Étude d'un modèle probabiliste de ferromagnétisme

NB : Je fais des études de physique et non de mathématiques ! Les démonstrations qui suivent se veulent les plus complètes possibles, mais il est probable que certaines d'entre elles manquent de rigueur. N'hésitez pas à m'en faire part !

J'ai eu plaisir à incorporer à cette correction quelques remarques sur la philosophie du sujet, pour comprendre le lien avec le ferromagnétisme, et la transition de phase ferro/paramagnétisme.

Pour toute suggestion, merci de me contacter à l'adresse mail suivante : melkimathis@gmail.com.

***

Q.1/ La matrice J_n est symétrique et réelle. D'après le théorème spectral, elle est diagonalisable.

Q.2/ On pose $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$. Alors,

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} J_n(i,j) x_i x_j = x^{\mathrm{T}} J_n x$$

Or, d'après le cours,

$$\lambda_{\min} \|x\| \leq x^{\mathrm{T}} J_n x \leq \lambda_{\max} \|x\|$$

Enfin, d'après l'équivalence des normes en dimension finie, on a :

$$\|x\| = \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

Finalement, on obtient l'inégalité demandée.

Q.3/ De l'inégalité précédente, et en remarquant que

$$-n \leq \sum_{i=1}^{n} x_i \leq n$$

on tire l'inégalité souhaitée.

Q.4/ Dans le cas où J_n est une matrice orthogonale, on a :

$$\lambda_{\max} = 1, \qquad \lambda_{\min} = -1$$

Ainsi, l'inégalité précédente devient :

$$\boxed{-n\left(h + \frac{\beta}{2}\right) \leq H_n(h,x) \leq n\left(h + \frac{\beta}{2}\right)}$$

Q.5/ U_n est la matrice dont tous les coefficients valent 1. Cette matrice est de rang 1, donc son noyau est de dimension $n-1$ (d'après le théorème du rang). En particulier, cela implique que X^{n-1} divise χ_{U_n} (polynôme caractéristique de U_n). Ainsi,

$$\chi_{U_n} = X^{n-1}\big(X - \mathrm{tr}(U_n)\big) = X^{n-1}(X - n)$$

Le spectre de U_n est donc :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(U_n) = \{0, n\}}$$

Notons que 0 est de multiplicité $n-1$ tandis que n est simple.

Comme $U_n = nJ_n^{(\mathrm{C})} + I_n$, on déduit que :

$$\boxed{\mathrm{Sp}\left(J_n^{(\mathrm{C})}\right) = \left\{-\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right\}}$$

En particulier, $-1/n$ est de multiplicité $n-1$, et $1 - 1/n$ est simple.

Q.6/ On applique la formule d'Euler pour le cosinus, et on utilise l'expression de la somme géométrique.

$$\sum_{k=1}^{p} \cos(2kx) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{p} e^{2kx} + \sum_{k=1}^{p} e^{-2kx}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{2x}\frac{1-e^{2px}}{1-e^{2x}} + e^{-2x}\frac{1-e^{-2px}}{1-e^{-2x}}\right)$$

On factorise par l'angle moitié au dénominateur, puis on utilise la formule d'Euler pour le sinus.

$$= \frac{1}{2}\left(e^{2x}\frac{1-e^{2px}}{e^{x}(e^{-x}-e^{x})} + e^{-2x}\frac{1-e^{-2px}}{e^{-x}(e^{x}-e^{-x})}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{x}\frac{1-e^{2px}}{-2\sin(x)} + e^{-x}\frac{1-e^{-2px}}{2\sin(x)}\right)$$

On met au même dénominateur.

$$= \frac{1}{2}\frac{e^{-x} - e^{-(2p+1)x} - e^{x} + e^{(2p+1)x}}{2\sin(x)}$$

On regroupe les termes en utilisant la formule d'Euler pour le sinus.

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\big((2p+1)x\big)}{\sin(x)} - 1\right)$$

CQFD.

Q.7/ Par définition, $J_n^{(\mathrm{S})}$ est une matrice symétrique, car son expression est invariante sous l'échange $i \leftrightarrow j$.

Calculons les coefficients de ${J_n^{(\mathrm{S})}}^2$. Soient $1 \leq i, j \leq n$.

$$\left({J_n^{(\mathrm{S})}}^2\right)(i,j) = \sum_{k=1}^{n} J_n(i,k) J_n(k,j)$$

$$\coloneqq \frac{2}{2n+1}\sum_{k=1}^{n} 2\sin\left(\frac{2\pi ik}{2n+1}\right)\sin\left(\frac{2\pi kj}{2n+1}\right)$$

$$= \frac{2}{2n+1}\left(\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{2\pi k(i-j)}{2n+1}\right) - \sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{2\pi k(i+j)}{2n+1}\right)\right)$$

<u>Cas $i \neq j$:</u>

Notons indifféremment $m = |i-j|$ ou $m = i+j$ (l'important est que m est un entier naturel non nul). Alors,

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{2\pi km}{2n+1}\right) \underset{l=2n+1-k}{=} \sum_{l=n+1}^{2n}\cos\left(\frac{2\pi lm}{2n+1}\right)$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{2\pi km}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n}\cos\left(\frac{2\pi km}{2n+1}\right)$$

Or, la somme de droite constitue la somme des projections des sommets d'un polygone régulier centré à $2n$ (pair) sommets. Ces projections se compensent deux à deux, donc la somme s'annule.

Finalement, on trouve :

$$i \neq j \Rightarrow J_n^{(\mathrm{S})}(i,j) = 0$$

<u>Cas $i = j$:</u>

$$\left({J_n^{(\mathrm{S})}}^2\right)(i,i) = \frac{2}{2n+1}\sum_{k=1}^{n} 2\sin^2\left(\frac{2\pi ik}{2n+1}\right) = \frac{2}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\cos\left(2k\frac{2\pi i}{2n+1}\right)\right)$$

On utilise la formule de la question précédente, avec $x = \frac{2\pi i}{2n+1} \in \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$:

$$= \frac{2}{2n+1}\left[n - \frac{1}{2}\left(\frac{\overbrace{\sin(2\pi i)}^{=0}}{\sin\left(\frac{2\pi i}{2n+1}\right)} - 1\right)\right]$$

$$= 1$$

Finalement,

$$\left(J_n^{(\mathrm{S})}\right)^{\mathrm{T}} J_n^{(\mathrm{S})} = I_n$$

Cela prouve que $J_n^{(\mathrm{S})}$ est orthogonale.

CQFD.

Q.8/ On calcule respectivement :

$$C_{9,1} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}, \qquad C_{9,8} = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

On déduit :

$$J_9^{(1)} = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0&0&0&1\\ 1&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&1\\ 1&0&0&0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}$$

Par exemple, les coefficients $J_9^{(1)}(1,2) = J_9^{(1)}(2,1)$ valent 1 car les sommets 1 et 2 sont reliés par une arête.

Q.9/ Voir cours d'informatique.

Q.10/ Notons $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ la base dans laquelle les matrices sont écrites.

Notons σ la permutation définie par $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 3 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ et définissons :

$$u : \forall i \in \{1, \dots, n\}, \qquad e_i \mapsto e_{\sigma(i)}$$

Alors :

$$C_{n,1} \coloneqq \mathrm{Mat}(u)_{\mathcal{B}}$$

De manière générale, on peut écrire $C_{n,k}$ par blocs comme suit :

$$C_{n,k} = \begin{pmatrix} 0_{k,n-k} & I_{k,k} \\ I_{n-k,n-k} & 0_{n-k,k} \end{pmatrix}$$

En particulier, on remarque que :

$$C_{n,k} = \mathrm{Mat}\left(u^k\right)_{\mathcal{B}}$$

D'où,

$$C_{n,k} = C_{n,1}^k$$

Q.11/ On déduit que $C_{n,1}^n = C_{n,n} = I_n$. Ainsi, $X^n - 1$ est un polynôme annulateur de $C_{n,1}$.

Ainsi, le spectre de $C_{n,1}$ est $\mathbb{U}_n \coloneqq \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}} : k \in \{0, \dots, n-1\}\right\}$.

Q.12/ Puisque $J_n^{(1)} = C_{n,1} + C_{n,n-1} = C_{n,1} + C_{n,1}^{n-1}$, alors les valeurs propres de $J_n^{(1)}$ sont :

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \qquad \lambda_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}} + e^{\frac{2ik\pi(n-1)}{n}} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} + e^{-\frac{2ik\pi}{n}} \underbrace{e^{2ik\pi}}_{=1} = 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

CQFD.

Q.13,14,15/ Je passe les preuves de ces questions, qui sont relativement classiques mais qui sont un peu lourdes en notations.

Q.16/ On a :

$$J_3^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

D'une part,

$$I_3 \otimes J_3^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Et,

$$J_3^{(1)} \otimes I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En sommant, on trouve :

$$J_N^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On observe que le coefficient d'indice (i, j) vaut 1 si les sommets i et j du graphe ci-contre sont reliés par une arête, et 0 sinon.

Q.17/ Le spectre de $I_n \otimes J_n^{(1)}$ est égale à celui de $J_n^{(1)}$ d'après la question 15. De même pour $J_n^{(1)} \otimes I_n$. Ainsi, les valeurs propres de $J_N^{(2)}$ sont :

$$\lambda_j + \lambda_k, \qquad \forall (j, k) \in \{0, \dots, n-1\}^2$$

Remarque : le produit de Kronecker induit une dégénérescence des valeurs propres.

Q.18/ ψ_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme composée de fonctions dérivables (H_n est linéaire en h). Soit $h \in \mathbb{R}_+$.

$$\psi_n'(h) = \frac{1}{n}\frac{Z_n'(h)}{Z_n(h)}$$

Or,

$$Z_n'(h) = -\sum_{y \in \Lambda_n} \frac{\partial H_n}{\partial h}(h, x) e^{-H_n(h,x)} = +\sum_{y \in \Lambda_n} \sum_{i=1}^{n} y_i \, e^{-H_n(h,y)}$$

Donc,

$$\psi_n'(h) = \sum_{y \in \Lambda_n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i \right) \frac{1}{Z_n(h)} \, e^{-H_n(h,y)}$$

Finalement, en appliquant la formule de transfert, on trouve :

$$\psi_n' = m_n$$

CQFD.

Q.19/ Soit $h \in \mathbb{R}_+$.

$$Z_n(h) \coloneqq \sum_{x \in \Lambda_n} e^{-H_n(h,x)} = \sum_{x \in \Lambda_n} \exp\left(\frac{\beta}{2} \sum_{1 \le i,j \le n} J_n^{(1)}(i,j) x_i x_j + h \sum_{i=1}^{n} x_i \right)$$

Or, $J_n^{(1)}(i, j)$ vaut 1 si i et j sont voisins, et 0 sinon. En outre, par symétrie de $J_n^{(1)}$ on multiplie par 2 pour éviter de compter deux fois chaque paire de voisins. Ainsi,

$$Z_n(h) = \sum_{x\in\Lambda_n} \prod_{i=1}^{n} e^{\beta x_i x_{i+1} + h x_i}$$

Q.20/ Par récurrence sur p ; l'initialisation à $p = 2$ correspond à la formule classique du produit de deux matrices. (La preuve est laissée au lecteur).

Q.21/ On a :

$$Z_n(h) = \sum_{x\in\Lambda_n} \prod_{i=1}^{n} e^{\beta x_i x_{i+1} + h x_i}$$

$$= \sum_{x_1=\pm 1} \sum_{(x_2,\dots,x_n)\in\{\pm1\}^{n-1}} \prod_{i=1}^{n} e^{\beta x_i x_{i+1} + h x_i}$$

$$= \sum_{x_1=\pm 1} \sum_{(x_2,\dots,x_n)\in\{\pm1\}^{n-1}} \underbrace{e^{\beta x_1 x_2 + h x_1}}_{=A(x_1,x_2)} \left(\prod_{i=2}^{n-1} \underbrace{e^{\beta x_i x_{i+1} + h x_i}}_{=A(x_i,x_{i+1})} \right) \underbrace{e^{\beta x_n \overbrace{x_1}^{x_{n+1}=x_1} + h x_n}}_{=A(x_n,x_1)}$$

On utilise la question précédente pour conclure :

$$Z_n(h) = \sum_{x_1\in\{\pm1\}} A(x_1,x_1)^n = \mathrm{tr}(A^n)$$

Q.22/ Le polynôme caractéristique de la matrice A vaut :

$$\chi_A = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - 2e^{\beta}\cosh(h)\,X + 2\sinh(2\beta)$$

Le discriminant de ce polynôme vaut :

$$\Delta = 4e^{2\beta}\cosh^2(h) - 8\sinh(2\beta)$$

Or, $\Delta > 0$. En effet :

$$\Delta = 4e^{2\beta}\cosh^2(h) - 4\left(e^{2\beta} - e^{-2\beta}\right)$$

$$= 4e^{2\beta}\left(\sinh^2(h) + e^{-4\beta}\right) > 0$$

Les deux solutions (valeurs propres) sont donc :

$$\boxed{\lambda_{\pm} = e^{\beta}\cosh(h) \pm \sqrt{e^{2\beta}\cosh^2(h) - 2\sinh(2\beta)}}$$

Q.23/ La trace est un invariant de similitude. En particulier, pour $h \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$Z_n(h) = \mathrm{tr}(A^n) = \lambda_+^n + \lambda_-^n = \lambda_+^n\left(1 + \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^n\right)$$

Ainsi,

$$\psi_n(h) := \frac{1}{n}\ln\big(Z_n(h)\big) = \ln(\lambda_+) + \frac{1}{n}\ln\left(1 + \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^n\right)$$

Or, $\frac{\lambda_-}{\lambda_+} < 1$ donc :

$$\frac{1}{n}\ln\left(1 + \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^n\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

Finalement, on obtient la limite voulue.

Q.24/ D'après la question, pour tout $h \in \mathbb{R}_+$,

$$\psi(h) = \ln\left(e^{\beta}\, cosh(h) + \sqrt{e^{2\beta}\, cosh^2(h) - 2\, sinh(2\beta)}\right)$$

ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, d'après le résultat admis, on a pour tout $h \in \mathbb{R}_+^*$,

$$m(h) = \psi'(h) = \frac{e^{\beta}\sinh(h) + e^{2\beta} \times \dfrac{\cosh(h)\sinh(h)}{\sqrt{e^{2\beta}\, cosh^2(h) - 2\, sinh(2\beta)}}}{e^{\beta}\, cosh(h) + \sqrt{e^{2\beta}\, cosh^2(h) - 2\, sinh(2\beta)}}$$

On déduit alors :

$$m = \lim_{h\to 0^+} m(h) = 0$$

NB : En particulier, le modèle d'Ising unidimensionnel ne présente pas d'aimantation spontanée. On dit qu'il ne présente pas de transition de phase ferro/paramagnétique.

Q.25/ On rappelle que :

$$J_n^{(\mathrm{C})} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & 0 & \ddots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $h \in \mathbb{R}_+$. Soit $x \in \Lambda_n$.

$$\sum_{1\le i,j\le n} J_n^{(\mathrm{C})}(i,j)x_i x_j = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} J_n^{(\mathrm{C})}(i,j)x_j\right)x_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\overbrace{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} x_j}^{=s_n(x)-x_i}\right)x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(s_n(x) - x_i)x_i$$

$$= \frac{1}{n}s_n(x)^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{x_i^2}_{=1}$$

$$= \frac{1}{n}s_n(x)^2 - 1$$

Ainsi,

$$H_n(h,x) = \frac{\beta}{2} - \frac{\beta}{2n} s_n(x)^2 - h s_n(x)$$

Et on obtient la forme voulue pour Z_n.

Q.26/ Classique. Le critère de Riemann fait l'affaire.

Q.27/ On complète le carré :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2\pi a}} e^{ut-\frac{t^2}{2a}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2\pi a}} e^{-\frac{1}{2a}(t^2-2aut)}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2\pi a}} e^{-\frac{1}{2a}\left((t-au)^2-(au)^2\right)}$$

$$= e^{\frac{au^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2\pi a}} e^{-\frac{(t-au)^2}{2a}}$$

La valeur de l'intégrale est invariante par translation $t \mapsto t - au$, donc :

$$= e^{\frac{au^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2\pi a}} e^{-\frac{t^2}{2a}}$$

En posant $x = \frac{t}{\sqrt{a}}$, on obtient d'après la question précédente :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2\pi a}} e^{ut-\frac{t^2}{2a}} = e^{\frac{au^2}{2}}$$

Q.28/ On calcule :

$$Z_n(h) = e^{-\frac{\beta}{2}} \sum_{x\in\Lambda_n} e^{\frac{\beta}{2n} s_n(x)^2} e^{h\, s_n(x)}$$

Posons : $u = s_n(x)$, et $a = \frac{\beta}{n}$. Alors, d'après la question précédente, on obtient le résultat voulu.

Q.29/ Raisonnons par récurrence sur n.

<u>Initialisation ($n = 1$) :</u>

$$\sum_{x\in\Lambda_1} \prod_{i=1}^{1} e^{(t+h)x_i} = e^{t+h} + e^{-(t+h)} = 2\cosh(t+h)$$

<u>Hérédité :</u> Supposons que le résultat soit vrai au rang n.

$$\sum_{x\in\Lambda_{n+1}} \prod_{i=1}^{n+1} e^{(t+h)x_i} = \sum_{x_{n+1}\in\{\pm 1\}} \sum_{x\in\Lambda_n} \prod_{i=1}^{n} e^{(t+h)x_i}\, e^{(t+h)x_{n+1}}$$

$$= \sum_{x\in\Lambda_n} \prod_{i=1}^{n} e^{(t+h)x_i}\, e^{t+h} + \sum_{x\in\Lambda_n} \prod_{i=1}^{n} e^{(t+h)x_i}\, e^{-(t+h)}$$

$$= \sum_{x\in\Lambda_n} \prod_{i=1}^{n} e^{(t+h)x_i}\, (2\cosh(t+h))$$

Puis, en appliquant l'hypothèse de récurrence,

$$= (2\cosh(t+h))^{n+1}$$

Ce qui conclut.

Q.30/ En revenant à la définition de s_n, on remarque que :

$$\sum_{x\in\Lambda_n} e^{(t+h)s_n(x)} = \sum_{x\in\Lambda_n} \prod_{i=1}^{n} e^{(t+h)x_i} = (2\cosh(t+h))^n$$

Ainsi, en reprenant l'expression de Z_n donnée à la question 28, on obtient l'expression voulue en fonction de la fonction G_h.

Q.31/ G_h est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$G_h'(x) = \frac{x-h}{\beta} - \tanh(x)$$

L'équation donnant les points critiques est donc :

$$x - h = \beta \tanh(x)$$

Cette équation fait apparaître une valeur critique de β ($\beta = 1$) qui nous oblige à distinguer deux cas.

<u>Cas $\beta \leq 1$:</u> On calcule :

$$G_h''(x) = \tanh^2(x) + \underbrace{\frac{1}{\beta} - 1}_{=\alpha} \geq \alpha \geq 0$$

G_h'' est donc strictement positive presque partout (sauf en un point où elle peut éventuellement s'annuler, $x = 0$). Ainsi, G_h est strictement convexe. D'après le théorème de la bijection, elle admet donc un unique minimum sur $\mathbb{R}_+$.

<u>Cas $\beta > 1$:</u> Dans ce cas, G_h n'est plus nécessairement strictement convexe, et il peut exister plusieurs points critiques.

En revanche, on peut librement utiliser le fait que G_h soit continue et coercive, i.e. $\lim_{x\to+\infty} G_h(x) = +\infty$:

$$G_h(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x^2}{2\beta} - x \to +\infty$$

Soit $a > 0$. Posons $\Omega = \{x \in \mathbb{R}_+ : G_h(x) \leq G_h(a)\}$. Alors, $\Omega = G_h^{-1}([0, a])$ et G_h est continue, donc Ω est fermé. En outre, puisque G_h est coercive, Ω est borné. Ainsi, G_h est un compact. D'après le théorème des bornes atteintes, G_h admet un minimum dans Ω :

$$\exists u_h \in \mathbb{R}_+ : G_h(u_h) = \inf_{x \in \Omega} G_h(x)$$

Or, par construction de Ω,

$$\inf_{x \in \Omega} G_h(x) = \inf_{x \in \mathbb{R}_+} G_h(x)$$

Ainsi, G_h admet un minimum sur $\mathbb{R}_+$ atteint en u_h.

(a) L'équation des points critiques se résume à $x = \beta \tanh(x)$. 0 est solution, or cette solution est unique car $\beta \leq 1$, donc $u_h = 0$.
(b) Si $\beta > 1$, alors $G_h''(0) < 0$, donc 0 ne peut pas être un minimum. Or le minimum est atteint dans $\mathbb{R}_+$, donc $u_h > 0$.
(c) On a :
  (i) Par définition d'un extremum, $G_h'(u_h) = 0$;
  (ii) $G_0'(u_h) = \frac{u_h}{\beta} - \tanh(u_h)$ or u_h est solution de l'équation des points critiques, donc en particulier $\tanh(u_h) = \frac{u_h - h}{\beta}$, ainsi : $h = \beta G_0'(u_h)$;
  (iii) u_h est solution de l'équation des points critiques : $u_h = h + \overbrace{\beta \tanh(u_h)}^{\geq 0}$ donc $h > 0$ implique $u_h > 0$. D'où :

$$G_h''(u_h) = \frac{1}{\beta} - \underbrace{(1 - \tanh^2(u_h))}_{<0} > 0$$

Q.32/ Quand $h = 0$, la fonction G_h est paire, donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. En revanche, dès lors que $h > 0$, la symétrie est brisée, et les valeurs prises par G_h sur $\mathbb{R}_-$ ont tendance à être supérieures à celles prises sur $\mathbb{R}_+$. En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $G_h(-x) \geq G_h(x)$. Ainsi, le minimum est nécessairement atteint sur $\mathbb{R}_+$, c'est u_h.

Q.33/ Soit $h > 0$.

$$\psi_n(h) \coloneqq \frac{1}{n} \ln\big(Z_n(h)\big)$$

D'après la question 30, on a :

$$\psi_n(h) = \frac{1}{n} \ln\left(\sqrt{\frac{n}{2e^\beta \pi \beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nG_h(x)} \mathrm{d}x\right)$$

$$= \frac{1}{n} \ln\left(\sqrt{\frac{n}{2e^\beta \pi \beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n\widehat{G_h}(x - u_h) - nG_h(u_h)} \mathrm{d}x\right)$$

$$= -G_h(u_h) - \frac{1}{2n} \ln\big(2e^\beta \pi \beta\big) + \frac{1}{n} \ln\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n\widehat{G_h}(x - u_h)} \sqrt{n} \mathrm{d}x\right)$$

Dans le dernier terme, la translation de u_h ne change pas la valeur de l'intégrale. On effectue ensuite le changement de variable $t = \sqrt{n}x$. On déduit la forme voulue.

Q.34/ On effectue un développement limité de $\widehat{G_h}$ au voisinage de $x = 0$.

$$\widehat{G_h}(x) \underset{x\to 0}{=} \left(G_h(u_h) + x\overbrace{G_h'(u_h)}^{=0} + \frac{x^2}{2}G_h''(u_h) + O(x^3) \right) - \underbrace{\min G_h}_{=G_h(u_h)} = \frac{x^2}{2}G_h''(u_h) + O(x^3)$$

Ainsi, en posant $\gamma_h = G_h''(u_h) > 0$, on déduit :

$$f_h(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{\gamma_h}{2}$$

En outre, f_h est continue sur $\mathbb{R}^*$. Cela implique que f_h est prolongeable par continuité en 0 en posant :

$$f_h(0) = \frac{\gamma_h}{2}$$

Q.35/ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_h(x) > 0$ donc il existe $c_h > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f_h(x) \geq c_h$.

Q.36/ On a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n\widehat{G_h}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)} \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2 f_h\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)} \mathrm{d}t$$

D'une part, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-t^2 f_h\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)} = e^{-t^2 f_h(0)} = e^{-\frac{\gamma_h}{2}t^2}$$

D'autre part, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{-t^2 f_h\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)} \leq e^{-c_h t^2}$$

et $t \mapsto e^{-c_h t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ car $c_h > 0$.

Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n\widehat{G_h}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)} \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\gamma_h}{2}t^2} \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2\pi}{\gamma_h}}$$

Par conséquent,

$$\psi_n(h) = -G_h(u_h) - \underbrace{\frac{1}{2n}\ln\left(2e^{\beta}\pi\beta\right)}_{\underset{n\to+\infty}{\to} 0} + \underbrace{\frac{1}{n}\ln\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n\widehat{G_h}(x-u_h)}\sqrt{n}\mathrm{d}x\right)}_{\underset{n\to+\infty}{\to} 0} \underset{n\to+\infty}{\to} -G_h(u_h)$$

soit,

$$\psi(h) = -G_h(u_h)$$

Q.37/ On a :

$$G_0'(x) = \frac{x}{\beta} - \tanh(x)$$

Cette fonction est continue comme somme de fonctions continues (même dérivable). En outre,

$$G_0''(x) = \frac{1}{\beta} - (1 - \tanh^2(x))$$

<u>Cas $\beta > 1$:</u>

Pour tout $x \in [u_0, +\infty)$, $x \geq u_0 > 0$ donc $G_0''(x) > 0$. Cela implique que G_0' est strictement croissante sur $[u_0, +\infty)$. D'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection dans $G_0'\big([u_0, +\infty)\big)$. Or,

$$G_0'(u_0) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} G_0'(x) = +\infty$$

D'où G_0' réalise une bijection de $[u_0, +\infty)$ dans $\mathbb{R}_+$.

<u>Cas $\beta \leq 1$:</u>

Dans ce cas, $u_0 = 0$. Ainsi, $G_0'' > 0$ presque partout (sauf éventuellement en 0). Donc G_0' est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, et la même conclusion que précédemment s'applique.

Ainsi, d'après la question 31,

$$u_h = G_0'^{-1}\left(\frac{h}{\beta}\right)$$

Cela prouve que $u : h \mapsto u_h$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. En outre, pour tout $h > 0$, $G_0''(u_h) = \frac{1}{\beta} > 0$ (on a utilisé le point (iii) de la question c de la question 31). u est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$u'(h) = \frac{1}{\beta} \frac{1}{G_0''\left(G_0'^{-1}\left(\frac{h}{\beta}\right)\right)} = \frac{1}{\beta} \frac{1}{G_0''(u_h)} = \frac{1}{\beta} \frac{1}{\frac{1}{\beta}} = 1$$

Q.38/ D'après la question 36, ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. En outre,

$$m(h) = \psi'(h) = -\overbrace{u'(h)}^{=1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\left(\frac{(x-h)^2}{2\beta} - \ln(2\cosh(x))\right)(u_h) = \frac{u_h - h}{\beta}$$

Q.39/ On a :

$$m^+ = \lim_{h \to 0^+} m(h) = \lim_{h \to 0^+} \frac{u(h) - h}{\beta} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\left(u_0 + h\,\overbrace{u'(0)}^{=1} + O(h^2)\right) - h}{\beta} = \frac{u_0}{\beta}$$

D'après la question 31, distinguons deux cas.

<u>Cas $\beta \leq 1$:</u> $u_0 = 0$ donc $m^+ = 0$;

<u>Cas $\beta > 1$:</u> Alors $u_0 > 0$ donc $m^+ > 0$.

CQFD.

NB : On vient de mettre en évidence un paramètre d'ordre : m^+ ! Il s'agit d'un paramètre qui caractérise une transition de phase. Ici, la température critique de transition de phase (dite température de Curie) est donnée par $\beta = 1$ (inversement proportionnel).

- En-dessous de cette température (pour $\beta > 1$), le matériau considéré possède une aimantation permanente $m^+ > 0$, résultat de l'interaction des moments magnétiques. On parle de phase ferromagnétique.

- Au-dessus de cette température (pour $\beta \leq 1$), le matériau ne peut posséder qu'une aimantation temporaire. En l'absence de champ extérieur ($h \to 0^+$), le matériau ne possède pas d'aimantation ; les moments magnétiques sont désordonnés. On parle de phase paramagnétique.

Q.40/ L'intégrande est continue sur $\mathbb{R}$ par composée de fonctions continues (l'espérance est linéaire en dimension finie, donc continue).

En outre, par l'inégalité triangulaire, et par croissance de l'espérance,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |\mathbb{E}(f(x))| \leq \mathbb{E}(|f(x)|) \leq \|f\|_\infty$$

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\left|\mathbb{E}(f(x))e^{-\frac{t^2}{2}}\right| \leq \|f\|_\infty e^{-\frac{t^2}{2}}$$

et on conclut en rappelant que $t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (question 26).

Q.41/ On a :

$$\left|E_{n,f} - \mathbb{E}\left(f\left(n^{\frac{1}{4}}M_n\right)\right)\right| \underset{\text{Q.26}}{=} \left|\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\mathbb{E}\left(f\left(\frac{t}{n^{\frac{1}{4}}} + n^{\frac{1}{4}}M_n\right)\right) - \mathbb{E}\left(f\left(n^{\frac{1}{4}}M_n\right)\right)\right]e^{-\frac{t^2}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2\pi}}\right|$$

Par linéarité de l'espérance,

$$= \left|\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbb{E}\left(f\left(\frac{t}{n^{\frac{1}{4}}} + n^{\frac{1}{4}}M_n\right) - f\left(n^{\frac{1}{4}}M_n\right)\right)e^{-\frac{t^2}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2\pi}}\right|$$

Par l'inégalité de la moyenne pour l'intégrale, et l'inégalité triangulaire pour l'espérance :

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty}\mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{t}{n^{\frac{1}{4}}} + n^{\frac{1}{4}}M_n\right) - f\left(n^{\frac{1}{4}}M_n\right)\right|\right)e^{-\frac{t^2}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2\pi}}$$

Or, f est K-lipschitzienne, donc :

$$\leq \frac{K}{n^{\frac{1}{4}}\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}|t|e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2K}{n^{\frac{1}{4}}\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$$

Or,

$$\int_0^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t = \left[-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^{+\infty} = 1$$

Finalement, on a bien :

$$\left|E_{n,f} - \mathbb{E}\left(f\left(n^{\frac{1}{4}}M_n\right)\right)\right| \leq \frac{2K}{n^{\frac{1}{4}}\sqrt{2\pi}}$$

On en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(f\left(n^{\frac{1}{4}}M_n\right)\right) = \lim_{n\to+\infty} E_{n,f} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\varphi_\infty(u)\mathrm{d}u$$

Q.42/ Soient $u, v \in \mathbb{R}$. On distingue les différents cas possibles.

$u, v > x + \frac{1}{k}$	$\lvert f(u) - f(v)\rvert = 0 \leq k\lvert u - v\rvert$
$u, v \leq x$	$\lvert f(u) - f(v)\rvert = 0 \leq k\lvert u - v\rvert$
$u, v \in \left(x, x + \frac{1}{k}\right]$	$f(u) - f(v) = 1 - k(u - x) - 1 + k(v - x) = k(v - u)$ $\Rightarrow \lvert f(u) - f(v)\rvert \leq k\lvert u - v\rvert$
$u \leq x$ et $v \in \left(x, x + \frac{1}{k}\right]$	$f(u) - f(v) = 1 - 1 + k(v - x) = k(v - x)$ $= k(v - u) - \underbrace{k(x - u)}_{\geq 0} \leq k(v - u)$ $\Rightarrow \lvert f(u) - f(v)\rvert \leq k\lvert u - v\rvert$
$u \leq x$ et $v > x + \frac{1}{k}$	$f(u) - f(v) = 1$ et $\lvert u - v\rvert \geq \frac{1}{k} \Rightarrow \lvert f(u) - f(v)\rvert \leq k\lvert u - v\rvert$
$u \in \left(x, x + \frac{1}{k}\right]$ et $v > x + \frac{1}{k}$	$f(u) - f(v) = 1 - k(u - x) = 1 - k(u - v) - k\underbrace{(v - x)}_{>\frac{1}{k}}$ $\Rightarrow \lvert f(u) - f(v)\rvert \leq k\lvert u - v\rvert$

Dans tous les cas, f est bien k-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Q.43/ Soit $\varepsilon > 0$. Soit $k \geq \frac{2}{\varepsilon Z_\infty}$

$$\mathbb{P}\left(n^{\frac{1}{4}}M_n \leq x\right) = \mathbb{E}\left(1_{n^{\frac{1}{4}}M_n \leq x}\right) \leq \mathbb{E}\left(f_k\left(n^{\frac{1}{4}}M_n\right)\right)$$

D'après ce qui précède, f_k est k-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, donc on peut appliquer l'inégalité de la question 41.

$$\mathbb{P}\left(n^{\frac{1}{4}}M_n \leq x\right) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(u)\varphi_\infty(u)\mathrm{d}u + \frac{2k}{n^{\frac{1}{4}}\sqrt{2\pi}}$$

On choisit n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on a :

$$\frac{2k}{n^{\frac{1}{4}}\sqrt{2\pi}} \leq \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow n \geq \left(\frac{8}{\varepsilon^2 Z_\infty \sqrt{2\pi}}\right)^4$$

Posons alors :

$$n_0 = \left\lceil \left(\frac{8}{\varepsilon^2 Z_\infty \sqrt{2\pi}}\right)^4 \right\rceil$$

On obtient alors l'inégalité voulue.

Q.44/ L'inégalité précédente est valable pour n'importe quelle valeur de ε, aussi petite soit-elle. En particulier, $n_0 \to +\infty$ et $k \to +\infty$ si et seulement si $\varepsilon \to 0^+$. Or,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{x+\frac{1}{k}} \varphi_\infty(u)\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{x} \varphi_\infty(u)\mathrm{d}u$$

Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(n^{\frac{1}{4}} M_n \leq x\right) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_\infty(u)\mathrm{d}u$$

CQFD.

NB : Il s'agit d'une forme de théorème central limite non standard. La présence d'une densité de probabilité en $e^{-\frac{x^4}{12}}$ – et non gaussienne – est typique d'un comportement au point critique d'un modèle de transition de phase.