

CC-INP, la planète Terre

Physique MP 2025

Solutions proposées par Paul Roux

I Étude du mouvement d'un satellite

I.1 Force centrale conservative

Q1. Le référentiel géocentrique est défini par son centre O (le centre de masse de la Terre) et trois directions réputées fixes, définies par des étoiles lointaines.

Un référentiel est dit galiléen si, relativement à celui-ci, un mobile ponctuel et isolé persiste dans son état initial d'immobilité ou de mouvement rectiligne et uniforme.

Q2. Le champ de gravitation terrestre a les mêmes symétries que la masse qui lui donne naissance ; celle-ci a la symétrie sphérique, c'est-à-dire que tout plan diamétral, contenant le centre O de la Terre et le point M où on étudie le champ, est un plan de symétrie des masses. Ainsi le champ est contenu dans l'intersection de tous ces plans, c'est-à-dire la droite OM ; en coordonnées sphériques on écrira $\vec{\mathcal{G}}(M) = \mathcal{G}(M)\vec{u}$.

Par ailleurs toute rotation des masses autour de O laisse la distribution des masses inchangées donc le champ de gravitation a les mêmes invariances ; il ne dépend que de la distance $r = OM$ et on écrira $\vec{\mathcal{G}}(M) = \mathcal{G}(r)\vec{u}$.

Finalement, le théorème de Gauss gravitationnel $\oint_S \vec{\mathcal{G}} \cdot d\vec{S} = -4\pi GM_{\text{int}}$ s'applique à toute surface fermée ; pour une sphère de centre O et de rayon $r \geq R_T$, la masse intérieure est la masse totale M_T de la Terre et on en déduit $4\pi r^2 \mathcal{G}(r) = -4\pi GM_T$ donc finalement $\vec{\mathcal{G}}(M) = -\frac{GM_T}{r^2}\vec{u}$. La force de gravitation s'en déduit,

$$\vec{F}_g = m\vec{\mathcal{G}} = -\frac{GM_T m}{r^2}\vec{u}.$$

Q3. Le théorème du moment cinétique au point fixe O affirme alors que $\frac{d\vec{\mathcal{L}}_O}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{F}_g = \vec{0}$ donc le moment cinétique $\vec{\mathcal{L}}_O = m\vec{OM} \wedge \vec{v}$ est une constante du mouvement ; le vecteur position \vec{OM} évolue donc dans le plan constant perpendiculaire à $\vec{\mathcal{L}}_O$: le mouvement est donc plan.

Q4. Dans ce plan, on peut écrire $\vec{F}_g = -\frac{GM_T m}{r^2}\vec{e}_r = -\text{grad } \mathcal{E}_p$ à condition de poser (à une constante additive près)

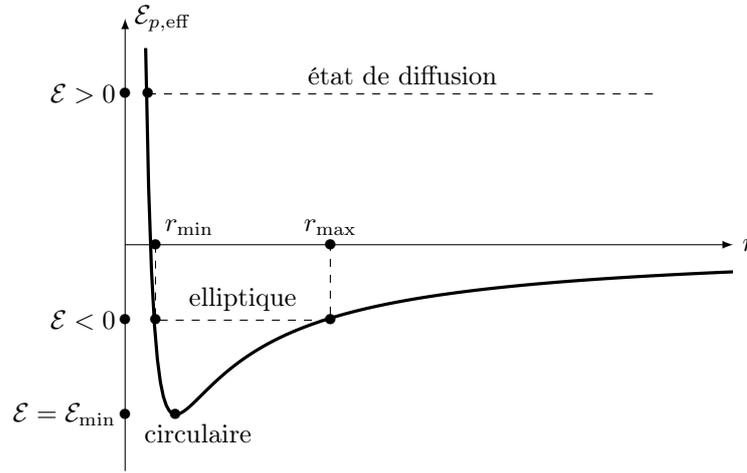
$$\mathcal{E}_p = -\frac{GM_T m}{r}.$$

Q5. L'unique force gravitationnelle étant conservative, l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + \mathcal{E}_p(r) = \text{cte}$ se conserve ;

on peut aussi l'écrire $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$ avec l'énergie potentielle effective $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) = \frac{\mathcal{L}_O^2}{2mr^2} - \frac{GM_T m}{r}$.

Q6. $\dot{r}^2 \geq 0$ donc $\mathcal{E}_m \geq \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$ avec l'égalité seulement aux points de distance extrême, $\dot{r} = 0$.

Q7. Le tracé fait apparaître les trajectoires liées d'énergie strictement négative, la valeur de r oscillant entre deux valeurs extrêmes r_{\min} et r_{\max} .



Q8. Ces valeurs extrêmes sont solutions de l'équation du second degré $\mathcal{E}_m = \frac{\mathcal{L}_O^2}{2mr^2} - \frac{GM_T m}{r}$; on peut les écrire

$$r = \frac{GM_T m}{2|\mathcal{E}_m|} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{2\mathcal{L}_O^2}{G^2 M_T^2 m^3} |\mathcal{E}_m|} \right] \text{ sous réserve bien sûr de la condition } \mathcal{E} \geq \mathcal{E}_{\min}, \text{ cette valeur minimale}$$

correspondant au cas circulaire pour lequel $R = \frac{\mathcal{L}_O^2}{GM_T m^2}$, relation obtenue en écrivant $0 = \frac{d\mathcal{E}_{p,eff}}{dr}$.

Q9. Reportant dans l'expression de l'énergie potentielle effective avec $\dot{r} = 0$ on trouve $\mathcal{E}_{m,alt} = -\frac{GM_T m}{2R}$.

Q10. Comme $\mathcal{L}_O = mRv$ où v est la vitesse constante du satellite, de période T , donnée par $v = \frac{2\pi R}{T}$, l'expression

de R établie ci-dessus devient $\frac{T^2}{R^3} = \frac{(4\pi)^2}{GM_T}$ qui est bien la troisième loi de Kepler.

I.2 Jason-2 : un exemple pour la fin de vie des satellites

Q11. Le grand axe $2a = AP$ de l'orbite de transfert vérifie $2a = AO + OP = R + R_c$ donc $\mathcal{E}_{m,tr} = -\frac{GM_T m}{2a}$ s'écrit

bien $\mathcal{E}_{m,tr} = -\frac{GM_T m}{R + R_c}$.

Q12. On en déduit $\Delta\mathcal{E}_m = GM_T m \left(\frac{1}{2R} - \frac{1}{R + R_c} \right)$ donc $\Delta\mathcal{E}_m = -\frac{GM_T m}{2R} \frac{R - R_c}{R + R_c} < 0$; il faut freiner pour passer à l'orbite de transfert (et s'approcher de la Terre).

Q13. Le même calcul fournit $\Delta\mathcal{E}'_m = \mathcal{E}_{m,c} - \mathcal{E}_{m,tr} = \frac{GM_T m}{2R_c} \frac{R_c - R}{R + R_c} < 0$; il faudra freiner à nouveau.

II Mesure du niveau des océans

II.1 Radar à impulsions

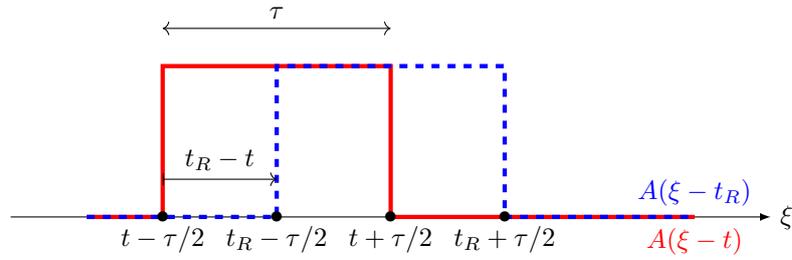
II.1.1 Onde sinusoïdale tronquée

Q14. $\underline{u}(\xi) = \alpha A(\xi - t_R) \exp[i2\pi f_0(\xi - t_R)]$ et $\underline{e}^*(\xi - t) = A(\xi - t) \exp[-i2\pi f_0(\xi - t)]$ car A est une fonction réelle ;

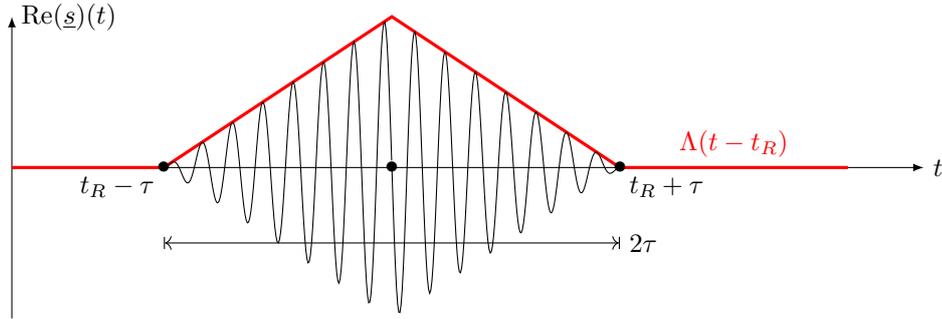
on a donc aussi $\underline{s}(t) = \alpha \exp[i2\pi f_0(t - t_R)] \int_{-\infty}^{+\infty} A(\xi - t_R) A(\xi - t) d\xi$.

Q15. $A(\xi - t_R)$ vaut A_0 si $\xi \in \left[t_R - \frac{\tau}{2}, t_R + \frac{\tau}{2} \right]$ et 0 sinon ; $A(\xi - t)$ se comporte de la même manière ; la condition imposée s'écrit aussi $t - \frac{\tau}{2} \leq t_R - \frac{\tau}{2} \leq t + \frac{\tau}{2} \leq t_R + \frac{\tau}{2}$ d'où les tracés (page suivante). L'intégrale se limite à l'intervalle où le produit n'est pas nul, $\int_{t_R - \tau/2}^{t + \tau/2} A_0^2 d\xi = A_0^2(t - t_R + \tau)$ et

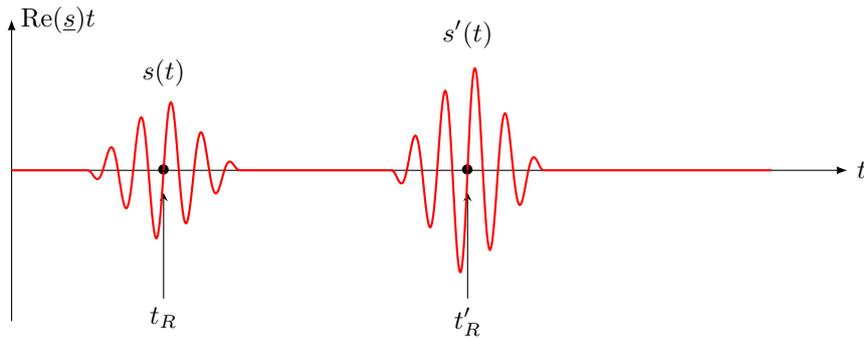
$\underline{s}(t) = \alpha A_0^2 \exp[i2\pi f_0(t - t_R)] (t - t_R + \tau)$.



Le résultat est une des quatre parties du signal affirmé par l'énoncé, dont le tracé ci-après (pour la seule partie réelle) montre une oscillation harmonique de fréquence f_0 avec une enveloppe triangulaire :



Q16. Le tracé demandé superpose deux signaux de ce type, supposés ici largement décalés avec $t'_R - t_R > \tau$:

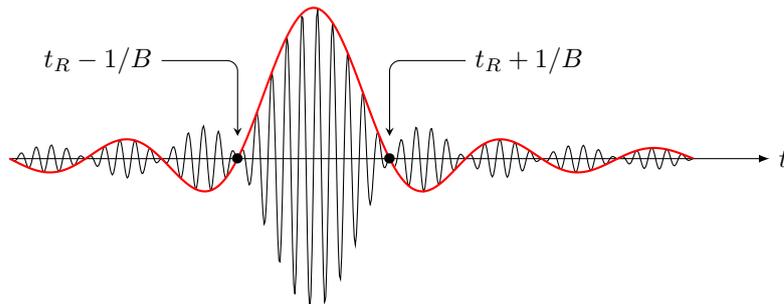


Q17. La condition $t'_R - t_R > \tau$ s'écrit aussi en fonction des distances d' et d puisque le temps nécessaire pour un signal pour faire l'aller-et-retour est $2d/c$; on a donc $\frac{2}{c}(d' - d) > \tau$ ou $d' - d > \Delta d_{\min}$ où $\Delta d_{\min} = \frac{c\tau}{2} = 16 \text{ km}$, ce qui est trop grand par rapport aux (plus faibles) variations qu'on souhaite pouvoir mesurer quant aux niveaux des océans.

II.1.2 Compression d'impulsion

Q18. Avec $\Psi(t) = 2\pi \left(f_0 t + \frac{K}{2} t^2 \right)$ on trouve $f_e(t) = f_0 + Kt$ qui varie entre $f_0 - \frac{K\tau}{2}$ et $f_0 + \frac{K\tau}{2}$ donc $f_c = f_0$ et $B = K\tau$.

Q19. Le tracé du signal fait apparaître les premières annulations de l'enveloppe $\text{sinc}(\pi K\tau(t - t_R))$ qui sont atteintes pour $\text{sinc}(\pi) = 0$ soit pour $t = t_R \pm \frac{1}{K\tau}$:



La condition de résolution devient $t'_R - t_R > \frac{1}{B}$ donc $\Delta d_{\min} = \frac{c}{2B} = 0,47 \text{ m}$, ce qui est bien sûr une immense amélioration.

II.2 Traversée de l'ionosphère

Q20. L'onde proposée se propage dans la $\boxed{\text{direction } \vec{u}_z}$ (si $\text{Re}(k) > 0$) et est polarisée dans la $\boxed{\text{direction } \vec{u}_x}$.

Q21. La condition $\|q\vec{v} \wedge \vec{B}\| \ll \|q\vec{E}\|$ s'écrit aussi en normes $v \ll \frac{E}{B}$ mais, compte tenu de la relation de Maxwell-Faraday, $\vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{E}$ donc la condition demandée devient $\boxed{\|\vec{v}\| \ll \frac{\omega}{\|\vec{k}\|}}$ ou, dans le cas où il y a propagation à la vitesse de phase v_φ , $\boxed{\|\vec{v}\| \ll v_\varphi}$. Cette condition s'identifie souvent à la condition non relativiste $v \ll c$.

Q22. Le principe fondamental de la dynamique $m\vec{a} = q\vec{E}$ s'écrit, en notations complexes avec une solution cherchée sous la forme $\vec{v} = \vec{v}_0 \exp[i(\omega t - k(z - z_0))]$ en fonction de l'accélération $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = i[\omega - kz]\vec{v}$ mais la condition évoquée à la question précédente impose aussi $|z| \ll \frac{\omega}{|k|}$ donc $\vec{a} \simeq \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = i\omega\vec{v}$; on trouve donc $i\omega m\vec{v} = q\vec{E}$ donc respectivement $\boxed{\vec{v}_e = -\frac{e}{im_e\omega}\vec{E}}$ et $\boxed{\vec{v}_c = +\frac{e}{im_c\omega}\vec{E}}$.

Q23. La relation générale $\vec{j} = \sum_i \rho_i \vec{v}_i = -ne\vec{v}_e + ne\vec{v}_c$ permet de négliger le second terme puisque $m_c \gg m_e$ et d'écrire $\boxed{\vec{j} = \gamma\vec{E}}$ avec $\boxed{\gamma = -i\varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega}}$ en posant $\boxed{\omega_p = e\sqrt{\frac{n}{m_e\varepsilon_0}}}$.

Q24. L'onde proposée est $\boxed{\text{transverse}}$ puisque $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$; on en déduit, en notation complexe, $\boxed{\text{div } \vec{E} = 0}$ donc aussi $\boxed{\rho = 0}$ du fait de l'équation de Maxwell-Gauss.

Q25. On peut écrire les trois autres équations de Maxwell sous la même forme, $\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$ donc $\boxed{\vec{e}_z \cdot \vec{B} = 0}$ pour Maxwell-Thomson, $\boxed{\vec{B} = \frac{k}{\omega} \vec{e}_z \wedge \vec{E}}$ (déjà écrite) pour Maxwell-Faraday (elle contient donc déjà l'équation de Maxwell-Thomson) et enfin $-j\vec{k} \wedge \vec{B} = \frac{1}{c^2} j\omega\vec{E} + \mu_0\gamma\vec{E}$ soit aussi $\boxed{-k\vec{e}_z \wedge \vec{B} = \frac{\omega}{c^2}\vec{E} - \frac{\omega_p^2}{\omega c^2}\vec{E}}$ pour Maxwell-Ampère. Éliminant \vec{B} entre ces équations, et compte tenu que $\vec{e}_z \wedge (\vec{e}_z \wedge \vec{E}) = -\vec{E}$ on trouve effectivement $\boxed{k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$.

Q26. Puisque $k^2 < 0$ on cherche une solution complexe qui peut s'écrire $k = \pm i \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c} = \pm \frac{i}{\delta}$. le choix du signe découle de l'interprétation de $\exp[-ik(z - z_0)] = \exp\left[\pm \frac{z - z_0}{\delta}\right]$. Une augmentation indéfinie de l'amplitude du champ électrique étant exclue il faut choisir le signe $-$ pour décrire une $\boxed{\text{onde évanescente}}$ et $\boxed{k = -\frac{i}{\delta}}$ avec

$\boxed{\delta = \frac{c}{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}}$. Finalement on peut écrire pour les champs réels $\boxed{\vec{E} = E_0 \vec{e}_x \cos(\omega t) \exp\left[-\frac{z - z_0}{\delta}\right]}$ d'une part,

et $\boxed{\vec{B} = \frac{E_0}{\delta\omega} \vec{e}_y \sin(\omega t) \exp\left[-\frac{z - z_0}{\delta}\right]}$ d'autre part.

Q27. Le vecteur de Poynting $\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ est proportionnel à $\cos(\omega t) \sin(\omega t)$ donc en moyenne temporelle $\boxed{\langle \vec{R} \rangle = \vec{0}}$: une onde évanescence ne transporte en moyenne aucune puissance.

Q28. On a maintenant $\boxed{k = +\frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}}$ (signe $+$ si l'onde se propage dans le sens positif de l'axe (Oz)) et les

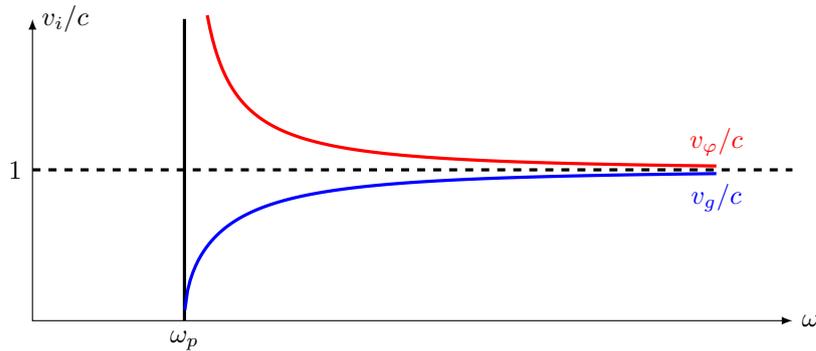
champs réels s'écrivent $\vec{E} = E_0 \vec{e}_x \cos(\omega t - k(z - z_0))$ et $\vec{B} = \frac{kE_0}{\omega} \vec{e}_y \cos(\omega t - k(z - z_0))$. Il s'agit d'une onde électromagnétique plane progressive et monochromatique en plus d'être polarisée rectilignement.

Q29. Puisque l'onde ne se propage que si $\omega > \omega_p$ le milieu est un filtre passe-haut de pulsation de coupure ω_p .

Q30. Il faut que $\omega > \omega_{p,\max}$ avec $\omega_{p,\max} = e \sqrt{\frac{n_{\max}}{m_e \epsilon_0}}$ avec $n_{\max} \simeq 2 \cdot 10^{12} \text{ m}^{-3}$ soit $f > f_{p,\max} \simeq 12 \text{ MHz}$. Ainsi même la plus basse des fréquences du spectre utilisé, $f_0 - \frac{B}{2}$, est largement au-dessus de la fréquence de coupure.

Q31. Par définition, $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$ donc $v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$ tandis que $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ conduit après quelques calculs à $v_\varphi v_g = c^2$

donc $v_g = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$. Les tracés s'en déduisent immédiatement :



Q32. La vitesse de phase dépend de la pulsation, $v_\varphi = v_\varphi(\omega)$; c'est donc par définition un milieu dispersif (sauf si $\omega \gg \omega_p$ avec $v_\varphi \rightarrow c = \text{cte}$).

Q33. L'écho a lieu au même endroit donc la seule différence vient de l'aller-et-retour de longueur 2ℓ parcouru respectivement aux vitesses de groupe (ce sont des impulsions) v_{g0} et $v_{g1} < v_{g0}$ puisque $f_1 < f_0$. L'écart est donc $\Delta t = \frac{2\ell}{c} \left[\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}} - \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_1^2}} \right]$ ou, en faisant le développement limité de l'énoncé, $\Delta t = \frac{\ell \omega_p^2}{c} \left[\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_0^2} \right]$

Q34. Le temps de retour du signal de fréquence f_0 (en fixant l'instant 0 à l'émission) est $t_0 = \frac{2d}{c} + \delta t_0$ où δt_0 est le retard dû à la traversée de l'ionosphère, $\delta t_0 = 2\ell \left[\frac{1}{v_g} - \frac{1}{c} \right]$ soit $\delta t_0 = \frac{\ell \omega_p^2}{c \omega_1^2} = \Delta t \frac{\omega_0^2}{\omega_1^2 - \omega_0^2}$. Finalement

$$d = \frac{c t_0}{2} - \frac{c}{2} \delta t_0 \text{ donc } \varepsilon = \frac{c \Delta t}{2} \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega_1^2}.$$

Q35. Cette erreur est justement le terme correctif $\varepsilon = \frac{n e^2 \ell}{2 m_e \epsilon_0 \omega_0^2} = 0,1 \text{ m}$; cette erreur reste significative si on veut mesurer de manière précise la hauteur des marées ou des vagues par exemple, d'où le choix de la modulation de fréquence pour améliorer encore la précision.

III Voile solaire

III.1 Pression de radiation

Q36. La relation de passage s'écrit ici, avec $\vec{E}_2 = \vec{0}$ dans le milieu métallique, $-\vec{E}_i(x=0) - \vec{E}_r(x=0) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x$ d'où les trois projections sur les axes des coordonnées cartésiennes, $0 = \sigma$, $0 = E'_{0y}$ et $0 = E_0 + E'_{0x}$ d'où la forme simplifiée du champ électrique réfléchi, $\vec{E}_r = -E_0 \exp[i(\omega t + kx)] \vec{e}_z$.

Q37. Pour chacune des ondes incidente et réfléchie, la structure d'OPPM permet d'exploiter la relation de structure $\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}$ sous la forme $\vec{B} = \pm \frac{1}{c} \vec{e}_x \wedge \vec{E}$ donc $\vec{B}_i = -\frac{E_0}{c} \exp[i(\omega t - kx)] \vec{e}_y$, $\vec{B}_r = -\frac{E_0}{c} \exp[i(\omega t + kx)] \vec{e}_y$ et,

dans le plan $x = 0^-$, $\vec{B} = -\frac{2E_0}{c} \exp[i\omega t] \vec{e}_y$. La relation de passage s'écrit ici, avec $\vec{B}_2 = \vec{0}$, $\frac{2E_0}{c} \exp[i\omega t] \vec{e}_y = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_x$. Le vecteur \vec{j}_s , a priori dans le plan (Oyz) , n'a donc de composante que selon \vec{e}_z (selon le champ électrique incident donc) avec $\vec{j}_s = \frac{2E_0}{\mu_0 c} \exp[i\omega t] \vec{e}_z$ ou, en notations réelles, $\vec{j}_s = \frac{2E_0}{\mu_0 c} \cos(\omega t) \vec{e}_z$.

Q38. On exprime seulement la force de Laplace $\delta \vec{F}_L = \delta i a \vec{e}_z \wedge \vec{B}_i$ créée par le champ *incident* car le champ réfléchi est lui-même créé par les courants surfaciques. On doit de plus, dans cette expression non linéaire, utiliser l'expression réelle du champ magnétique et on a donc $\delta \vec{F}_L = a \delta y \vec{j}_s \wedge \text{Re}(\vec{B}_i(x=0))$ et, par intégration, $\vec{F}_L = a^2 \vec{j}_s \wedge \text{Re}(\vec{B}_i(x=0))$.

Q39. On peut aussi écrire $\vec{F}_L = a^2 \frac{2E_0^2}{\mu_0 c^2} \cos^2(\omega t) \vec{e}_x$ tandis qu'il n'existe pas de force électrique (charge surfacique nulle et champ électrique nul sur la surface $x = 0$); en moyenne on a donc $\vec{f} = \frac{\vec{F}_L}{a^2}$ donc $\langle \vec{f} \rangle = P_m \vec{e}_x$ avec pour pression de radiation $P_m = \frac{E_0^2}{\mu_0 c^2}$. L'intensité I de l'onde incidente se confond avec la valeur moyenne du vecteur de Poynting associé l'onde incidente, $\vec{E} = \frac{\vec{E}_i \wedge \vec{B}_i}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kz) \vec{e}_x$ (on est revenu aux valeurs réelles pour ce calcul non linéaire) donc $I = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}$; finalement $P_m = 2 \frac{I}{c}$.

Q40. Il faut que la relation $P_m S = ma$ soit réalisée avec $a \approx 10^{-2} \text{ m/s}^2$ soit $S = \frac{mac}{2I} = 3 \cdot 10^6 \text{ m}^2$; cela représente une voile carrée de 1,7 km de côté, donc un problème technique immense mais peut-être pas irréalisable.

III.2 Libération du vaisseau

III.2.1 Position du problème

Q41. En coordonnées polaires, $\vec{r} = r \vec{e}_r$, $\vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta$ et $\vec{a} = \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \vec{e}_r + \left(2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right) \vec{e}_\theta$
ou, avec des notations plus compactes $\dot{g} = \frac{dg}{dt}$ $\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$ et $\vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{e}_\theta$.

Q42. La force de gravitation sur un corps assimilé à un point matériel est $\vec{F}_g = -\frac{GM_T m}{r^2} \vec{e}_r$ tandis que la force de pression de radiation est portée par $\vec{n} = \cos \alpha \vec{e}_r + \sin \alpha \vec{e}_\theta$ où $\alpha = \varphi - \theta$; en l'absence d'autre force on peut donc écrire $F_r = -\frac{GM_T m}{r^2} + L(r, \theta) P_m S \cos^2(\varphi) \cos(\varphi - \theta)$ et $F_\theta = L(r, \theta) P_m S \cos^2(\varphi) \sin(\varphi - \theta)$.

Q43. Puisque $v_r = \dot{r}$ et $v_\theta = r\dot{\theta}$ on a aussi $\dot{v}_r = \ddot{r} = r\dot{\theta}^2 + a_r$ et $\dot{v}_\theta = \dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = -\dot{r}\dot{\theta} + a_\theta$ qu'on peut effectivement écrire, avec $F_r = ma_r$, $F_\theta = ma_\theta$, sous la forme $\dot{v}_r = \frac{v_\theta^2}{r} + \frac{F_r}{m}$, $\dot{v}_\theta = -\frac{v_r v_\theta}{r} + \frac{F_\theta}{m}$.

III.2.2 Énergie et manœuvre optimale

Q44. L'énergie mécanique est $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m (v_r^2 + v_\theta^2) - \frac{GM_T m}{r}$.

Q45. Sa dérivée est égale à la seule puissance des forces non conservatives, $\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = S \vec{f} \cdot \vec{v} = L(r, \theta) P_m S \cos^2(\varphi) \vec{v} \cdot \vec{n}$
donc $\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = L(r, \theta) P_m S \cos^2(\varphi) [v_r \cos(\varphi - \theta) + v_\theta \sin(\varphi - \theta)]$ soit $K_m = P_m S$.

III.3 Simulation numérique du mouvement du vaisseau

III.3.1 Résolution numérique

Q46. On peut utiliser $T = \text{np.arange}(0, \text{tmax}, \text{dt})$.

Q47. L'énoncé suggère une recherche en simple balayage :

```

1 def recherche_phi_optimal(vr, vtheta, theta):
2     dphi = 2.0E-3
3     phi = -np.pi/2
4     phi0 = phi
5     P0 = dEmdt(vr, vtheta, theta, phi0)
6     phi += dphi
7     while phi <= np.pi/2:
8         P = dEmdt(vr, vtheta, theta, phi)
9         if P > P0:
10            phi0 = phi
11            P0 = P
12            phi += dphi
13    return phi0

```

sous réserve de la définition préalable de la fonction exprimant la dérivée de l'énergie mécanique :

```

1 def dEmdt(vr, vtheta, theta, phi):
2     PS = vr*np.cos(phi-theta) + vtheta*np.sin(phi-theta) # produit scalaire
3     return Km*PS*np.cos(phi)**2

```

en supposant à ce stade que $L(r, \theta) = 1$. Note : la fonction donnerait aussi le bon résultat pour φ optimal en n'utilisant pas la valeur de K_m dans la dernière ligne.

Q48. Le passage dans l'ombre de la Terre (et $L(r, \theta) = 0$) a lieu si $|r \sin(\theta)| < R_T$ et $\cos \theta > 0$ d'où le code proposé :

```

1 def derivees_comp_vitesse(r, theta, vr, vth, phi):
2     Fr = - G*MT*m/r/r
3     Fth = 0
4     if abs(r*np.sin(theta)) < RT and np.cos(theta) > 0:
5         Fv = Km*np.cos(phi)**2
6         Fvr = Fv*np.cos(phi-theta)
7         Fvth = Fv*np.sin(phi-theta)
8         Fr += Fvr
9         Fth += Fvth
10    vrpt = Fr/m + vth**2/r
11    vthpt = Fth/m - vr*vth/r
12    return vrpt, vthpt

```

Q49. Il suffit d'écrire :

```

1 r += vr*dt
2 theta += vth/r*dt
3 vr += vr_pt*dt
4 vth += vth_pt*dt

```

Note : le code proposé mélange, dans la fonction `simulation`, les notations `vtheta` et `vth` pour les variables, et `Vtheta` et `Vth` pour les listes. C'est la forme la plus courte qui a été choisie ici.

III.3.2 Exploitation de la simulation

Q50. En ces points la vitesse du vaisseau est $\vec{v} = v_x \vec{e}_x$ avec $v_x < 0$; la force de pression de radiation ne peut alors avoir pour effet que de ralentir le vaisseau et diminuer son énergie cinétique. Choisir le plan de la voile parallèle à (Oxz) supprime à cet instant la poussée et évite de diminuer l'énergie du vaisseau.

Q51. La vitesse de libération est la vitesse minimale nécessaire pour dépasser le domaine des états liés, donc pour

obtenir une énergie non négative ; on pourra écrire $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_T m}{r} > 0$ ou $v > v_{\text{lib}}(r)$ avec $v_{\text{lib}}(r) = \sqrt{\frac{2GM_T}{r}}$.

Q52. L'énergie mécanique du mobile est $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_T}{r} = \frac{1}{2}m(v^2 - v_{\text{lib}}^2(r))$ donc $\frac{\|\vec{v}\|}{v_{\text{lib}}(r)} = \sqrt{1 + \frac{\mathcal{E}_m r}{GM_T m}}$.

Les oscillations du rapport v/v_{lib} sont donc les oscillations de r sur des trajectoires de plus en plus elliptiques. Leur amplitude augmente puisque \mathcal{E}_m augmente.