Éléments de correction : CCP MP Maths 2 2025

Thomas Chen – Site personnel cliquable

7 mai 2025

Attention ! Je ne suis pas agrégé en informatique. Mes propositions pour l'exercice 1 sont peut-être fausses. Pour le reste, ça devrait aller. Ne pas hésiter à signaler ce que vous pensez être une erreur.

Exercice 1

On répond aux questions 1 à 3.

Entrée [1]:
```python
def degreMax(d):
    deg_max = 0
    for sommet in d:
        degre = len(d[sommet])
        if degre > deg_max:
            deg_max = degre
    return deg_max
```

Entrée [2]:
```python
def grapheInv(d):
    graphe_inverse = {sommet: [] for sommet in d} #on construit le dictionnaire inverse
                                                  #avec les clefs sans leurs éléments associées
    for sommet in d:
        for voisin in d[sommet]:
            graphe_inverse[voisin].append(sommet) #on echange les roles du voisins et des sommets
    return graphe_inverse
```

Entrée [3]:
```python
def colorationValide(d,L):
    for sommet in d:
        for voisin in d[sommet]: #on parcourt tous les couples (sommet, un voisin) possibles
            if L[sommet] == L[voisin]:
                return False
    return True
```

4. Dans le pire des cas, on doit parcourir toutes les arêtes possibles pour vérifier la condition de coloration, à savoir `M`. La complexité est donc $\mathcal{O}(\texttt{M})$.
5. On écrit

   SELECT MAX(DUREE) FROM LOCATIONS ;

6. On écrit

   SELECT F.CODEFILM, F.NOMFILM, AVG(L.DUREE) AS DUREEMOYENNE
   FROM FILMS AS F
   JOIN LOCATIONS AS L ON F.CODEFILM = L.CODEFILM
   GROUP BY F.CODEFILM, F.NOMFILM
   HAVING AVG(L.DUREE) < 2
   ORDER BY DUREEMOYENNE DESC ;

Exercice 2

7. **On note** $\mathrm{cd}(P)$ **le coefficient dominant de** P**,** $P \neq 0$**.** Si $n = 0$, alors $\deg(P_n) = 0, \mathrm{cd}(P_n) = 1$. Montrons par récurrence que :

$$(\mathcal{H}_n) \ : \ \deg(P_n) = n \ , \ \mathrm{cd}(P_n) = 2^{n-1}$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- - Pour $n = 1$, on a $P_n = X$ et $\deg(X) = 1, \mathrm{cd}(X) = 2^{1-1}$
  - Pour $n = 2$, on a $P_2 = 2XP_1 - P_0 = 2X^2 - 1$ et $\deg(P_2) = 2, \mathrm{cd}(P_2) = 2^{2-1}$.

  La proposition est donc initialisée.
- Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n+1}$ soient vraies. Alors $P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$ et $2XP_{n+1}$ est de degré $n+2$, P_n est de degré n. La différence est donc de degré $n+2$ et le coefficient dominant de P_{n+2} est celui de $2XP_{n+1}$. Or,

  $$\mathrm{cd}(PQ) = \mathrm{cd}(P)\mathrm{cd}(Q)$$

  pour tout P, Q polynômes donc $\mathrm{cd}(P_{n+2}) = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$. On a donc bien $\mathcal{H}_{n+2}$.

Par hypothèse de récurrence, ou bien $n = 0$ et le degré de P_0 est 0 de coefficient dominant 1, ou bien $n \in \mathbb{N}^*$ et le degré de P_n est n et son coefficient dominant est 2^{n-1}.

8. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) = 2\cos\left(\frac{(n+2+n)\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+2-n)\theta}{2}\right) = 2\cos((n+1)\theta)\cos(\theta).$$

On en déduit que la suite $(\cos(n\theta))_n$ et la suite $(P_n(\cos(\theta))_n$ suivent la même relation de récurrence et coïncide en 0 et en 1 : en effet, on a $P_0(\cos(\theta)) = 1 = \cos(0\theta)$ et $P_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta) = \cos(1\theta)$. Par unicité de la définition par récurrence, elles sont donc égales.

9. $t \mapsto \dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1,1[$. On peut donc considérer son intégrale sur $]-1,1[$ et on a

$$\forall t \in [-1,1], \left|\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\right| \leq \|P\|_{\infty,[-1,1]}\|Q\|_{\infty,[-1,1]}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

puisque P et Q sont continues sur $[-1,1]$ donc bornées. Une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est arcsin et alors

$$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin(1) - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Ainsi, par comparaison,

$$\int_{-1}^{1}\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$$

existe.

10. Soit $P, Q, Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}_k[X], \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
    - On a

    $$\begin{aligned}\langle P, \lambda Q_1 + \mu Q_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}[P(\lambda Q_1 + \mu Q_2)](t)\mathrm{d}t \\ &= \lambda\int_{-1}^{1}\frac{P(t)Q_1(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t + \mu\int_{-1}^{1}\frac{P(t)Q_2(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \\ &= \lambda\langle P, Q_1\rangle + \mu\langle P, Q_2\rangle.\end{aligned}$$

    $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est linéaire à droite.

- On a
$$\langle Q,P\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{Q(t)P(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \langle P,Q\rangle$$
donc $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est symétrique. Elle est donc, grâce au point précédent, linéaire à gauche.
- On a
$$\langle P,P\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \geq 0$$
par positivité de l'intégrale. $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est positive.
- Supposons que $\langle P,P\rangle = 0$. Alors
$$\int_{-1}^{1} \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = 0.$$
L'intégrale d'une quantité positive continue est nulle donc l'intégrande est identiquement nulle : cela entraine donc que $P^2(t) = 0$ sur $]-1,1[$ donc $]-1,1[$ étant infini, $P^2 = 0$ dans $\mathbb{R}_k[X]$ donc $P = 0$.

11. Soit $p,q \in \mathbb{N}$. On a la formule
$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) - \cos(a-b)\right)$$
pour tout $a,b \in \mathbb{R}$. Ainsi,
$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \cos(p\theta)\cos(q\theta)\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos((p+q)\theta) + \cos((p-q)\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((p+q)\theta)}{p+q}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((p-q)\theta)}{p-q}\right]_0^{\pi} & \text{si } p \neq q \\ \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2p\theta)}{2p}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{2}\pi & \text{si } p = q \end{cases} \\
&= \frac{\pi}{2}\delta_{p,q}
\end{aligned}$$
avec $\delta_{p,q}$ symbole de Kronecker.

12. Soit $P,Q \in \mathbb{R}_k[X]$. On réalise le changement de variable $t = \cos(\theta)$ pour $t \in]-1,1[, \theta \in]0,\pi[$. Ce changement de variable est $\mathcal{C}^1$ strictement monotone et on a
$$\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} P(\cos(\theta))Q(\sin(\theta))\mathrm{d}\theta. \tag{1}$$
Posons $T_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}P_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $n \leq k$, $T_n \in \mathbb{R}_k[X]$ par la question 7 et pour tout $p,q \in [\![0,k]\!]$,
$$\begin{aligned}
\langle T_p,T_q\rangle &= \frac{2}{\pi}\langle P_p,P_q\rangle \\
&\underset{(1)}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} P_p(\cos(\theta))P_q(\sin(\theta))\mathrm{d}\theta \\
&\underset{\text{Q8}}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(p\theta)\cos(q\theta)\mathrm{d}\theta \\
&\underset{\text{Q11}}{=} \delta_{p,q}.
\end{aligned}$$
Ainsi, les $(T_n)_{n\leq k}$ forment une base orthonormée de $(\mathbb{R}_k[X], \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Problème

Partie I.

13. On rappelle qu'une matrice de la forme UV^T est de rang 1 ou 0 (et la réciproque est vraie, c'est l'objet de la question 19) car en notant $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, on a

$$UV^T = (v_1 U | \cdots | v_n U)$$

ce qui signifie que les colonnes de M sont dans $\mathrm{Vect}(U)$. Ainsi Y vaut soit 0 soit 1. Si Y vaut 0, alors $\mathrm{rg}(M) = 0$ entraîne $M = 0$ donc $U = 0$. Sinon, $Y = 1$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(\exists i \in [\![1, n]\!], U_i = 1) = 1 - \mathbb{P}(\forall i \in [\![1, n]\!], U_i = 0) \underset{\text{indep.}}{=} 1 - (1-p)^n$$

et comme Y est une variable aléatoire de support inclus dans $\{0, 1\}$, nécessairement, $\mathbb{P}(Y = 0) = (1-p)^n$. Ainsi, $Y \sim \mathcal{B}(1 - (1-p)^n)$.

14. Soit $1 \leq i \leq n$. On a $X_i \sim \mathcal{B}(p)$ donc $X_i^2 \sim \mathcal{B}(p)$. Comme les $(X_i)_i$ sont indépendantes, les $(X_i^2)_i$ le sont aussi : ainsi, $\mathrm{tr}(M)$ est une somme de n Bernoulli de paramètre p indépendantes. On a donc $\mathrm{tr}(M) \sim \mathcal{B}(n, p)$.

15. On a

$$M^2 = U(U^T U)U^T$$

et $U^T U = \displaystyle\sum_{i=1}^n X_i^2 = \mathrm{tr}(M)$. On en déduit que $M^2 = \mathrm{tr}(M) UU^T = \mathrm{tr}(M) M$. Ainsi, M est une matrice de projection si, et seulement si, $\mathrm{tr}(M) = 1$. Ainsi, la probabilité cherchée est, d'après la question précédente,

$$\mathbb{P}(\mathrm{tr}(M) = 1) = \binom{n}{1} p(1-p)^{n-1} = np(1-p)^{n-1}.$$

16. La question 15 reste valide. On demande donc à ce que $\displaystyle\sum_{i=1}^n X_i^2 = 1$ et puisque les X_i ont à valeurs dans $\mathbb{N}$, c'est équivalent à demander $\displaystyle\sum_{i=1}^n X_i = 1$.
La fonction génératrice d'une loi de Poisson de paramètre λ est $\exp(\lambda(\cdot - 1))$. Par indépendance, on a donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, G_{X_1 + \cdots + X_n}(t) = \prod_{i=1}^n G_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^n \exp(\lambda(t-1)) = \exp(n\lambda(t-1)).$$

Ainsi, $\displaystyle\sum_{i=1}^n X_i$ suit une loi de Poisson de paramètre $n\lambda$ puisque la fonction génératrice caractérise la loi. On en déduit que

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i^2 = 1\right) = \frac{(n\lambda)^1}{1!} e^{-n\lambda} = n\lambda e^{-n\lambda}.$$

17. La matrice J égale $\mathbf{e}\mathbf{e}^T$ avec $\mathbf{e}$ matrice colonne ne contenant que des 1. Elle est donc de rang 1. Sa trace égale n. $\mathbf{e}$ est vecteur propre de J pour la valeur propre n (un produit matriciel direct le montre) et 0 est valeur propre de J de multiplicité géométrique $n-1$ puisque $\dim(\mathcal{E}_0(J)) = \dim(\ker(J)) = n-1$ par le théorème du rang. Ainsi, J est diagonalisable. Pour trouver une matrice de passage, il suffit de trouver une base du noyau. Par exemple, les vecteurs $f_k = e_1 - e_k$ pour $2 \leq k \leq n$ avec $(e_i)_i$ base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ forment une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Ils sont tous dans le noyau (un produit matriciel direct le

montre) et il y en a $n-1$. Par cardinalité, c'est une base du noyau. Ainsi, par le théorème de changement de base,

$$J = P\mathrm{diag}(n, \underbrace{0, \cdots, 0}_{n-1 \text{ fois}})P^{-1}$$

avec $P = (\mathbf{e}|f_2|\cdots|f_n)$.

18. On considère $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si A est diagonalisable, comme 0 est sa seule valeur propre, elle serait semblable à 0_3 ce qui est absurde car seule 0_3 est semblable à 0_3. Ainsi, A n'est pas diagonalisable. Pourtant, A est bien de rang 1. Sa trace est nulle.

Partie II.

19. Soit A de rang 1 et C une colonne non nulle de A. Alors comme $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(C_1, \cdots, C_n)$ où $(C_i)_i$ sont les colonnes de A, on a $\mathrm{Vect}(C) \subset \mathrm{Im}(A)$ et par dimension, on a l'égalité. Ainsi, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe $v_i \in \mathbb{R}$ tel que $C_i = v_i C$. Ainsi, en notant $L = (v_1, \cdots, v_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, on a

$$A = CL.$$

En notant $(c_1, \cdots, c_n)$ les coefficients de C, on a alors $[A]_{ij} = c_i v_j$.

20. On a

$$LC = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i = \sum_{i=1}^{n} [A]_{ii} = \mathrm{tr}(A).$$

Ainsi, $A^2 = C(LC)L = \mathrm{tr}(A)CL = \mathrm{tr}(A)A$.

21. Comme le rang de A est 1, 0 est valeur propre, de multiplicité géométrique $n-1$. Comme la multiplicité algébrique est supérieure ou égale à la multiplicité géométrique, χ_A étant de degré n, on a $\chi_A = X^{n-1}(X-\lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Or $\mathrm{tr}(A)$ égale la somme des valeurs propres donc $\lambda = \mathrm{tr}(A)$ et

$$\chi_A = X^{n-1}(X - \mathrm{tr}(A)).$$

Enfin, A est non nulle donc le polynôme minimal est de degré non nul. Si μ_A est de degré 1, μ_A s'écrit $X - \alpha$ donc $A = \alpha I_n$. Comme A n'est pas l'identité (car A est de rang 1), μ_A n'est pas de degré 1. Ainsi, μ_A est de degré au moins 2 et $X^2 - \mathrm{tr}(A)X$ annule A. Par minimalité du polynôme minimal,

$$\mu_A = X^2 - \mathrm{tr}(A)X.$$

22. A est diagonalisable si, et seulement si, μ_A est scindé à racines simples. Or $\mu_A = X(X - \mathrm{tr}(A))$ donc A est diagonalisable si, et seulement si, $\mathrm{tr}(A) \neq 0$.

23. Si $\mathrm{Im}(u) \cap \ker(u) \neq \{0\}$, alors il existe e dans $\mathrm{Im}(u) \cap \ker(u)$. Comme $\mathrm{rg}(u) = 1$, $\mathrm{Im}(u) \cap \ker(u)$ est de dimension au plus 1 et contient un vecteur non nul. On en déduit que $\mathrm{Im}(u) \cap \ker(u)$ égale $\mathrm{Vect}(e)$. Maintenant, $\mathrm{Vect}(e) \subset \mathrm{Im}(u)$ et par dimension, on a égalité donc $\mathrm{Im}(u) \cap \ker(u) = \mathrm{Im}(u)$ ce qui signifie que

$$\mathrm{Im}(u) \subset \ker(u).$$

Soit maintenant $e_1 \notin \ker(u)$. Alors $u(e_1) =: e_2 \in \ker(u)$ par précédent. On complète $\{e_2\}$ en une base de $\ker(u)$: on a $\{e_2, \cdots, e_n\}$ base de $\ker(u)$. Comme $e_1 \notin \ker(u)$, $(e_1, \cdots, e_n) =: \mathcal{B}$ est libre dans $\mathbb{R}^n$. Par cardinalité, c'est une base. On a alors $u(e_1) = e_2$ et $\forall i \in [\![2, n]\!], u(e_i) = 0$. On en déduit que la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de u est celle proposée par l'énoncé.

24. Par le théorème du rang, on a donc $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(u) \oplus \ker(u)$. Soit e une base de $\mathrm{Im}(u)$. Alors $u(e) \in \mathrm{Im}(u)$ donc s'écrit ae, $a \in \mathbb{R}$, et comme $e \notin \ker(u)$, $a \neq 0$. Soit $e_2, \cdots, e_n$ une base du noyau. Alors $(e, e_2, \cdots, e_n) =: \mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^n$ et la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de u est celle proposée par l'énoncé.

25. Le cours dit que la trace est un invariant de similitude. Réciproquement, soit A, B deux matrices de rang 1 de même trace. Alors A est semblable soit à la matrice M_1 de la forme de la question 23, soit à une matrice $M_2(a)$ de la forme de la question 24 [1] et de même pour B.
    - Si $\mathrm{tr}(A)$ est non nulle, alors A est semblable à une matrice type M_2 et le coefficient en $(1,1)$ est $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$. Ainsi, A et B sont toutes deux semblables à la même matrice de type M_2 donc sont semblables.
    - Si $\mathrm{tr}(A)$ est nulle, alors A est semblable une matrice à M_1 et de même pour B. Elle sont donc semblables.

    Ainsi, A et B sont semblables.

1. on note $M_2(a)$ car on peut éventuellement changer le a