

Ex II

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ P_1 = x \\ P_{n+2} = 2xP_{n+1} - P_n \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

①. $d^0 P_0 = 0$; $d^0 P_1 = 1$,

. Soit $n \in \mathbb{N}$, supp que $d^0 P_n = n$ et $d^0 P_{n+1} = n+1$

alors $d^0 (2xP_{n+1} - P_n) = \max(d^0 xP_{n+1}, d^0 P_n)$ car

$d^0 xP_{n+1} \neq d^0 P_n$; donc $d^0 P_{n+2} = 1 + n+1 = n+2$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$: $d^0 P_n = n$

. $CD(P_1) = 1$; $CD(P_2) = 2$.

. Soit $n \geq 1$: supp que $CD(P_n) = 2^{n-1}$ et $CD(P_{n+1}) = 2^n$

alors $CD(P_{n+2}) = 2 CD(P_{n+1}) = 2^{n+1}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $CD(P_n) = 2^{n-1}$

② Soit $\theta \in \mathbb{R}$:
$$\begin{cases} P_0(\cos \theta) = 1 = \cos(0 \cdot \theta) \\ P_1(\cos \theta) = \cos(1 \cdot \theta) \end{cases}$$

Soit $n \geq 0$: supp que
$$\begin{cases} P_n(\cos \theta) = \cos(n\theta) \\ P_{n+1}(\cos \theta) = \cos((n+1)\theta) \end{cases}$$

alors
$$\begin{aligned} P_{n+2}(\cos \theta) &= 2 \cos \theta \cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta) \\ &= \cos((n+2)\theta) \end{aligned}$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$$

③ soit $R \in \mathbb{R}[X]$: l'application $t \mapsto \frac{R(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est $\mathcal{C}^0$ sur $] -1, 1[$

et $R: t \mapsto R(t)$ est $\mathcal{C}^0$ sur le segment $[-1, 1]$, donc bornée

$$\text{par} \quad \|R\|_\infty = \sup_{t \in [-1, 1]} |R(t)|.$$

$$\text{alors} \quad \forall t \in] -1, 1[, \quad \frac{|R(t)|}{\sqrt{1-t^2}} \leq \frac{\|R\|_\infty}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\text{or} \quad \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = [\arcsin(t)]_{-1}^1 = \pi/2 + \pi/2 = \pi \quad (\text{cv}).$$

donc $t \mapsto \frac{R(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur $] -1, 1[$, d'où

$$\text{la cv de} \quad \int_{-1}^1 \frac{R(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt. \quad (\text{Ici: } R = PQ).$$

④. d'après la Q3: $\langle \cdot \rangle$ est 1 application:

Soient $P, Q, R \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\bullet \quad \langle P/Q \rangle = \int_{-1}^1 \frac{(PQ)(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_{-1}^1 \frac{(QP)(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \langle Q, P \rangle$$

$$\bullet \quad \langle P + \lambda Q, R \rangle = \int_{-1}^1 \frac{(PR)(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt + \lambda \int_{-1}^1 \frac{(QR)(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \quad [\text{Car les deux int cv}]$$
$$= \langle P/R \rangle + \lambda \langle Q/R \rangle$$

$$\bullet \quad \langle P/P \rangle = \int_{-1}^1 \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \geq 0 \quad (\text{Car } P \in \mathbb{R}[X]).$$

• Supp que $\langle P/P \rangle = 0$, alors $\forall t \in] -1, 1[, \quad P(t) = 0$

Donc P est nul car il admet une infinité de racines:

alors $\langle \cdot \rangle$ est 1. p.sur $\mathbb{R}[X]$ et sur $\mathbb{R}_{\leq n} [X]$.

$$\textcircled{5} \text{ Posons } I_{n,m} = \int_0^\pi \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos((n+m)\theta) + \cos((n-m)\theta)) d\theta$$

. Si $n \neq m$, alors $I_{n,m} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n+m} \sin((n+m)\theta) + \frac{1}{n-m} \sin((n-m)\theta) \right]_0^\pi = 0$

. Si $n = m = 0$, alors $I_{0,0} = \int_0^\pi d\theta = \pi$

. Si $n = m \neq 0$, alors $I_{n,n} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2n} \sin(2n\theta) + \theta \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$

$\textcircled{6}$ soit $m, m \in \mathbb{N}$:

$$\text{alors } \langle P_m, P_m \rangle = \int_{-1}^1 \frac{P_n(t) P_m(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \stackrel{\substack{t = \cos \theta \\ dt = -\sin \theta d\theta}}{=} - \int_\pi^0 \frac{P_n(\cos \theta) P_m(\cos \theta)}{\sqrt{1-\cos^2 \theta}} \sin \theta d\theta$$

$$= \int_0^\pi \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta \quad (|\sin \theta| = \sin \theta).$$

donc si $m \neq n$: $\langle P_m, P_m \rangle = I_{m,m} = 0 \quad (2.5)$

$m = n = 0 \quad \langle P_0, P_0 \rangle = \pi = \|P_0\|^2$

$m = n \neq 0: \quad \langle P_m, P_m \rangle = \frac{\pi}{2} = \|P_m\|^2$

Donc $(P_0, P_1, \dots, P_k)$ est 1 famille orthogonale et chaque $P_i \neq 0$

Car d'o $P_i = i = -\infty$: donc $\left(\frac{P_0}{\|P_0\|}, \dots, \frac{P_k}{\|P_k\|} \right)$ est 1 BON de $\mathbb{R}_k[X]$.

càd $\beta \left(\frac{P_0}{\sqrt{\pi}}; \sqrt{\frac{2}{\pi}} P_1, \dots, \sqrt{\frac{2}{\pi}} P_k \right)$ est 1 BON de $\mathbb{R}_k[X]$.

Problème

Partie I

① $\forall i \in [1, n]$, $X_i \neq 0$: ok

$$M = \begin{bmatrix} X_1 U & | & X_2 U & \dots & | & X_n U \end{bmatrix} \text{ donc } \text{rg } M \text{ est égal à } 1 \text{ ou } 0:$$

Si $\exists i \in [1, n] / X_i = 1$; alors $\text{rg } M = 1$ si non $\text{rg } M = 0$

$$\text{Donc } P(Y=1) = P(\text{rg } M=1) = P((X_1=1) \cup \dots \cup (X_n=1))$$

$$= 1 - P((X_1=0) \cap \dots \cap (X_n=0))$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^n P(X_i=0) \quad [\text{Car les } X_i \text{ sont indépendants}]$$

$$= 1 - (1-p)^n$$

$$\text{alors } Y = \text{rg } M \hookrightarrow \beta(1 - (1-p)^n).$$

② $\text{Tr}(M) = X_1^2 + \dots + X_n^2$

$$\forall i \in [1, n]: X_i \hookrightarrow \beta(p); \text{ donc } X_i^2 \hookrightarrow \beta(p)$$

les X_i sont indépendantes, par le lemme des coalitions les X_i^2

sont aussi indépendantes: donc $\text{Tr}(M) \hookrightarrow \beta(n, p)$

③ $M^2 = U \underbrace{U^T U}_{=I} U^T \quad \text{or } U^T U = (X_1, \dots, X_n) \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n X_i^2 = \text{Tr}(M)$

$$\text{Donc } M^2 = \text{Tr}(M) U U^T = \text{Tr}(M) M.$$

Donc

$$M^2 = \text{Tr}(M) \cdot M$$

Soit A l'événement « M est une matrice de projection »

alors $P(A) = P(\text{Tr}(M)=1)$

$$= \binom{n}{1} p^1 (1-p)^{n-1} \quad (\text{Car } \text{Tr}(M) \hookrightarrow \beta(n, p)).$$

Donc

$$P(A) = n p (1-p)$$

④ Ici chaque $X_i \hookrightarrow P(\lambda)$: où $\lambda > 0$.

Dans ce cas $P(A) = P(\text{Tr}(M)=1)$

$$= P\left(\sum_{i=1}^n X_i = 1\right) = P\left(\sum_{i=1}^n X_i = 1\right).$$

les X_i sont indépendantes, donc par récurrence simple

on montre que $\sum_{i=1}^n X_i \hookrightarrow P(n\lambda)$: donc

$$P(A) = n\lambda e^{-n\lambda}$$

Autre méthode : $\left(\sum_{i=1}^n X_i = 1\right) = A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n$ où

$$A_j = (X_j = 1) \cap \bigcap_{\substack{i \neq j \\ 1 \leq i \leq n}} (X_i = 0) : \quad \forall j \neq k \in \llbracket 1, n \rrbracket : A_j \cap A_k = \emptyset$$

$$\text{Donc } P(A) = \sum_{j=1}^n P(A_j) \text{ et}$$

$$P(A_j) = P(X_j = 1) \prod_{\substack{i \neq j \\ 1 \leq i \leq n}} P(X_i = 0) = \lambda e^{-\lambda} (\lambda^0 e^{-\lambda})^{n-1} = \lambda e^{-n\lambda}.$$

$$\text{Donc } P(A) = n\lambda e^{-n\lambda}$$

⑤ $\text{rg } J = 1$: $\text{Tr}(J) = n$ et on a: $J^2 = \text{Tr}(J) \cdot J = n \cdot J$

Donc $\text{Sp}(J) \subset \{0, n\}$:

$\text{rg } J = 1 \Rightarrow \dim \ker J = n-1 \neq 0$

$\Rightarrow 0 \in \text{Sp}(J)$ et $\dim E_0(J) = \dim \ker J = n-1$

J est symétrique réelle, donc D.G., alors nécessairement n est 1 valeur propre simple.

soit u l'end canoniquement associé à J ; et $\beta(e_1, \dots, e_n)$

l.a.b.c de $\mathbb{R}^n$; on a: $(e_2 - e_1, \dots, e_n - e_1)$ est 1 base de $\ker u = E_0(u)$

et $u(e_1 + \dots + e_n) = n(e_1 + \dots + e_n)$:

Posons
$$\begin{cases} v_i = e_i - e_1: & 2 \leq i \leq n \\ v_n = e_1 + \dots + e_n \end{cases}$$

alors $\beta'(v_1, v_2, \dots, v_n)$ est 1 base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de u ; alors:

$J = P D P^{-1}$: $D = \text{diag}(n, 0, \dots, 0)$

et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & 1 & & 0 \\ 1 & 0 & & 0 \end{pmatrix}$.

$$⑥ \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} : \operatorname{rg} A = 1, \operatorname{Tr}(A) = 0, \text{ donc } A^2 = 0, \text{ alors } \operatorname{Sp}(A) \subset \{0\}.$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rg} A = 1 &\Rightarrow \dim \ker A = 2 \neq 1 \\ &\Rightarrow 0 \in \operatorname{Sp}(A) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \operatorname{Sp}(A) = \{0\},$$

Supp A est diagonalisable, alors: A est semblable à la matrice nulle

donc $A = 0$, absurde, donc A est non diagonalisable.

Partie II

$$⑦ \quad \operatorname{rg}(A) = 1 \Rightarrow \forall i \in [1, n]: \exists \alpha_i \in \mathbb{R} / C_i = \alpha_i C : \text{ où } C_i \text{ désigne}$$

$$\text{sa } i^{\text{ème}} \text{ colonne: donc } A = \begin{bmatrix} \alpha_1 C & \alpha_2 C & \dots & \alpha_n C \end{bmatrix} = C (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

On prend: $L = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, si $L = 0_{\mathbb{R}^n}$, alors $A = 0$, absurde; donc $L \neq 0$.

$$\begin{aligned} ⑧ \quad A^2 &= C \underbrace{L \cdot C}_{=I} C = CL \quad \text{on} \quad LC = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \quad \text{avec } C = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \\ &= \operatorname{Tr}(A). \end{aligned}$$

$$\text{Donc } A^2 = (LC) CL = \operatorname{Tr}(A) \cdot A.$$

$$\begin{aligned} ⑨ \quad \operatorname{rg} A = 1 &\Rightarrow \dim \ker A = n-1 \neq 0 \\ &\Rightarrow 0 \in \operatorname{Sp}(A) \quad \text{et} \quad \dim E_0(A) = n-1 \leq n(0) \end{aligned}$$

$$\text{Comme } \dim A = n; \text{ alors } \chi_A \underset{\text{de forme}}{\text{est de}} (X-0)^{n-1} (X-\lambda):$$

$$\text{or } \operatorname{Tr}(A) = \underbrace{0 + \dots + 0}_{(n-1) \text{ fois}} + \lambda = \lambda$$

Donc $\chi_A = X^{n-1} (X - \text{Tr}(A))$; c'ad $\text{Sp}(A) = \{0, \text{Tr}(A)\}$

$$A^2 - \text{Tr}(A) \cdot A = 0 \text{ ; donc } \pi_A \text{ } \Big/ \text{ } X^2 - \text{Tr}(A)X.$$

or π_A et χ_A ont les mêmes racines, donc

$$\pi_A = X^2 - \text{Tr}(A)X$$

- ⑩ A est diagonalisable $\Leftrightarrow \pi_A$ est scindé à racines simples
 $\Leftrightarrow X(X - \text{Tr}(A))$ est simplement scindé
 $\Leftrightarrow \text{Tr}(A) \neq 0$;

⑪ $A = \underset{\beta}{\text{mat}}(u)$; $\beta = \text{La. b. c de } \mathbb{R}^n$.

$$\text{Yupp } \text{Im } u \cap \text{Ker } u \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\},$$

soit $e_2 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} / e_2 \in \text{Im } u \cap \text{Ker } u$; donc $\exists e_1 \in \mathbb{R}^n /$

$$0 \neq e_2 = u(e_1) : \text{ on a bien } u^2(e_1) = u(e_2) = 0$$

alors $e_1 \notin \text{Ker } u$ et $e_2 \in \text{Ker } u \setminus \{0\}$; comme $\dim \text{Ker } u = n-1$

$\exists e_3, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n / (e_2, e_3, \dots, e_n)$ base de $\text{Ker } u$:

on a bien $\text{Im } u = \text{vect}(e_2) \subset \text{Ker } u$ et $\beta(e_1, e_2, e_3, \dots, e_n)$

est 1 base de $\mathbb{R}^n$ car $e_1 \notin \text{Ker } u = \text{vect}(e_2, \dots, e_n)$

de plus

$$\begin{array}{c} u(e_1) \quad u(e_2) \quad \dots \quad u(e_n) \\ \text{mat}(u) = \underset{\beta}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}} \end{array}$$

(12) Supposons que $\text{Ker } u \cap \text{Im } u = \{0\}$, comme $\dim \text{Ker } u + \dim \text{Im } u = \dim \mathbb{R}^n$

alors $\text{Im } u \oplus \text{Ker } u = \mathbb{R}^n$

soit (e_1) base de $\text{Im } u$ et $(e_2, \dots, e_n)$ base de $\text{Ker } u$, alors

$\beta(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est 1 base de $\mathbb{R}^n$, et puisque $u(e_1) \in \text{Im } u = \text{Vect}(e_1)$

donc $\exists a \in \mathbb{R} / u(e_1) = a e_1$ et $\forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket : u(e_i) = 0 e_i$

Si $a = 0$, alors $u = 0$ car nul sur 1 base de $\mathbb{R}^n$, absurde

avec $\text{rg } u = 1 \neq 0$; donc $a \neq 0$ et

$$\text{mat}(u) = \underset{\beta}{\begin{bmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix}} \quad \text{ce qui est demandé.}$$

Rq:

$$a = \text{Tr}(A)$$

(13). Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R}) / \text{rg } A = \text{rg } B = 1$. Montrons que

$$A \text{ est semblable à } B \iff \text{Tr}(A) = \text{Tr}(B).$$

$\implies$ Supposons $\exists P \in GL_n(\mathbb{R}) / A = P B P^{-1}$, alors

$$\text{Tr}(A) = \text{Tr}(P B P^{-1}) = \text{Tr}(P^{-1} P B) = \text{Tr}(B)$$

⇐ Supposons que $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B)$, or $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = 1$

d'après la Q11 et Q12: A est semblable à la matrice de Q11 notée C_1 ou à celle de Q12 notée C_2 , de même pour la matrice B .

si on suppose par exemple A est semblable à C_1 et B

est semblable à C_2 , alors $\left. \begin{array}{l} \text{Tr}(A) = \text{Tr}(C_1) = \alpha > 0 \\ \text{Tr}(B) = \text{Tr}(C_2) = 0 \end{array} \right\}$ ce qui
est absurde avec $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B)$

Donc on bien A et B sont tous semblable à C_1 ou tous à C_2
et dans les deux cas A et B sont semblables, car la relation
de similitude est une relation d'équivalence.

Pour vos remarques

sadikoulmeki@yahoo.fr