

$$\begin{aligned}\forall t \in]0,1[, \|f'(t)\|^2 &= \left(2t\sin\left(\frac{1}{t}\right) - \cos\left(\frac{1}{t}\right)\right)^2 + \left(2t\cos\left(\frac{1}{t}\right) + \sin\left(\frac{1}{t}\right)\right)^2 \\ &= (4t^2+1)\left(\sin^2\left(\frac{1}{t}\right) + \cos^2\left(\frac{1}{t}\right)\right) \\ &= 4t^2 + 1 \geq 1.\end{aligned}$$

Si $f'(]-1,1[)$ était connexe par arcs, alors comme $0 = f'(0) \in f'(]-1,1[)$ et $f'\left(\frac{1}{2}\right) \in f'(]-1,1[)$, le réel $\frac{1}{2}$ est atteint par f'. Or f' est soit nulle, soit supérieure ou égale à 1 donc ne peut prendre la valeur $\frac{1}{2}$. Ainsi, $f'(]-1,1[)$ n'est pas connexe par arcs.

Exercice 2

3. f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ par théorèmes généraux. Ainsi,

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \partial_1 f(x,y) = -2(2-x-y) - 2(1-x) - 4(1-2x-y) = -4+2x+2y-2+2x-4+8x+4y = -10+12x+6y$$

et

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \partial_2 f(x,y) = -2(2-x-y) - 2(1-2x-y) = -4+2x+2y-2+4x+2y = -6+6x+4y.$$

Ainsi,

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} 12x+6y=10 \\ 6x+4y=6 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calculons maintenant la hessienne. On a

$$\mathrm{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

donc la hessienne est constante. Son déterminant est $12 \neq 0$ et sa trace est $16 \geq 0$. Ainsi, la hessienne est définie positive donc f admet un minimum local en $(1/3, 1)$: $(1/3, 1)$ est donc bien un extremum local de f. On admet que ce minimum est global : on calcule

$$f(1/3, 1) = \frac{4}{3}.$$

4. Déjà, u et v sont libres donc F est bien un plan vectoriel. Soit π projection orthogonale sur F. Alors $a-b = a-\pi(a) \in \ker(\pi) = F^{\perp}$ donc comme $u, v \in F$, $\langle a-b, u\rangle = \langle a-b, v\rangle = 0$. Ainsi, $\langle b, u\rangle = \langle a, u\rangle$ et $\langle b, v\rangle = \langle a, v\rangle$. Puisque $b \in F$, b s'écrit $\lambda u + \mu v$ donc

$$\langle b, u\rangle = \lambda\|u\|^2 + \mu\langle u, v\rangle = \langle a, u\rangle \; ; \; \langle b, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle + \mu\|v\|^2 = \langle a, v\rangle.$$

On a donc l'équation matricielle

$$\begin{pmatrix} \|u\|^2 & \langle u, v\rangle \\ \langle u, v\rangle & \|v\|^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle a, u\rangle \\ \langle a, v\rangle. \end{pmatrix}$$

On a :

$$\langle u, v\rangle = 3 \;,\; \|u\|^2 = 6 \;,\; \|v\|^2 = 2 \;,\; \langle a, u\rangle = 5 \;,\; \langle a, v\rangle = 3.$$

Ainsi,

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$b = \frac{1}{3}u + v = \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right).$$

Soit maintenant $g : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x+y, x, 2x+y) \in \mathbb{R}^3$. Alors g est clairement linéaire et injective. $((1,0),(0,1))$ étant une base de $\mathbb{R}^2$,

$$\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Vect}(g(1,0), g(0,1)) = \mathrm{Vect}(u, v) = F.$$

Ainsi, d'un côté, b étant projeté orthogonal de a sur F, par le cours,

$$d(a,F)^2 = \|a-b\|^2 = \left(2-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(1-\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}$$

et de l'autre,

$$d(a,F)^2 = \inf_{(x',y',z')\in F}\|a-(x',y',z')\|^2 = \inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}\|a-g(x,y)\|^2 = \inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y).$$

On a bien $\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = \frac{4}{3}$ et cet infimum est atteint lorsque $g(x,y) = b$, donc pour $(x,y) = (1/3, 1)$.

Problème : autour du théorème de comparaison avec une intégrale

Partie I.

5. Comme f est positive, (S_n) et (J_n) sont croissantes. Ensuite, c'est classique. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [k-1,k]$, $f(k) \leq f(t) \leq f(k-1)$ donc par croissance de l'intégrale,
$$f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t \leq f(k-1).$$
puisque l'intégrale d'une constante sur $[k-1,k]$ égale cette constante.
6. On somme pour $k=1$ à n et on utilise la relation de Chasles : on a
$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_0^n f(t)\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n} f(k-1).$$
A droite, on fait un décalage d'indice. A gauche, on rajoute et on retire $f(0)$, le premier terme. On a alors
$$S_n - f(0) \leq \int_0^n f(t)\mathrm{d}t \leq S_{n-1}.$$
7. Déjà, comme f est positive, f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ équivaut à $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ converge.
   (a) Si f est intégrable, alors la convergence de $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ entraîne la convergence de $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^n f(t)\mathrm{d}t$ ce qui correspond à la convergence de la suite J_n. Par comparaison, la suite $(S_n)_n$ converge.
   Si $(S_n)_n$ converge, alors $(J_n)_n$ converge, disons vers ℓ. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ existe dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, ce qu'on note ℓ', par le théorème de la limite monotone, $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ étant croissante sur $\mathbb{R}^+$ (par positivité de f). Ainsi, par unicité de la limite, $\ell = \ell'$ donc f est bien intégrable.
   (b) Par télescopage, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{n=1}^{N} \underbrace{\int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t - f(n)}_{\geq 0 \text{ par Q5}} = \int_0^N f(t)\mathrm{d}t - \sum_{n=1}^{N} f(n) = J_N - S_N + f(0).$$
   Par la question précédente, on a
$$0 \leq J_N - S_N + f(0) \leq S_{N-1} - S_N + f(0) = f(0) - f(N)$$
$\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t - f(n)\right)_n$ est une suite croissante majorée donc convergente : CQFD.

Attention. *Il y a un décalage d'indice dans la technique de comparaison série-intégrale que l'on invoque ici par rapport aux résultats précédents. On laisse volontairement ce détail de côté par souci de lisibilité.*

8. (a) $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln(x)^a$ sont toutes deux croissantes positives sur $[2,+\infty[$ donc le produit des deux l'est aussi. Par inverse, f est décroissante sur $[2,+\infty[$. f est aussi continue et positive donc on satisfait les hypothèses de la comparaison série-intégrale.
   Or, – on reconnait une primitive à vue mais c'est un peu plus long à écrire rapidement – ln étant strictement croissante de $[2,+\infty[$ dans $[\ln(2),+\infty[$ et $\mathcal{C}^1$, par le théorème de changement de variable,
$$\int_2^x f(t)\mathrm{d}t = \int_{\ln(2)}^{\ln(x)} \frac{1}{u^a}\mathrm{d}u = \begin{cases} \dfrac{1}{1-a}\left[u^{1-a}\right]_{\ln(2)}^{\ln(x)} & \text{si } a<1 \\ \left[\ln(u)\right]_{\ln(2)}^{\ln(x)} & \text{si } a=1 \\ \left[\dfrac{1}{a-1}\dfrac{1}{u^{a-1}}\right]_{\ln(2)}^{\ln(x)} & \text{si } a>1 \end{cases}$$

Ainsi, si $a \leq 1$, quand $x \to +\infty$, l'intégrale à calculer tend vers $+\infty$, et converge quand $a > 1$. Ainsi, par la question précédente, $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln^a(n)}$ converge si, et seulement si, $a > 1$ (c'est un point du critère de Bertrand).

(b) On a, par le raisonnement de la Q8b, que pour tout $N \in \mathbb{N}_{\geq 3}$,

$$0 \leq \int_2^N \frac{1}{t\ln^2(t)}\mathrm{d}t - \sum_{k=2}^N \frac{1}{k\ln^2(k)} + f(2) \leq f(2) - f(N)$$

L'inégalité passe à la limite quand $N \to +\infty$ en

$$-\frac{1}{2\ln^2(2)} \leq \int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln^2(t)}\mathrm{d}t - \sum_{k\geq 2} \frac{1}{k\ln^2(k)} \leq 0.$$

Or,

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln^2(t)}\mathrm{d}t = \frac{1}{\ln(2)}$$

(on trouve facilement une primitive) donc

$$\frac{1}{\ln(2)} \leq \sum_{k\geq 2} \frac{1}{k\ln^2(k)} \leq \frac{1}{\ln(2)} + \frac{1}{2\ln^2(2)} = \frac{2\ln(2)+1}{2\ln^2(2)}.$$

9. (a) La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante continue positive sur $[1, +\infty[$. On applique donc la question 7b. On a alors la convergence de

$$\sum_{n\geq 2} \int_{n-1}^n \frac{1}{t}\mathrm{d}t - \frac{1}{n}.$$

Or, pour $N \geq 2$,

$$\sum_{n=2}^N \int_{n-1}^n \frac{1}{t}\mathrm{d}t - \frac{1}{n} = \underbrace{\int_1^N \frac{1}{t}\mathrm{d}t}_{=\ln(N)} - \sum_{n=2}^N \frac{1}{n}.$$

On obtient alors la convergence de $(T_n)_n$. **La constante γ s'appelle constante d'Euler-Mascheroni.**

(b) Vu que $(T_n)_n$ converge vers γ, on a

$$T_n - \gamma = o_{n\to+\infty}(1).$$

Un équivalent est alors $\ln(n)$.

10. (a) Déjà, pour tout $x > 0$, $\sum g_n$ converge simplement puisque le terme général est un $o(1/n^2)$. Soit $n \geq 1$. Alors $x \mapsto g_n(x)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$\forall x > 0, g_n'(x) = \frac{n^2 + x^2 - 2x^2}{(n^2+x^2)^2} = \frac{(n-x)(n+x)}{(n^2+x^2)^2}.$$

Ainsi, g_n est croissante sur $]0, n[$, décroissante sur $]n, +\infty[$ donc comme elle est positive, elle atteint son maximum en n. On a donc

$$\|g_n\|_\infty = g_n(n) = \frac{n}{n^2+n^2} = \frac{1}{2n}.$$

Ainsi, $\sum \|g_n\|_\infty$ n'est pas une série convergente. Ainsi, $\sum g_n$ ne converge pas normalement sur $]0, +\infty[$. Par contre, elle va converger normalement sur tout segment de $]0, +\infty[$. En effet, soit $a, b \in]0, +\infty[, a < b$. Sur $[a, b]$, pour n assez grand, g_n est strictement croissante. On en déduit que

$$\|g_n\|_{\infty,[a,b]} = g_n(b).$$

On en déduit, puisque $\sum g_n(b)$ converge, que $\sum g_n$ converge normalement sur $[a, b]$.

(b) $t \mapsto t^2 + x^2$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ donc f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Elle est de plus continue et positive. On est dans les hypothèses du théorème de comparaison série-intégrale. On applique donc Q5 et on somme par Chasles pour obtenir

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_1^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_0^n f(t)\mathrm{d}t.$$

(c) Fixons $x > 0$. On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = \frac{1}{x}\frac{1}{(t/x)^2+1}$$

donc on reconnait la dérivée de $t \mapsto \arctan(t/x)$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \arctan\left(\frac{n+1}{x}\right) - \arctan(1/x) \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \arctan(n/t).$$

L'inégalité passe à la limite quand $n \to +\infty$ en

$$\frac{\pi}{2} - \arctan(1/x) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2+t^2} \leq \frac{\pi}{2}.$$

(d) Comme $\arctan(1/x)$ tend vers 0 quand $x \to +\infty$, par théorème d'encadrement,

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Si la série $\sum g_n$ converge uniformément sur $]0, +\infty[$, par le théorème d'interversion série-limite, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{n^2+x^2}}_{=0} = 0.$$

Ainsi, par unicité de la limite, $0 = \dfrac{\pi}{2}$ ce qui est absurde : ainsi, la série $\sum g_n$ ne converge pas uniformément sur $]0, +\infty[$.

11. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\int_n^{n+1} |\sin(2\pi x)|\mathrm{d}x = \int_n^{n+\frac{1}{2}} |\sin(2\pi x)|\mathrm{d}x + \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} |\sin(2\pi x)|\mathrm{d}x.$$

Or, $x \mapsto \sin(2\pi x)$ est positive sur $[n, n+\frac{1}{2}]$ et négative sur $[n+\frac{1}{2}, n+1]$. On a donc

$$\begin{aligned}\int_n^{n+1} |\sin(2\pi x)|\mathrm{d}x &= \int_n^{n+\frac{1}{2}} \sin(2\pi x)\mathrm{d}x - \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} \sin(2\pi x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\left([-\cos(2\pi x)]_n^{n+\frac{1}{2}} + [\cos(2\pi x)]_{n+\frac{1}{2}}^{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}((1+1)+(1+1)) = \frac{2}{\pi}.\end{aligned}$$

(b) Soit $x \geq 1$. Si $x \in [1, 2[$, $\lfloor x \rfloor = 1$ donc on demande à l'intégrale d'une fonction positive à être positive, ce qui est vrai.

$$\int_1^x f(t)\mathrm{d}t = \int_1^{\lfloor x \rfloor} f(t)\mathrm{d}t + \underbrace{\int_{\lfloor x \rfloor}^x f(t)\mathrm{d}t}_{\geq 0} \geq \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor - 1} \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t = (\lfloor x \rfloor - 1)\frac{2}{\pi}.$$

Ainsi, par comparaison, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ diverge vers $+\infty$ donc, f étant positive, f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Pourtant, $f(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc la série $\sum f(n)$ converge.

12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que l'aire d'un triangle est $\dfrac{\texttt{base} \times \texttt{hauteur}}{2}$. Ainsi, on demande à ce que $n + a_n - n + a_n = \dfrac{1}{n^2}$ donc posons $a_n = \dfrac{1}{n^2}$.

    On considère donc f de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

    - si $x \in [n - a_n, n]$, alors $f(x) = \dfrac{x - n + a_n}{a_n}$ (on veut que ce soit affine de $(n - a_n, 0)$ à $(n, 1)$).
    - si $x \in [n, n + a_n]$, alors $f(x) = \dfrac{a_n + n - x}{a_n}$ (on veut que ce soit affine de $(n, 1)$ à $(n + a_n, 0)$).
    - sinon, $f(x) = 0$.

    f est bien définie puisque pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, $[p - a_p, p + a_p] \cap [q - a_q, q + a_q] = \emptyset$. Alors

    $$\sum_{n \geq 1} f(n) = \sum_{n \geq 1} 1 = +\infty$$

    et

    $$\int_{1/2}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n \geq 1} \underbrace{\int_{n-a_n}^{n+a_n} f(t)\mathrm{d}t}_{= \frac{1}{n^2} \ (\star)} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

    et on a $(\star)$ car f étant est positive, son aire sous la courbe sur un intervalle $[n - a_n, n + a_n]$ est par construction $\dfrac{1}{n^2}$. Ainsi, on a bien construit un contre-exemple.