Éléments de correction : CCP MPI Maths 2 2025

Thomas Chen – Site personnel cliquable

7 mai 2025

Ne pas hésiter à signaler ce que vous pensez être une erreur.

Exercice 1

1. On rappelle que $\forall x > 0, \ln(x) \leq x - 1$. En effet, ln est concave sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc elle est en dessous de sa tangente en 1 qu'est $y = x - 1$. Ainsi, $\forall k \in [\![1, n]\!], \ln(x_k/m) \leq \frac{x_k}{m} - 1$ donc en sommant,
$$\sum_{k=1}^{n} \ln(x_k/m) \leq \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x_k}{m} - 1\right).$$
2. On note $\overline{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k$. Alors $m = \dfrac{\overline{x}}{n}$ et
$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x_k}{m} - 1\right) = \frac{1}{m}\overline{x} - n = 0$$
donc par croissance de l'exponentielle,
$$\exp\left(\sum_{k=1}^{n} \ln(x_k/m)\right) = \prod_{k=1}^{n} (x_k/m) \leq \exp(0) = 1.$$
On en déduit que
$$\prod_{k=1}^{n} x_k \leq m^n$$
donc
$$\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k.$$
C'est l'inégalité arithmético-géométrique. On aurait pu utiliser Jensen...
3. Le seul endroit où on a perdu de l'information est en écrivant $\ln(x_k/m) \leq \frac{x_k}{m} - 1$ pour tout $1 \leq k \leq n$. Ainsi, il y a égalité si, et seulement si, $\forall 1 \leq k \leq n, \ln(x_k/m) = \frac{x_k}{m} - 1$ ce qui est équivalent à $\forall 1 \leq k \leq n, x_k = m$: ils sont tous égaux !
On a donc bien égalité si, et seulement si, $x_1 = \cdots = x_n$.
4. Comme $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, elle est diagonalisable et ses valeurs propres sont dans $\mathbb{R}^{+*}$. Notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de B. Alors
$$\det(B) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \ ; \ \mathrm{tr}(B) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$
On est dans le cadre d'application de l'inégalité arithmético-géométrique. On a
$$\det(B)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\mathrm{tr}(B)$$
et il y a égalité si, et seulement si, toutes les valeurs propres sont égales entre elles, disons à λ. Dans ce cas, B est semblable à λI_n : il existe donc $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = P\lambda I_n P^{-1} = \lambda I_n P P^{-1} = \lambda I_n$. Ainsi, il y a égalité si, et seulement si, $B \in \mathrm{Vect}(I_n)$.

5. On a
$$\langle Ae_i, e_i\rangle = a_{ii}$$
pour $(e_1, \cdots, e_n)$ base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $i \in [\![1, n]\!]$. Comme A est symétrique définie positive, $\langle AX, X\rangle > 0$ pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}$ donc $\forall i \in [\![1, n]\!], a_{ii} > 0$.
6. Comme D est diagonale, D égale sa transposée donc
$$B^T = (DAD)^T = D^T A^T D^T = DAD = B$$
donc $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Ensuite, pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,
$$\langle BX, X\rangle = \langle DADX, X\rangle = \langle A(DX), D^T X\rangle = \langle A(DX), DX\rangle \geq 0$$
puisque $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ donc $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Enfin, si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est telle que $\langle BX, X\rangle = 0$, alors $\langle A(DX), DX\rangle = 0$ donc $DX = 0$ puisque $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Comme D est inversible (diagonale ne contenant pas de 0), $X = 0$. Ainsi, $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
On veut appliquer $Q4$. On a de plus $\det(B) = \det(DAD) = \det(D)^2 \det(A) = \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{a_{ii}}\right) \det(D)$. On conclus dont en calculant $\operatorname{tr}(B)$. On rappelle que si $D = \operatorname{diag}(d_1, \cdots, d_n)$ et $M = (C_1, \cdots, C_n) = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$, alors
$$DM = \begin{pmatrix} d_1 L_1 \\ \vdots \\ d_n L_n \end{pmatrix} \ ; \ MD = (d_1 C_1 | \cdots d_n C_n).$$
Ainsi,
$$[DAD]_{i,j} = \frac{1}{\sqrt{a_{ii}}} \frac{1}{\sqrt{a_{jj}}} a_{i,j}$$
donc
$$\operatorname{tr}(B) = \sum_{i=1}^{n} [DAD]_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_{ii}} a_{ii} = n$$
donc par $Q4$, de
$$\det(B)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \operatorname{tr}(B),$$
on tire
$$\det(D)^{1/n} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{a_{ii}^{1/n}} \leq 1$$
donc
$$\det(D) \leq \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$
Il y a égalité si, et seulement si, DAD est de la forme λI_n *i.e.* A est de la forme λD^{-2} *i.e.* A est diagonale.

Exercice 2

7. **On note $\operatorname{cd}(P)$ le coefficient dominant de P, $P \neq 0$.** Si $n = 0$, alors $\deg(P_n) = 0, \operatorname{cd}(P_n) = 1$. Montrons par récurrence que :
$$(\mathcal{H}_n) \ : \ \deg(P_n) = n \ , \ \operatorname{cd}(P_n) = 2^{n-1}$$
est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   - • Pour $n = 1$, on a $P_n = X$ et $\deg(X) = 1, \operatorname{cd}(X) = 2^{1-1}$

- Pour $n = 2$, on a $P_2 = 2XP_1 - P_0 = 2X^2 - 1$ et $\deg(P_2) = 2, \mathrm{cd}(P_2) = 2^{2-1}$.

  La proposition est donc initialisée.
- Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n+1}$ soient vraies. Alors $P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$ et $2XP_{n+1}$ est de degré $n+2$, P_n est de degré n. La différence est donc de degré $n+2$ et le coefficient dominant de P_{n+2} est celui de $2XP_{n+1}$. Or,

$$\mathrm{cd}(PQ) = \mathrm{cd}(P)\mathrm{cd}(Q)$$

  pour tout P, Q polynômes donc $\mathrm{cd}(P_{n+2}) = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$. On a donc bien $\mathcal{H}_{n+2}$.

Par hypothèse de récurrence, ou bien $n = 0$ et le degré de P_0 est 0 de coefficient dominant 1, ou bien $n \in \mathbb{N}^*$ et le degré de P_n est n et son coefficient dominant est 2^{n-1}.

8. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) = 2\cos\left(\frac{(n+2+n)\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+2-n)\theta}{2}\right) = 2\cos((n+1)\theta)\cos(\theta).$$

On en déduit que la suite $(\cos(n\theta))_n$ et la suite $(P_n(\cos(\theta))_n$ suivent la même relation de récurrence et coïncide en 0 et en 1 : en effet, on a $P_0(\cos(\theta)) = 1 = \cos(0\theta)$ et $P_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta) = \cos(1\theta)$. Par unicité de la définition par récurrence, elles sont donc égales.

9. $t \mapsto \dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1,1[$. On peut donc considérer son intégrale sur $]-1,1[$ et on a

$$\forall t \in [-1,1], \left|\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\right| \leq \|P\|_{\infty,[-1,1]}\|Q\|_{\infty,[-1,1]}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

puisque P et Q sont continues sur $[-1,1]$ donc bornées. Une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est arcsin et alors

$$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin(1) - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Ainsi, par comparaison,

$$\int_{-1}^{1}\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$$

existe.

10. Soit $P, Q, Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}_k[X], \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
   - On a

$$\begin{aligned}\langle P, \lambda Q_1 + \mu Q_2\rangle &= \int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}[P(\lambda Q_1 + \mu Q_2)](t)\mathrm{d}t \\ &= \lambda\int_{-1}^{1}\frac{P(t)Q_1(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t + \mu\int_{-1}^{1}\frac{P(t)Q_2(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \\ &= \lambda\langle P, Q_1\rangle + \mu\langle P, Q_2\rangle.\end{aligned}$$

     $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est linéaire à droite.
   - On a

$$\langle Q, P\rangle = \int_{-1}^{1}\frac{Q(t)P(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1}\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \langle P, Q\rangle$$

     donc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est symétrique. Elle est donc, grâce au point précédent, linéaire à gauche.
   - On a

$$\langle P, P\rangle = \int_{-1}^{1}\frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \geq 0$$

     par positivité de l'intégrale. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est positive.

- Supposons que $\langle P, P\rangle = 0$. Alors
$$\int_{-1}^{1} \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = 0.$$
L'intégrale d'une quantité positive continue est nulle donc l'intégrande est identiquement nulle : cela entraine donc que $P^2(t) = 0$ sur $]-1,1[$ donc $]-1,1[$ étant infini, $P^2 = 0$ dans $\mathbb{R}_k[X]$ donc $P = 0$.

11. Soit $p, q \in \mathbb{N}$. On a la formule
$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) - \cos(a-b)\right)$$
pour tout $a, b \in \mathbb{R}$. Ainsi,
$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \cos(p\theta)\cos(q\theta)\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos((p+q)\theta) + \cos((p-q)\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\sin((p+q)\theta)}{p+q}\right]_0^{\pi} + \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\sin((p-q)\theta)}{p-q}\right]_0^{\pi} & \text{si } p \neq q \\ \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\sin(2p\theta)}{2p}\right]_0^{\pi} + \dfrac{1}{2}\pi & \text{si } p = q \end{cases} \\
&= \frac{\pi}{2}\delta_{p,q}
\end{aligned}$$
avec $\delta_{p,q}$ symbole de Kronecker.

12. Soit $P, Q \in \mathbb{R}_k[X]$. On réalise le changement de variable $t = \cos(\theta)$ pour $t \in]-1,1[, \theta \in]0,\pi[$. Ce changement de variable est $\mathcal{C}^1$ strictement monotone et on a
$$\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} P(\cos(\theta))Q(\sin(\theta))\mathrm{d}\theta. \tag{1}$$
Posons $T_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}P_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $n \leq k$, $T_n \in \mathbb{R}_k[X]$ par la question 7 et pour tout $p, q \in [\![0, k]\!]$,
$$\begin{aligned}
\langle T_p, T_q\rangle &= \frac{2}{\pi}\langle P_p, P_q\rangle \\
&\underset{(1)}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} P_p(\cos(\theta))P_q(\sin(\theta))\mathrm{d}\theta \\
&\underset{\text{Q8}}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(p\theta)\cos(q\theta)\mathrm{d}\theta \\
&\underset{\text{Q11}}{=} \delta_{p,q}.
\end{aligned}$$
Ainsi, les $(T_n)_{n\leq k}$ forment une base orthonormée de $(\mathbb{R}_k[X], \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Problème

Partie I.

13. On rappelle qu'une matrice de la forme UV^T est de rang 1 ou 0 (et la réciproque est vraie, c'est l'objet de la question 19) car en notant $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, on a
$$UV^T = (v_1 U | \cdots | v_n U)$$
ce qui signifie que les colonnes de M sont dans $\mathrm{Vect}(U)$. Ainsi Y vaut soit 0 soit 1. Si Y vaut 0, alors $\mathrm{rg}(M) = 0$ entraîne $M = 0$ donc $U = 0$. Sinon, $Y = 1$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(Y=1)=\mathbb{P}(\exists i\in [\![1,n]\!], U_i=1)=1-\mathbb{P}(\forall i\in [\![1,n]\!], U_i=0) \underset{\text{indep.}}{=} 1-(1-p)^n$$

et comme Y est une variable aléatoire de support inclus dans $\{0,1\}$, nécessairement, $\mathbb{P}(Y=0)=(1-p)^n$. Ainsi, $Y\sim\mathcal{B}(1-(1-p)^n)$.

14. Soit $1\leq i\leq n$. On a $X_i\sim\mathcal{B}(p)$ donc $X_i^2\sim\mathcal{B}(p)$. Comme les $(X_i)_i$ sont indépendantes, les $(X_i^2)_i$ le sont aussi : ainsi, $\mathrm{tr}(M)$ est une somme de n Bernoulli de paramètre p indépendantes. On a donc $\mathrm{tr}(M)\sim\mathcal{B}(n,p)$.
15. On a
$$M^2=U(U^TU)U^T$$
et $U^TU=\sum_{i=1}^n X_i^2=\mathrm{tr}(M)$. On en déduit que $M^2=\mathrm{tr}(M)UU^T=\mathrm{tr}(M)M$. Ainsi, M est une matrice de projection si, et seulement si, $\mathrm{tr}(M)=1$. Ainsi, la probabilité cherchée est, d'après la question précédente,
$$\mathbb{P}(\mathrm{tr}(M)=1)=\binom{n}{1}p(1-p)^{n-1}=np(1-p)^{n-1}.$$
16. La question 15 reste valide. On demande donc à ce que $\sum_{i=1}^n X_i^2=1$ et puisque les X_i ont à valeurs dans $\mathbb{N}$, c'est équivalent à demander $\sum_{i=1}^n X_i=1$.
La fonction génératrice d'une loi de Poisson de paramètre λ est $\exp(\lambda(\cdot-1))$. Par indépendance, on a donc
$$\forall t\in\mathbb{R}, G_{X_1+\cdots+X_n}(t)=\prod_{i=1}^n G_{X_i}(t)=\prod_{i=1}^n \exp(\lambda(t-1))=\exp(n\lambda(t-1)).$$
Ainsi, $\sum_{i=1}^n X_i$ suit une loi de Poisson de paramètre $n\lambda$ puisque la fonction génératrice caractérise la loi. On en déduit que
$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i^2=1\right)=\frac{(n\lambda)^1}{1!}e^{-n\lambda}=n\lambda e^{-n\lambda}.$$
17. La matrice J égale $\mathbf{e}\mathbf{e}^T$ avec $\mathbf{e}$ matrice colonne ne contenant que des 1. Elle est donc de rang 1. Sa trace égale n. $\mathbf{e}$ est vecteur propre de J pour la valeur propre n (un produit matriciel direct le montre) et 0 est valeur propre de J de multiplicité géométrique $n-1$ puisque $\dim(\mathcal{E}_0(J))=\dim(\ker(J))=n-1$ par le théorème du rang. Ainsi, J est diagonalisable. Pour trouver une matrice de passage, il suffit de trouver une base du noyau. Par exemple, les vecteurs $f_k=e_1-e_k$ pour $2\leq k\leq n$ avec $(e_i)_i$ base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ forment une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Ils sont tous dans le noyau (un produit matriciel direct le montre) et il y en a $n-1$. Par cardinalité, c'est une base du noyau. Ainsi, par le théorème de changement de base,
$$J=P\mathrm{diag}(n,\underbrace{0,\cdots,0}_{n-1\text{ fois}})P^{-1}$$
avec $P=(\mathbf{e}|f_2|\cdots|f_n)$.
18. On considère $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$. Si A est diagonalisable, comme 0 est sa seule valeur propre, elle serait semblable à 0_3 ce qui est absurde car seule 0_3 est semblable à 0_3. Ainsi, A n'est pas diagonalisable. Pourtant, A est bien de rang 1. Sa trace est nulle.

Partie II.

19. Soit A de rang 1 et C une colonne non nulle de A. Alors comme $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(C_1, \cdots, C_n)$ où $(C_i)_i$ sont les colonnes de A, on a $\mathrm{Vect}(C) \subset \mathrm{Im}(A)$ et par dimension, on a l'égalité. Ainsi, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe $v_i \in \mathbb{R}$ tel que $C_i = v_i C$. Ainsi, en notant $L = (v_1, \cdots, v_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, on a
$$A = CL.$$
En notant $(c_1, \cdots, c_n)$ les coefficients de C, on a alors $[A]_{ij} = c_i v_j$.

20. On a
$$LC = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i = \sum_{i=1}^{n} [A]_{ii} = \mathrm{tr}(A).$$
Ainsi, $A^2 = C(LC)L = \mathrm{tr}(A)CL = \mathrm{tr}(A)A$.

21. Comme le rang de A est 1, 0 est valeur propre, de multiplicité géométrique $n-1$. Comme la multiplicité algébrique est supérieure ou égale à la multiplicité géométrique, χ_A étant de degré n, on a $\chi_A = X^{n-1}(X - \lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Or $\mathrm{tr}(A)$ égale la somme des valeurs propres donc $\lambda = \mathrm{tr}(A)$ et
$$\chi_A = X^{n-1}(X - \mathrm{tr}(A)).$$
Enfin, A est non nulle donc le polynôme minimal est de degré non nul. Si μ_A est de degré 1, μ_A s'écrit $X - \alpha$ donc $A = \alpha I_n$. Comme A n'est pas l'identité (car A est de rang 1), μ_A n'est pas de degré 1. Ainsi, μ_A est de degré au moins 2 et $X^2 - \mathrm{tr}(A)X$ annule A. Par minimalité du polynôme minimal,
$$\mu_A = X^2 - \mathrm{tr}(A)X.$$

22. A est diagonalisable si, et seulement si, μ_A est scindé à racines simples. Or $\mu_A = X(X - \mathrm{tr}(A))$ donc A est diagonalisable si, et seulement si, $\mathrm{tr}(A) \neq 0$.

23. Si $\mathrm{Im}(u) \cap \ker(u) \neq \{0\}$, alors il existe e dans $\mathrm{Im}(u) \cap \ker(u)$. Comme $\mathrm{rg}(u) = 1$, $\mathrm{Im}(u) \cap \ker(u)$ est de dimension au plus 1 et contient un vecteur non nul. On en déduit que $\mathrm{Im}(u) \cap \ker(u)$ égale $\mathrm{Vect}(e)$. Maintenant, $\mathrm{Vect}(e) \subset \mathrm{Im}(u)$ et par dimension, on a égalité donc $\mathrm{Im}(u) \cap \ker(u) = \mathrm{Im}(u)$ ce qui signifie que
$$\mathrm{Im}(u) \subset \ker(u).$$
Soit maintenant $e_1 \notin \ker(u)$. Alors $u(e_1) =: e_2 \in \ker(u)$ par précédent. On complète $\{e_2\}$ en une base de $\ker(u)$: on a $\{e_2, \cdots, e_n\}$ base de $\ker(u)$. Comme $e_1 \notin \ker(u)$, $(e_1, \cdots, e_n) =: \mathcal{B}$ est libre dans $\mathbb{R}^n$. Par cardinalité, c'est une base. On a alors $u(e_1) = e_2$ et $\forall i \in [\![2, n]\!], u(e_i) = 0$. On en déduit que la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de u est celle proposée par l'énoncé.

24. Par le théorème du rang, on a donc $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(u) \oplus \ker(u)$. Soit e une base de $\mathrm{Im}(u)$. Alors $u(e) \in \mathrm{Im}(u)$ donc s'écrit ae, $a \in \mathbb{R}$, et comme $e \notin \ker(u)$, $a \neq 0$. Soit $e_2, \cdots, e_n$ une base du noyau. Alors $(e, e_2, \cdots, e_n) =: \mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^n$ et la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de u est celle proposée par l'énoncé.

25. Le cours dit que la trace est un invariant de similitude. Réciproquement, soit A, B deux matrices de rang 1 de même trace. Alors A est semblable soit à la matrice M_1 de la forme de la question 23, soit à une matrice $M_2(a)$ de la forme de la question 24[1] et de même pour B.
    - Si $\mathrm{tr}(A)$ est non nulle, alors A est semblable à une matrice type M_2 et le coefficient en $(1,1)$ est $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$. Ainsi, A et B sont toutes deux semblables à la même matrice de type M_2 donc sont semblables.
    - Si $\mathrm{tr}(A)$ est nulle, alors A est semblable une matrice à M_1 et de même pour B. Elle sont donc semblables.

    Ainsi, A et B sont semblables.

1. on note $M_2(a)$ car on peut éventuellement changer le a