

CENTRALE PSI 2025 - PHY 2

Rothlingshofer Yanic

Contact : Pour toute remarque, suggestion ou signalement d'erreur : yrothlin-24@telecom-paris.fr.

Remarque : Sujet assez facile à mon sens, du moins très abordable. Ce document est une PROPOSITION de corrigé et je ne prétends pas faire tout juste. Merci de ne pas porter trop d'attention à la syntaxe ou aux petites fautes d'inattentions (temps à la main : 3h25).

I. Le pack de supercondensateurs

1. Soit $(O, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ un plan infini de densité de charge surfacique σ . Tout plans $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ et $(M, \vec{u}_z, \vec{u}_x)$ sont plans de symétrie pour la distribution de charge (et donc le champ est contenu dans ces deux plans). De plus, la distribution de charge est invariante selon y et z d'où :

$$\vec{E}(M) = E(x)\vec{u}_x$$

On applique le théorème de Gauss à la surface fermée \mathcal{S} représentant un cylindre de rayon r de longueur $2x_0$ et de centre O . On a alors :

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot \vec{dS} = -E(-x_0)\pi r^2 + E(x_0)\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \sigma \pi r^2$$

or $(O, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est plan de symétrie de la distribution de charge donc le vecteur \vec{E} est symétrie par rapport à ce plan. Ainsi $E(-x_0) = -E(x_0)$ et on en déduit :

$$E(x_0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

Finalement :

$$\vec{E}(M) \cdot \vec{u}_x = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0 \varepsilon_r} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0 \varepsilon_r} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Finalement en appliquant le principe de superposition, pour $x \in [-a, a]$:

$$\vec{E} \cdot \vec{u}_x = \begin{cases} E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} & \text{si } -a < x < -a + \delta \\ E_2 = \frac{\sigma - \sigma'}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} & \text{si } -a + \delta < x < a - \delta \\ E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} & \text{si } a - \delta < x < a \end{cases}$$

(en négligeant les effets de bords engendrés par le fait que les plans sont finis).

2. Puisque $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ qui s'écrit sur la seule coordonnée x :

$$E(x) = -\frac{dV}{dx}$$

En intégrant sur chaque région entre $-a$ et a on obtient :

$$V(x) = \begin{cases} V_1(x) = -E_1 x + C_1 & \text{si } -a < x < -a + \delta \\ V_2(x) = -E_2 x + C_2 & \text{si } -a + \delta < x < a - \delta \\ V_3(x) = -E_1 x + C_3 & \text{si } a - \delta < x < a \end{cases}$$

par continuité du potentiel, on a $V_1(-a) = \frac{U}{2}$ d'où $C_1 = \frac{U - E_1 2a}{2}$ et $V_3(a) = -\frac{U}{2}$ d'où $C_3 = \frac{-U + E_1 2a}{2}$.
Ainsi :

$$V_1(x) = -E_1(a+x) + \frac{U}{2} \quad \text{et} \quad V_3(x) = E_1(a-x) - \frac{U}{2}$$

Enfin, la continuité en $-a + \delta$ et $a - \delta$ s'écrit :

$$V_1(-a + \delta) = V_2(-a + \delta) \quad \text{et} \quad V_3(a - \delta) = V_2(a - \delta)$$

de la première continuité on tire $C_2 = -E_2(a - \delta) - E_1\delta + \frac{U}{2}$ et de la deuxième continuité on tire :

$$U = 2E_1\delta + 2E_2(a - \delta) = \frac{2\sigma\delta}{\varepsilon_0\varepsilon_r} + \frac{2(\sigma - \sigma')(a - \delta)}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

d'où :

$$U = \frac{2a}{\varepsilon_0\varepsilon_r} - \frac{2(a - \delta)}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\sigma'$$

(il vaut mieux prendre son temps et ne pas avoir à refaire les calculs sinon on perd beaucoup de temps).

3. Il y a plusieurs manières de justifier mais aucune très évidente. Qualitativement, on peut dire que les ions sont attirés par les plaques et se collent aux plaques tant qu'il existe un champ électrique. En régime stationnaire les ions ne bougent plus donc leur concentration au niveau des plaques est suffisamment élevée pour contrebalancer l'effet de la distribution de charge de la plaque métallique du condensateur. Autrement dit $\sigma - \sigma' = 0$ (les ions sont collés à la plaque et on peut assimiler la plaque à une plaque de densité surfacique $\sigma - \sigma'$). Dans ce cas :

$$U = \frac{2\delta}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\sigma$$

or $C = \frac{Q}{U}$ donc :

$$C = \frac{\sigma S}{U} = \frac{S\varepsilon_0\varepsilon_r}{2\delta}$$

Dans le cas où l'on remplace la solution électrolytique par de l'air, on a :

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{a}$$

d'où :

$$\frac{C_0}{C} = \varepsilon_r \frac{2\delta}{a}$$

ici, sans culture général je ne sais pas quoi en conclure parce qu'on n'a pas d'idée des ordres de grandeurs. Cependant, ayant déjà travaillé le conducteur électrolytique, je sais que l'épaisseur sur laquelle s'étalent les ions contre la plaque vaut environ $l_D = 10^{-8}$ m (longueur de Debye). Or sachant que ε_r est de l'ordre de 10^2 voir 10^3 , à moins de coller les plaques à quelques μm (ce qui est très compliqué en pratique), $C \gg C_0$.

4. À l'instant t , la charge locale au niveau de la plaque en $-a + \delta$ vaut $q'(t)$. À un instant $t + dt$, cette charge locale vaut $q'(t + dt) = q'(t) + \delta Q$ où δQ est la charge qui s'est accumulée en $-a + \delta$. Or les porteurs sont amenés par le champ E_2 qui va pousser les ions négatifs vers la plaque de gauche et donc les amenés en $-a + \delta$. Ainsi la charge amenée en $-a + \delta$ sur une durée dt correspond à $j(-a + \delta)(t)Sdt = \gamma E_2(t)Sdt = \gamma \frac{\sigma - \sigma'(t)}{\varepsilon_0\varepsilon_r} Sdt$. D'où :

$$q'(t + dt) = q'(t) + \gamma \frac{\sigma - \sigma'(t)}{\varepsilon_0\varepsilon_r} Sdt$$

d'où lorsque $dt \rightarrow 0$:

$$\frac{dq'}{dt} = \gamma \frac{\sigma - \sigma'(t)}{\varepsilon_0\varepsilon_r} S$$

Remarque : Ici, on a fait l'hypothèse que lorsque les ions arrivent dans les zones $[-a, -a + \delta]$ et $[a - \delta, a]$, ils deviennent presque immobiles. On suppose que ce sont des zones d'accumulations de sorte que les champs E_1 ne créent pas de densité de courant qui ferait sortir de charge localement en $-a + \delta$ ou $a - \delta$.

5. Sachant $q'(t) = \sigma'(t)S$, on a :

$$\frac{d\sigma'}{dt} = \gamma \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r} - \gamma \frac{\sigma'}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

or d'après Q2 et en inversant la relation, on a :

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r}{2a}U + \frac{a - \delta}{a}\sigma'$$

d'où en injectant σ dans l'expression ci-dessus :

$$\frac{d\sigma'}{dt} = \gamma \frac{U}{2a} + \frac{\gamma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \left(1 - \frac{\delta}{a}\right) \sigma' - \frac{\gamma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \sigma'$$

d'où en simplifiant :

$$\frac{d\sigma'}{dt} + \frac{\gamma \delta}{a \varepsilon_0 \varepsilon_r} \sigma' = \gamma \frac{U}{2a}$$

on identifie $\tau = \frac{a \varepsilon_0 \varepsilon_r}{\gamma \delta}$. Dans un circuit RC , on sait que $\tau = R_0 C$ d'où (d'après l'expression de C trouvé Q3) :

$$R_0 = \frac{\tau}{C} = \frac{2a}{\gamma S}$$

Est ce que c'est logique? oui parce qu'on a donné une conductivité à l'électrolyte et on l'a modélisé comme un métal conducteur dans nos raisonnements donc on trouve bien l'expression de la résistance d'un conducteur métallique.

6. Le petit gap instantané que l'on peut voir entre V_1 et V_2 et V_3 et V_4 qui a la même norme correspond à la chute ohmique donc :

$$\Delta V = R_0 I$$

d'où $R_0 = \frac{-0,05}{-33} \approx 1,5 \text{ m}\Omega$. Ensuite la pente dans les variation de V correspond à :

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{I}{C_0} \implies C = \frac{IT}{\Delta V} \approx 330 \text{ F}$$

7. **En première approximation (il s'agit d'un raisonnement beaucoup trop simpliste mais juste pour avoir un ordre de grandeur) :** D'après les données fournies en annexe $m \simeq 100 \text{ kg}$, l'énergie nécessaire pour franchir $h = 60 \text{ m}$ de dénivelé vaut :

$$E_p = mgh \approx 59 \text{ kJ}$$

en négligeant tous les frottements (dans les roulements, pneu/route,...). Le pack doit être capable de fournir au moins la moitié de cette énergie donc l'énergie contenu dans les condensateurs doit être d'au moins :

$$E = \frac{E_p}{2}$$

Si on néglige les chutes ohmiques (on néglige les pertes par effet Joule), on l'énergie pouvant être contenu dans le pack est (on considère que les condo fonctionne à leur tension nominale) :

$$E = \frac{N}{2} C (V_n)^2 \implies N = \frac{E_p}{C V_n^2} \approx 20$$

Attention : ce raisonnement est très simpliste, je n'ai considéré ici presque rien, je ne suis même pas sûr que ce raisonnement soit correct.

8. Pour un convertisseur sans pertes, la puissance moyenne en entrée est égale à la puissance moyenne en sortie soit (on omet la notation valeur moyenne) :

$$V_e I_e = V_s I_s \implies I_e = \frac{V_s}{V_e} I_s$$

Avec $V_s = 36 \text{ V}$ et $I_s = 10 \text{ A}$ fixé, la valeur maximale de ce courant est donnée pour $V_e = 27 \text{ V}$ soit $I_{e,max} = 13.3 \text{ A}$.

9. On a :

$$\langle V_L \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T V_L(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T L di_L = \frac{L}{T} (i_L(T) - i_L(0)) = 0$$

car le courant est périodique de période T .

- Sur $[0, \alpha T]$ K_1 est fermé et K_2 est ouvert. Ainsi en appliquant la loi des mailles dans chaque boucle on a :

$$V_{L_1}(t) = V_e \quad \text{et} \quad V_{C_1}(t) = -V_{L_2}(t)$$

- Sur $[\alpha T, T]$, K_1 est ouvert et K_2 est fermé. Ainsi :

$$V_e = V_{L_1}(t) + V_{C_1}(t) + V_{L_2}(t) \implies V_{C_1}(t) = V_e - V_{L_2}(t) - V_{L_1}(t)$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
 T \langle V_{C_1} \rangle &= \int_0^T V_{C_1}(t) dt \\
 &= \int_0^{\alpha T} V_{C_1}(t) dt + \int_{\alpha T}^T V_{C_1}(t) dt \\
 &= - \int_0^{\alpha T} V_{L_2}(t) dt + \int_{\alpha T}^T V_e dt - \int_{\alpha T}^T V_{L_2}(t) dt - \int_{\alpha T}^T V_{L_1}(t) dt \\
 &= -T \langle V_{L_2} \rangle + T(1 - \alpha)V_e - \int_{\alpha T}^T V_{L_1}(t) dt
 \end{aligned}$$

or $\langle V_{L_2} \rangle = 0$ et :

$$\int_0^T V_{L_1}(t) dt = 0 = \int_0^{\alpha T} V_e dt + \int_{\alpha T}^T V_{L_1}(t) dt$$

d'où :

$$T \langle V_{C_1} \rangle = T(1 - \alpha)V_e + \alpha T V_e = T V_e$$

d'où $\langle V_{C_1} \rangle = V_e$.

10. En utilisant les résultats précédents, on a $V_{L_2}(t) = -V_e$ sur $[0, \alpha T]$ et $V_{L_2}(t) = V_s$ sur $[\alpha T, T]$.

11. Comme la valeur moyenne de $V_{L_2}(t)$ est nulle, on en déduit :

$$-\alpha T V_e + T(1 - \alpha)V_s = 0$$

d'où :

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{\alpha}{1 - \alpha}$$

En faisant varier le rapport cyclique α , on peut abaisser ou réhausser la tension V_e assez simplement (et dans le contexte précédent, sans pertes) ce qui est pratique dans notre cas car $V_e \in [27, 54]$ et on veut une tension de sortie stable à $V_s = 36$ V.

12. Pour $V_e = 27$ V on trouve $\alpha_{max} \approx 0,571$ et pour $V_e = 54$ V on trouve $\alpha_{min} \approx 0,4$. Sur cette plage de α , on voit que les deux courbes se superposent et donc on peut négliger les pertes résistives. Ainsi le modèle précédent reste valide. Si on laisse les condensateurs se décharger complètement, $V_e \rightarrow 0$ et donc pour maintenir V_s il faudrait faire tendre $\alpha \rightarrow 1$ (pas possible).

13. On a vu que sur $[0, \alpha T]$, on a $V_{L_1}(t) = L_1 \frac{di_{L_1}(t)}{dt} = -V_e$. On en déduit que :

$$i_{L_1}(t) = -\frac{V_e}{L_1}t + C$$

avec $i_{L_1}(0) = i_{L,max} = C$ et $i_{L_1}(\alpha T) = i_{L,min} = -\frac{\alpha V_e T}{L_1} + i_{L,max}$. Ainsi :

$$|\Delta i_{L_1}| = i_{L_1,max} - i_{L_1,min} = \frac{\alpha V_e}{f L_1}$$

puis la condition sur le taux d'ondulation s'écrit $|\Delta i_{L_1}| \leq \frac{\langle I_e \rangle}{10}$ et donc :

$$L_1 \geq 10 \frac{\alpha V_e}{f \langle I_e \rangle}$$

or par conservation de la puissance (car sur l'intervalle de α choisi on peut considérer le modèle sans pertes), on obtient :

$$\langle V_e I_e \rangle = V_e \langle I_e \rangle = \langle V_s I_s \rangle = V_s \langle I_s \rangle \implies \langle I_e \rangle = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \langle I_s \rangle$$

Ainsi :

$$L_1 \geq 10 \frac{(1 - \alpha)V_e}{f \langle I_s \rangle}$$

Ici on utilise le couple $(V_e, \alpha) = (54, 0.4)$ qui donne le résultat le plus élevé. Et on trouve finalement $L_{1,min} \approx 100$ μ H.

14. Toujours sur $[0, \alpha T]$ le fait que K_2 soit ouvert nous donne $I_s = i_{C_2}(t)$ soit :

$$\frac{dV_{C_2}(t)}{dt} = \frac{I_s}{C_2} \implies V_{C_2}(t) = \frac{I_s}{C_2}t + K$$

avec $V_{C_2}(0) = V_{C_2, \min}$ et $V_{C_2}(\alpha T) = V_{C_2, \max}$. On en déduit :

$$|\Delta V_{C_2}| = \frac{I_s}{C_2} \alpha T \leq \frac{V_s}{100} \implies C_2 \geq \frac{100 \alpha I_s}{f V_s}$$

pour $V_s = V_e$, on a $\alpha = 0.5$ et donc (avec $I_s = \langle I_s \rangle = 10$ A) :

$$C_{2, \min} = 46 \mu\text{F}$$

II. Le recyclage de la batterie lithium-ion

15. On remarque graphiquement que le rendement de la réaction 1 atteint rapidement son plateau et donc n'est pas limité cinétiquement (de l'ordre de quelques minutes négligeable sur l'échelle de temps de la mesure) contrairement à la réaction 2 qui met plus de temps à atteindre son plateau de rendement. Ceci permet de justifier que la réaction 1 est instantanée par rapport à la réaction 2.
16. Dans les 3 essais on remarque expérimentalement que le coefficient directeur de la pente qui donne $[\text{MCl}_2(\text{aq})]$ en fonction de $[\text{LiCl}(\text{aq})]$ est d'environ 2,1 or d'après la stoechiométrie de la réaction, ce coefficient correspond à m car pour 1 mole de $\text{MCl}_2(\text{aq})$ on doit avoir m moles de $\text{LiCl}(\text{aq})$ (par rapport à l'avancement ξ).
17. On a (l et s correspondent au volume de liquide et à la masse de solide initiale) :

$$x_0 = \frac{n_0(\text{HCl})}{n_0(\text{NMC}_{111})} = \frac{[\text{HCl}]_0 l}{\frac{s}{M(\text{NMC}_{111})}} = [\text{HCl}]_0 \frac{M(\text{NMC}_{111})}{\frac{s}{l}}$$

On trouve expérimentalement :

$$x_{0,A} = 19,4 ; \quad x_{0,B} = 3,23 \quad \text{et} \quad x_{0,C} = 1,21$$

18. Un peu la flemme
19. Puisque le réactif A réagit avec le solide donc au niveau du front de réaction, on en déduit qu'il y a moins de réactif A au niveau du front de réaction que loin du front soit $C_{Af} < C_A$. Ce gradient de concentration va créer un mouvement de particules par diffusion dirigé de la zone de forte concentration vers la zone de faible concentration. Ainsi ce flux de particule est positif dirigé vers le grain. Le coefficient $k_D S$ représente la capacité du milieu à conduire le flux de particule en $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$. D'où l'on peut écrire :

$$F_A = k_D S (C_A - C_{Af})$$

20. Le fait que $F_A = F_{AC}$ signifie qu'en régime permanent tout le flux qui arrive au niveau du front est entièrement consommé (pas d'accumulation de matière dans la couche externe). En fait la conduction de particules qui génère le flux de particules s'établit à peu près à la même vitesse que la réaction. Puisque la réaction est d'ordre 1 et par définition de F_A (pas trop sûr de cet argument faudrait vérifier), on a $F_A = -\frac{dn_A}{dt}$ or d'après la stoechiométrie

$$\frac{1}{\nu} \frac{dN_B}{dt} = \frac{dn_A}{dt}$$

d'où $F_A = -\frac{1}{\nu} \frac{dN_B}{dt}$ (je me demande si il n'y aurait pas une erreur d'énoncé vu la question 23).

21. On égalise les deux expressions de F_A :

$$k_C S C_{Af} = \frac{D}{R} S (C_A - C_{Af}) \implies C_{Af} = \frac{D}{D + R k_C} C_A$$

d'où :

$$F_A = F_{AC} = \frac{k_C S D}{D + R k_C} C_A = \frac{C_A}{R_{eq}}$$

avec $R_{eq} = \frac{1}{k_C S} + \frac{R}{S D}$.

22. On a $m_B = \rho_B \frac{4}{3} \pi R^3$ puis :

$$N_B(R) = \frac{4}{3} \pi \frac{\rho_B}{M_B} R^3 = kR^3$$

23. En injectant l'expression de $N_B(R(t))$ dans la question 20, on obtient :

$$-\frac{1}{\nu} 3kR^2 \frac{dR}{dt} = \frac{C_A}{R_{eq}} = \frac{k_C S}{1 + \frac{Rk_C}{D}} C_A$$

avec $S = 4\pi R^2$, on simplifie :

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{\nu M_B k_C}{\rho_B (1 + R \frac{k_C}{D})} C_A$$

à variables séparable :

$$\left(1 + R \frac{k_C}{D}\right) dR = -\frac{\nu M_B k_C C_A}{\rho_B} dt$$

puis on intègre entre R_0 et $R(t)$ et 0 et t :

$$\frac{D}{2k_C} \left[\left(1 + R \frac{k_C}{D}\right)^2 \right]_{R_0}^{R(t)} = -\frac{\nu M_B k_C C_A}{\rho_B} t = -\alpha t$$

or :

$$\left(1 + R(t) \frac{k_C}{D}\right)^2 - \left(1 + R_0 \frac{k_C}{D}\right)^2 = 2 \frac{k_C}{D} (R(t) - R_0) + \left(\frac{k_C}{D}\right)^2 (R(t)^2 - R_0^2)$$

d'où (on passe le $-$ de l'autre coté donc on change le sens dans les parenthèses) :

$$t = \frac{R_0}{\alpha} \left(1 - \frac{R(t)}{R_0}\right) + \frac{k_C R_0^2}{2\alpha D} \left(1 - \left(\frac{R(t)}{R_0}\right)^2\right)$$

puis par identification et en remplaçant la valeur de α :

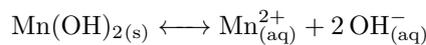
$$\tau_{\text{cin}} = \frac{\rho_B R_0}{\nu M_B k_C C_A} \quad \text{et} \quad \tau_{\text{film}} = \frac{\rho_B R_0^2}{2\nu D M_B C_A}$$

24. On a :

$$\frac{\tau_{\text{cin}}}{\tau_{\text{film}}} = \frac{2D}{k_C R_0} \simeq 1,67 \cdot 10^3 \gg 1$$

On en déduit que le régime est contrôlé cinétiquement.

25. L'équilibre de dissolution s'écrit :



d'où $K_s = [\text{Mn}^{2+}][\text{OH}^-]^2$. Or d'après le produit ionique de l'eau :

$$[\text{OH}^-] = \frac{10^{-\text{pKe}}}{[\text{H}^+]} = 10^{\text{pH} - \text{pKe}} = 10^{-4,1}$$

Or à saturation, on a $[\text{Mn}^{2+}] = \frac{[\text{OH}^-]}{2}$ d'où :

$$K_s = \frac{1}{2} [\text{OH}^-]^3 = \frac{1}{2} 10^{-12,3} \approx 10^{-12,6}$$

d'où $\text{pKs} = 12,6$.

26. Pour chaque métal, on a précipitation si $Q = [\text{Mn}^{2+}][\text{OH}^-]^2 > K_s$ donc la concentration minimale en ions OH^- à partir de laquelle il y a précipitation vaut :

$$[\text{OH}^-]_{\text{min}} = \sqrt{\frac{K_s}{C_0}}$$

soit :

$$\text{pH}_{\text{min}} = \text{pKe} + \frac{1}{2} \log\left(\frac{10^{-\text{pKs}}}{C_0}\right) = \text{pKe} - \frac{\text{pKs}}{2} - \frac{1}{2} \log(C_0)$$

27. Pour le cobalt(II) on trouve $\text{pH}_{\min} \approx 5,42$ et pour le manganèse(II) on trouve $\text{pH}_{\min} \approx 7,12$.
28. Si on a précipité 99% du cobalt, il reste $C'_0 = 0,01C_0$ et le pH se trouve alors translaté de -1 soit $\text{pH}'_{\min} = -4,42$. Ainsi pour faire précipité le cobalt sans faire précipité le manganèse il faut prendre un pH vérifiant $4,42 < \text{pH} < 7,12$ en le prenant initialement $> 5,42$ puis en le baissant jusqu'à $4,42$ progressivement. Puisque Ni^{2+} possède le même pKs, il n'y a pas de zone disjointe qui ferait précipiter l'un sans faire précipiter l'autre donc il ne serait pas possible de séparer les ions Ni^{2+} .

III. Le moteur roue synchrone et son pilotage

29. En modélisant les paires de pôles par des spires, on raisonne sur une spire et on applique la superposition pour obtenir le champ pour les 2 spires. On a pour une spire la carte de champ :

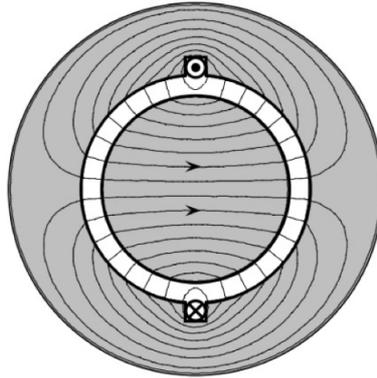


FIGURE 1 – pour 1 spire

30. Fonction paire, de période π . Si sa norme est constante notée B_M , on peut modéliser (d'après sa parité et sa période) $B_r(\theta) = B_M \cos(2\theta)$.
31. La première composante dans le développement de Fourier (est-ce au programme?) de $B_r(\theta)$ s'écrit $B_r(\theta) = B_1 \cos(2\theta)$. Ceci étant valable pour $\theta_r = 0$, pour un angle $\theta_r(t)$ à un t fixé, c'est comme si on avait fait une rotation du problème d'un angle θ_r soit un changement de variable $\theta = \theta' - \theta_r(t)$ d'où :

$$B_r(\theta') = B_1 \cos(2(\theta' - \theta_r))$$

32. L'entrefer est vide (air) donc de perméabilité μ_0 puis l'énergie magnétique stockée dans l'entrefer vaut :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2\mu_0} \int_{V_e} \|\vec{B}\|^2(\theta) dV = \frac{V_e}{4\pi\mu_0} \int_0^{2\pi} \|\vec{B}\|^2(\theta) d\theta$$

avec $\vec{B} = \vec{B}_r + \vec{B}_s = (B_1 \cos(2(\theta - \theta_r)) + B_0 \cos(p\theta - \omega t))\vec{e}_r$. d'où :

$$\|\vec{B}\|^2 = B_1^2 \cos^2(2(\theta - \theta_r)) + B_1 B_0 \left(\cos\left(\theta - \theta_r + \frac{p\theta - \omega t}{2}\right) + \cos\left(\theta - \theta_r - \frac{p\theta - \omega t}{2}\right) \right) + B_0^2 \cos^2(p\theta - \omega t)^2$$

or les intégrales des \cos^2 valent π puis il reste l'intégrale du terme centrale. On a ainsi :

$$\mathcal{E}_m = \frac{V_e}{4\pi\mu_0} \left(B_1^2 \pi + B_0^2 \pi + B_1 B_0 \int_0^{2\pi} \left(\cos\left(\theta - \theta_r + \frac{p\theta - \omega t}{2}\right) + \cos\left(\theta - \theta_r - \frac{p\theta - \omega t}{2}\right) \right) d\theta \right)$$

or cette intégrale est nulle si p est différent 2 et vaut $2\pi \cos(\frac{\omega t}{2} - \theta_r)$ si $p = 2$. En gardant la valeur de $p = 2$, on obtient :

$$\mathcal{E}_m = \frac{V_e}{4\mu_0} (B_1^2 + B_0^2 + 2B_1 B_0 \cos(\frac{\omega t}{2} - \theta_r))$$

33. On a :

$$\Gamma = \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial \theta_r} = \frac{V_e B_1 B_0}{2\mu_0} \sin(\frac{\omega t}{2} - \theta_r)$$

34. On a :

$$\Gamma = \frac{V_e B_1 B_0}{2\mu_0} \sin\left(\left(\frac{\omega}{2} - \Omega\right)t + \alpha\right)$$

de valeur moyenne non nulle si et seulement si le sinus ne dépend pas de t , c'est-à-dire :

$$\omega = 2\Omega$$

condition de synchronisme adaptée au problème.

35. Le couple maximal vaut ici :

$$\Gamma_{max} = \frac{V_e B_1 B_0}{2\mu_0} = \frac{2V_e B_M^2}{\pi\mu_0} \approx 5.1 \text{ N m}$$

Ce couple, valable pour 2 paires de pôles, est bien inférieur au couple visé. Plusieurs solutions :

- augmenter le nombre de paires de pôles (sur le rotor ou le stator mais ici on travaille sur le rotor j'ai l'impression). Ici le max c'est 8 ce qui donne $\Gamma'_{max} = \frac{8}{2}\Gamma_{max} \approx 20 \text{ N m}$ qui est toujours insuffisant par rapport au couple visé.
- Augmenter V_e (h ou R_S). **REMARQUE Importante :** Enfaite on peut montrer que les amplitudes des champs magnétiques sont en $1/l_e$ où l_e est l'épaisseur donc enfaite le couple max est en $1/l_e$ (un au num et deux au dén). Ainsi pour augmenter le couple il faut diminuer l'épaisseur de l'entrefer et non l'augmenter comme on pourrait le penser si l'on ne connaît pas le cours.

36. On a :

État	t	K_1	K_2	K'_1	K'_2	v_{ch}
0	$0 \leq t \leq t_0$	0	0	1	1	0
1	$t_0 \leq t \leq \frac{T}{2} - t_0$	1	0	0	1	$+E$
2	$\frac{T}{2} - t_0 \leq t \leq \frac{T}{2} + t_0$	1	1	0	0	0
3	$\frac{T}{2} + t_0 \leq t \leq T - t_0$	0	1	1	0	$-E$
4	$T - t_0 \leq t \leq T$	0	0	1	1	0

où l'on vérifie bien que chaque interrupteur est ouvert / fermé sur une durée de $T/2$.

37. Pour avoir $b_3 = 0$, il faut $3\gamma_0 = 6\pi\frac{t_0}{T} = \frac{\pi}{2}$ d'où $t_0 = \frac{T}{12}$ ($\gamma_0 = \frac{\pi}{6}$). On a :

$$V = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v_{ch}^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} (0 + E^2 \frac{\pi - 2\gamma_0}{\omega} + 0 + E^2 \frac{\pi - 2\gamma_0}{\omega} + 0)} = E \sqrt{1 - \frac{2\gamma_0}{\pi}}$$

pour l'intégrale, on calcule l'air des rectangles dans le chronogramme de $v_{ch}(t)^2$. De plus, l'amplitude du fondamental est :

$$A_1 = \frac{4E}{\pi} b_1 = \frac{4E}{\pi} \cos(\gamma_0)$$

d'où :

$$V_f = \frac{A_1}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}E}{\pi} \cos(\pi/6) = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{\pi} E$$

on en déduit :

$$\tau_H = \sqrt{\frac{1 - \frac{2\gamma_0}{\pi}}{\frac{6}{\pi^2}} - 1} = \frac{\sqrt{\pi^2 - 9}}{3} \approx 31\%$$

38. On a $v_{ch}(t) = \sum_{i=1}^6 v_{ch,\gamma_i}(t)$. (on demande juste d'exprimer donc pas de justification à priori même si je pense qu'une justification serait la bienvenue).

39. On a :

$$v_{ch}(t) = \frac{4E}{\pi} \sum_{i=1}^6 v_{ch,\gamma_i}(t) = \sum_{i=1}^6 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2p+1} \cos((2p+1)\gamma_i) \sin((2p+1)\omega t)$$

Finalement les coefficients de $v_{ch}(t)$ s'écrivent :

$$b_{2p+1} = \frac{4E}{\pi} \sum_{i=1}^6 \cos((2p+1)\gamma_i)$$

$b_{2p+1} = 0$ pour $p = 1, 2, 3, 4, 5$ et $b_1 = E$ ($p = 0$) nous donne le système suivant :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^6 \cos(\gamma_i) = \frac{\pi}{4}, \\ \sum_{i=1}^6 \cos(3\gamma_i) = 0, \\ \sum_{i=1}^6 \cos(5\gamma_i) = 0, \\ \sum_{i=1}^6 \cos(7\gamma_i) = 0, \\ \sum_{i=1}^6 \cos(9\gamma_i) = 0, \\ \sum_{i=1}^6 \cos(11\gamma_i) = 0. \end{cases}$$

On peut réécrire ce système sur les arguments des cosinus et on obtient donc un système de 6 équations à 6 inconnues (les γ_i) et qui admet bien une solution !