

CC-INP, autour des générateurs thermoélectriques

Physique PC 2025

Solutions proposées par Paul Roux

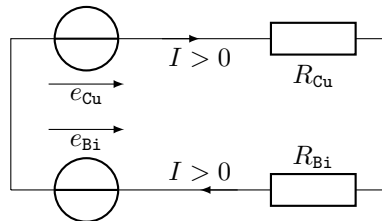
I L'effet Seebeck

I.1 Découverte du phénomène

- Q1.** La loi d'Ohm locale s'écrit $\vec{j}_{\text{el}} = \sigma \vec{E}$; on en déduit que le sens du courant est le même que celui du champ électrique, dans le sens des potentiels décroissants donc de V_1 vers V_2 , dans le sens de $\vec{u}_x$. Comme $\vec{j}_{\text{el}}$ est uniforme, on a aussi $-\frac{dV}{dx} = E = \frac{j_{\text{el}}}{\sigma}$ ou $V = -\frac{x j_{\text{el}}}{\sigma} + \text{cte}$ soit aussi $V_2 - V_1 = -\frac{L j_{\text{el}}}{\sigma}$; par ailleurs $I = \int \vec{j}_{\text{el}} \cdot d\vec{S}$ à travers une section droite du conducteur s'écrit $I = j_{\text{el}} S$, toujours à cause du caractère uniforme de $\vec{j}_{\text{el}}$. On peut finalement reconnaître $V_1 - V_2 = RI$ avec $R = \frac{L}{\sigma S}$.
- Q2.** La loi de Fourier s'écrit $\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$; l'analogie avec la loi d'Ohm associe donc les grandeurs électriques et thermique selon $\vec{j}_{\text{el}} \rightarrow \vec{j}_{\text{th}}$, $V \rightarrow T$, $\sigma \rightarrow \lambda$ et $I \rightarrow \Phi$ où Φ est le flux du vecteur $\vec{j}_{\text{th}}$, c'est-à-dire la puissance thermique traversant une section droite du cylindre. On aura donc $T_1 - T_2 = R_{\text{th}} \Phi$ avec $R_{\text{th}} = \frac{L}{\lambda S}$.
- Q3.** La relation $\alpha \overrightarrow{\text{grad}} T = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ s'écrit aussi $\alpha T = -V + \text{cte}$ donc $V_1 - V_2 = -\alpha(T_1 - T_2)$ ou $e = -\alpha(T_1 - T_2)$.
- Q4.** La vitesse dont il est question ici est celle de l'agitation thermique, donnée par la relation $\frac{1}{2} m_e u^2 = \frac{3}{2} k_B T$, c'est-à-dire que la vitesse est la plus élevée dans le compartiment A où la température est aussi la plus élevée. De ce fait, les électrons quitteront le compartiment A avec un flux partant plus élevé que ceux qui viendront en sens inverse de B vers A; le bilan est un flux d'électrons de A vers B. Plus généralement les électrons se déplaceront dans le sens opposé à $\overrightarrow{\text{grad}} T$.
- Q5.** On aura un excès d'électrons qui se formera dans B et réciproquement donc $Q_B < 0$ et $Q_A > 0$. Le champ électrique qui en résulte est dirigé des charges + vers les charges - donc $\vec{E}$ sera dirigé de A vers B, c'est-à-dire dans le sens de $-\overrightarrow{\text{grad}} T$; on trouverait ici $\alpha < 0$.
- Q6.** La réponse dépend manifestement du type de matériau donc l'analyse physique précédente est insuffisante ou incorrecte, possiblement à cause d'autres transports de charge que ceux assurés par les seuls électrons.

I.2 Étude de l'expérience historique de Seebeck

- Q7.** D'après ce qui précède $e_{\text{Bi}} = -\alpha_{\text{Bi}}(T_C - T'_C)$ soit $e_{\text{Bi}} = -\alpha_{\text{Bi}}(T - T_0)$ et bien sûr $e_{\text{Cu}} = -\alpha_{\text{Cu}}(T - T_0)$.
- Q8.** Comme $T - T_0 > 0$ et $|\alpha_{\text{Bi}}| > |\alpha_{\text{Cu}}|$ le sens du courant est imposé par le Bismuth :

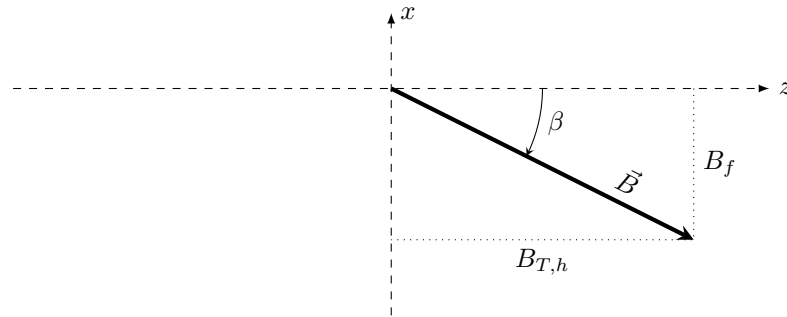


- Q9.** La loi de Pouillet s'écrit $I = \frac{e_{\text{Cu}} - e_{\text{Bi}}}{R_{\text{Cu}} + R_{\text{Bi}}}$ ou $I = (-\alpha_{\text{Bi}} + \alpha_{\text{Cu}}) \frac{T - T_0}{R_{\text{Cu}} + R_{\text{Bi}}} \simeq \sigma_{\text{Bi}} S (-\alpha_{\text{Bi}} + \alpha_{\text{Cu}}) \frac{T - T_0}{L}$ donc numériquement $I = 6,37 \text{ A}$.

Q10. Tout plan contenant l'axe du fil est plan de symétrie des courants donc $\vec{B}$ est perpendiculaire à ce plan : $\vec{B}(M) = B(M)\vec{u}_\theta$. Le fil donc les sources du champ est invariant de révolution autour du fil, $\frac{\partial B}{\partial \theta} = 0$; il est aussi infini donc invariant par translation et $\frac{\partial B}{\partial z} = 0$ et $\vec{B} = B(r)\vec{u}_\theta$. On peut donc appliquer le théorème d'Ampère $\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I$ à un cercle de rayon r et d'axe (Oz) , orienté dans le sens direct autour de cet axe ; il vient $2\pi r B(r) = \mu_0 I$ ou enfin $\boxed{\vec{B}_{f,Bi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta}$.

Q11. Au point M considéré $r = \frac{d}{2}$ et $\vec{u}_\theta = -\vec{u}_x$ donc $\vec{B}_{f,Bi} = -\frac{\mu_0 I}{\pi d} \vec{u}_x$; le même raisonnement s'applique au champ créé par le fil de cuivre, à la même distance $r = \frac{d}{2}$ du fil mais avec un double changement de signe (le courant est dans l'autre sens et M est de l'autre côté du fil) donc par superposition $\boxed{\vec{B}_f = -\frac{2\mu_0 I}{\pi d} \vec{u}_x}$.

Q12. Dans le plan horizontal le champ est la somme du champ terrestre et du champ créé par les fils, selon le schéma ci-après, avec donc $\tan \beta = \frac{B_f}{B_{T,h}} = \frac{2\mu_0 I}{\pi d B_{T,h}}$ soit $\boxed{\beta = 78^\circ}$.



II Principe d'un générateur thermoélectrique

Q13. S'agissant d'une machine destinée à fournir de la puissance électrique, $\boxed{\mathcal{P}_{el} < 0}$. Cette puissance est puisée à la source chaude et $\boxed{\mathcal{P}_C > 0}$ et une partie en est restituée à la source froide, $\boxed{\mathcal{P}_F < 0}$. Le rendement de la machine, conçue comme un moteur, est donc $\boxed{\eta = -\frac{\mathcal{P}_{el}}{\mathcal{P}_C}}$.

Q14. En régime stationnaire les fonctions d'état ne varient pas, $\boxed{dS = 0 \text{ et } dU = 0}$. Le module étant indilatable il ne reçoit pas de travail des forces de pression ; le seul travail reçu par le module pendant une évolution de durée dt est donc électrique et $0 = dU = (\mathcal{P}_{el} + \mathcal{P}_C + \mathcal{P}_F) dt$ est l'expression du premier principe, et $0 = dS > \left(\frac{\mathcal{P}_C}{T_C} + \frac{\mathcal{P}_F}{T_F} \right) dt$ celle du second principe. On en déduit $\mathcal{P}_{el} + \mathcal{P}_C \left(1 - \frac{T_F}{T_C} \right) > 0$ qu'on écrit aussi

$\boxed{\eta < \eta_{Carnot}}$ à condition de poser $\boxed{\eta_{Carnot} = 1 - \frac{T_F}{T_C}}$. L'inégalité est due à la création d'entropie et le rendement

limite ne peut donc être atteint qu'en cas de fonctionnement $\boxed{\text{réversible}}$ du module.

Q15. Le déplacement des porteurs de charges $+$ (les trous) se fait dans le même sens que le courant électrique dans le semi-conducteur dopé p , c'est-à-dire dans le sens de $+\vec{u}_x$. De même, le déplacement des porteurs de charges $-$ (les électrons) se fait en sens inverse du courant électrique dans le semi-conducteur dopé n , c'est-à-dire là aussi dans le sens de $+\vec{u}_x$. Ces deux déplacements sont contrôlés par l'effet thermoélectrique, donc de la source chaude vers la source froide.

Avec deux semi-conducteurs de même dopage, les effets thermoélectroniques auraient été de sens contraire, comme dans le cas de l'expérience historique de Seebeck. On peut alors dans un tel cas réaliser un générateur thermoélectrique mais les effets des deux barreaux s'opposent au lieu de s'ajouter et la puissance électrique disponible serait plus faible.

Q16. Dans le cylindre dopé p , $\boxed{\vec{j}_{el} = \frac{I}{S} \vec{u}_x}$.

Q17. La puissance thermique cédée par unité de volume (effet Joule) est $p_v d\tau$ donc le premier principe de la thermodynamique appliqué au système considéré est $dU = \delta Q + \delta W$ où $dU = 0$ en régime stationnaire, $\delta W = p_v dt S dx$ et $\delta Q = (j_{th}(x) - j_{th}(x + dx))S dt$. Finalement le bilan thermique prend la forme $-\frac{dj_{th}}{dx} + p_v = 0$.

Q18. On a maintenant $p_v = \vec{E} \cdot \vec{j}_{el} = \frac{1}{\sigma} j_{el}^2 + \alpha j_{el} \frac{dT}{dx}$ tandis que $\frac{dj_{th}}{dx} = \alpha j_{el} \frac{dT}{dx} - \lambda \frac{d^2 T}{dx^2}$ puisque $j_{el} = \frac{I}{S}$ est uniforme, soit $\frac{dj_{el}}{dx} = 0$. On constate l'élimination du terme « croisé » du premier ordre $\alpha j_{el} \frac{dT}{dx}$ et il reste $\frac{d^2 T}{dx^2} = -k$ où $k = \frac{I^2}{\lambda \sigma S^2}$.

Q19. La dérivée seconde est constante donc par intégrations successives $T = -\frac{1}{2} k x^2 + Ax + B$ où les constantes A et B se déduisent de $T(0) = T_C$ et $T(L) = T_F$ et on trouve $T(x) = T_C - \frac{k}{2} (x^2 - xL) - \Delta T \frac{x}{L}$.

Q20. La puissance demandée est le flux de $\vec{j}_{th}$ dirigé vers le semi-conducteur, donc $\mathcal{P} = +j_{th}(x=0)S$ avec par ailleurs $j_{th} = \alpha T_C \frac{I}{S} - \lambda \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0}$ en ce point, ou encore $j_{th} = \frac{\alpha I T_C}{S} + \lambda \frac{\Delta T}{L} - \frac{\lambda L}{2} \frac{I^2}{\lambda \sigma S^2}$ et on peut effectivement regrouper les termes selon $\mathcal{P}_{C,p} = \alpha_p I T_C + \frac{\Delta T}{R_{th,p}} - \frac{1}{2} R_{el,p} I^2$.

Q21. La puissance totale fournie aux deux jambes du module par la source chaude est donc la somme des deux termes ainsi calculés, $\mathcal{P}_C = \alpha I T_C + \frac{\Delta T}{R_{th}} - \frac{1}{2} R_{el} I^2$ à condition de poser $\frac{1}{R_{th}} = \frac{1}{R_{th,p}} + \frac{1}{R_{th,n}}$ (association électrique en parallèle) et $R_{el} = R_{el,p} + R_{el,n}$ (association thermique en série).

Q22. $\mathcal{P}_{el} = -\mathcal{P}_C - \mathcal{P}_F$ d'après le premier principe donc $\mathcal{P}_{el} = -\alpha I (T_C - T_F) + R_{el} I^2$. On note l'élimination du terme de résistance thermique : il s'agit seulement d'un transfert de la source chaude à la source froide à travers les deux jambes du module.

Q23. La résistance de charge reçoit $-\mathcal{P}_{el} = R_c I^2$ donc $(R_c + R_{el}) I^2 - \alpha \Delta T I = 0$ donc $I = \frac{\alpha \Delta T}{R_c + R_{el}}$. Tout se passe comme si le module était un générateur électrique de Thévenin de force électro-motrice $e = \alpha \Delta T$ et de résistance électrique interne R_{el} .

Q24. On retrouve donc les propriétés de l'adaptation d'impédance en écrivant $R_c I^2 = \alpha^2 \Delta T^2 \frac{R_c}{(R_c + R_{el})^2} = f(R_c)$ avec un maximum pour $\frac{\partial f}{\partial R_c} = 0$ soit $R_c = R_{el}$ et cette puissance maximale vaut $|\mathcal{P}_{el}|_{\max} = \frac{\alpha^2 \Delta T^2}{4 R_{el}}$.

Q25. Pour chaque module, $\alpha = \alpha_p - \alpha_n = 4,02 \cdot 10^{-4} \text{ V/K}$, $R_{el} = \frac{L}{S} \left(\frac{1}{\sigma_p} + \frac{1}{\sigma_n} \right) = 1,47 \Omega$ donc la puissance fournie par ce module est $\mathcal{P}_1 = 2,75 \cdot 10^{-8} \text{ W}$ donc il faut N modules pour que $\mathcal{P}_N = N \mathcal{P}_1 > 15 \mu\text{W}$ donc $N > 545$.

Q26. D'après le faisceau de courbes, maximiser le facteur de mérite permet aussi de maximiser le rendement du module. En particulier avec $T_c \sim 800 \text{ K}$ et un facteur de mérite compris entre 0,5 et 1, le rendement maximal du module varie entre 10 et 15%, ce qui est nettement inférieur au rendement des moteurs thermiques usuels (35% typiquement) ; toutefois ces derniers n'opèrent qu'à plus haute température.

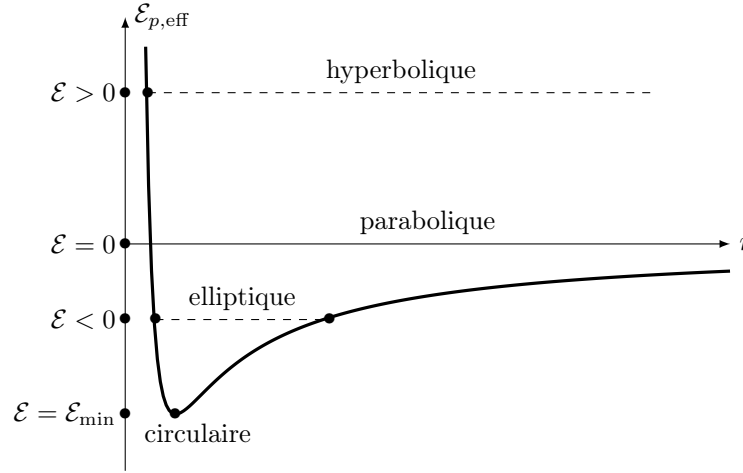
III L'assistance gravitationnelle

III.1 Généralités

Q27. Le théorème du moment cinétique s'écrit $\frac{d\vec{L}_J}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_J$ où le moment de la force gravitationnelle $\vec{\mathcal{M}}_J = \vec{J}\vec{M} \wedge \vec{F}$ est nul car cette force est centrale, $\vec{F} = -\frac{\mathcal{G} M_J m}{r^2} \vec{u}_r$. On a donc $\vec{L}_J = m \vec{J}\vec{P} \wedge \vec{v}_P = \text{cte}$ donc le vecteur $\vec{J}\vec{P}$ reste dans un plan constant, perpendiculaire à $\vec{J}_J$: le mouvement est plan. Dans les coordonnées polaires proposées $\vec{J}\vec{P} = r \vec{u}_r$ et $\vec{v}_P = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$ donc $L_J = m r^2 \dot{\theta}$ où $L_J = \|\vec{L}_J\| > 0$; ainsi, $r^2 \dot{\theta} = C = \frac{L_J}{m} = \text{cte}$.

Q28. Posant $\vec{F} = -\frac{\mathcal{G}M_J m}{r^2}\vec{u}_r = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dr}\vec{u}_r$, on trouve l'énergie potentielle (à une constante additive arbitraire près, que l'on prendra nulle pour tenir compte de l'indication de l'énoncé) $\mathcal{E}_p = -\frac{\mathcal{G}M_J m}{r}$.

Q29. L'unique force gravitationnelle étant conservative, l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + \mathcal{E}_p(r) = \text{cte}$ se conserve ; on peut aussi l'écrire $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$ avec l'énergie potentielle effective $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} + \mathcal{E}_p(r)$. Le tracé fait apparaître les trajectoires coniques possibles, limitées par la condition $\dot{r}^2 \geq 0$ donc $\mathcal{E} > \mathcal{E}_{p,\text{eff}}$.



Q30. La vitesse de libération correspond à la première trajectoire libre, soit $\mathcal{E} = 0$; on en déduit $v_\ell = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M_J}{r}}$.

III.2 Sphère de Hill de Jupiter

Q31. Le mouvement du Jupiter, assimilé ici à un point matériel, est circulaire uniforme sous l'action du champ de gravitation solaire donc $M_J\Omega^2 d = \frac{\mathcal{G}M_S M_J}{d^2}$ qui permet de retrouver la troisième loi de Kepler $\Omega = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_S}{d^3}}$

donc d'en déduire $V_{J,h} = \Omega d$ soit $V_{J,h} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_S}{d}} = 13,1 \text{ km/s}$.

Q32. Le référentiel $\mathcal{R}'$ est, relativement au référentiel galiléen $\mathcal{R}_h$, en rotation uniforme de vitesse angulaire $\Omega\vec{u}_z$ autour de l'axe (Oz) ; il n'est donc pas galiléen.

Q33. La sonde est soumise aux forces de gravité de Jupiter $\vec{F}_{J \rightarrow P} = +\frac{\mathcal{G}M_J m}{r^2}\vec{u}_x'$ et du Soleil $\vec{F}_{S \rightarrow P} = -\frac{\mathcal{G}M_S m}{(d-r)^2}\vec{u}_x'$ ainsi qu'aux pseudo-forces d'inertie d'entraînement $\vec{F}_e = m\Omega^2(d-r)\vec{u}_x'$; la sonde est en, équilibre dans le référentiel $\mathcal{R}'$ donc la force d'inertie de Coriolis est nulle.

Q34. La condition d'équilibre relatif de la sonde s'écrit, en projection sur $\vec{u}_x'$ et compte tenu de l'expression de Ω , $\frac{M_J}{r^2} - \frac{M_S}{(d-r)^2} + \frac{M_S}{d^3}(d-r) = 0$ soit après simplification $M_J d^3(d-r)^2 = M_S r^2 d^3 - M_S (d-r)^3 r^2$ qui est la relation demandée. On peut aussi écrire $(d-r)^2 = d^2$ (à l'ordre zéro) et $(d-r)^3 - d^3 = -3d^2 r$ (à l'ordre 1) d'où l'équation $r_H = d \left(\frac{M_J}{3M_S} \right)^{1/3}$. Numériquement, $r_H = 5,31 \cdot 10^{10} \text{ m}$.

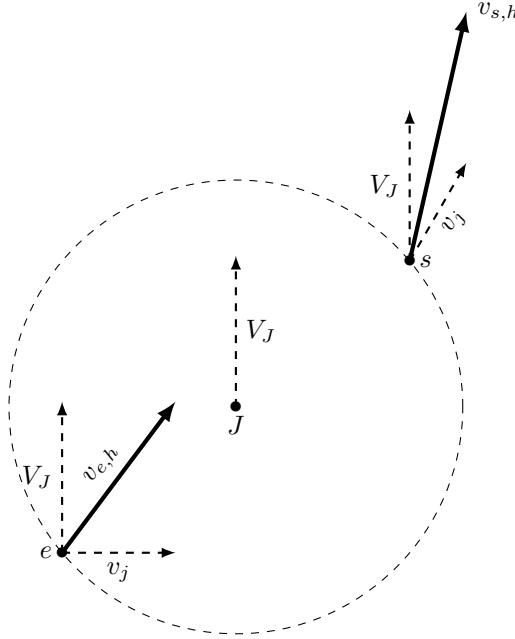
III.3 Principe de l'assistance gravitationnelle

Q35. On fait ici l'hypothèse d'un mouvement relativement à un référentiel galiléen sous l'action de la seule force d'attraction de Jupiter, qui est conservative et ne dépend que de la distance $r = JP$. Les points d'entrée et de sortie de la sphère de Hill sont à la même distance $r = r_H$ de Jupiter donc l'énergie potentielle y a même valeur $\mathcal{E}_p = -\frac{\mathcal{G}M_J m}{r}$. L'énergie cinétique $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2$ y est donc aussi la même et $v_{e,j} = v_{s,j} = v_j$.

Q36. La trajectoire provient d'une grande distance de Jupiter et se dirige aussi vers l'infini : il s'agit d'un état de diffusion d'énergie positive, donc $v_j > v_\ell$. Numériquement $v_\ell = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M_J}{r_H}} = 2,2 \text{ km/s}$. On a donc bien $v_j > v_\ell$.

Q37. La loi de composition des vitesses fournit $\vec{v}_{e,h} = \vec{v}_{e,j} + \vec{V}_{j,h}$ où la vitesse d'entraînement est $\vec{V}_{j/h} = V_{j,h}\vec{u}_y$ puisqu'on admet ici un mouvement d'entraînement, à vitesse uniforme. De même, $\vec{v}_{s,h} = \vec{v}_{s,j} + \vec{V}_{j,h}$.

Q38. On réalise le tracé avec $v_e \simeq 10 \text{ km/s}$ et $V_{j,h} \simeq 13 \text{ km/s}$; la vitesse héliocentrique de sortie a effectivement augmenté car V_J et la déviation sont dans le « même sens » : Jupiter entraîne la sonde à sa suite, comme une fronde.



Q39. De façon évidente $v_{e,h} = \sqrt{v_j^2 + V_{j,h}^2}$ (théorème de Pythagore) tandis que $\vec{v}_{s,h} = v_j \cos D \vec{u}_x + (V_{j,h} + v_j \sin D) \vec{u}_z$ donc $v_{s,h} = \sqrt{v_j^2 + V_{j,h}^2 + 2v_j V_{j,h} \sin D}$.

Q40. Numériquement $v_{e,h} = 16,5 \text{ km/s}$, $v_{s,h} = 22,3 \text{ km/s}$, $\Delta v_h = 5,85 \text{ km/s}$, $\Delta \mathcal{E}_{c,h} = 8,2 \cdot 10^{10} \text{ J}$. Comme le système formé de la sonde et de Jupiter est quasiment isolé, le gain d'énergie de la sonde correspond à une perte équivalente de l'énergie de Jupiter. On notera que l'énergie cinétique de la planète est de l'ordre de $\frac{1}{2} M_J V_{j,h}^2 \simeq 1,6 \cdot 10^{35} \text{ J}$ dont une telle perte d'énergie est totalement négligeable pour ce qui concerne le mouvement de Jupiter.

Q41. L'effet de la fronde gravitationnelle est près de 100 fois plus important que l'effet de la consommation des ergols embarqués. Ceux-ci ne peuvent donc être utilisés que pour des corrections de vitesse de faible amplitude.