Concours commun Mines et Ponts 2025

CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES MP - MPI

m.laamoum2@gmail.com [1]

Inégalités de Khintchine

Inégalité de Hölder

Soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Soient $X, Y \in L^0(\Omega)$ que l'on suppose toutes les deux positives.

1 ▷ Inégalité de Young.

Si $x = 0$ ou $y = 0$, l'inégalité est triviale.

Supposons $x > 0$ et $y > 0$.

La fonction $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est concave (*car sa dérivée seconde est* $x \mapsto \dfrac{-1}{x^2} < 0$). L'inégalité de concavité donne , pour tous $a, b > 0$ et $\lambda = \dfrac{1}{p} \in]0, 1[$,

$$\ln(\lambda a + (1 - \lambda)b) \geq \lambda \ln(a) + (1 - \lambda) \ln(b)$$

donc

$$\ln\left(\frac{a}{p} + \frac{b}{q}\right) \geq \frac{1}{p} \ln(a) + \frac{1}{q} \ln(b)$$

comme $\dfrac{1}{p} \ln(a) + \dfrac{1}{q} \ln(b) = \ln\left(a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}}\right)$ alors

$$\frac{a}{p} + \frac{b}{q} \geq a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}}.$$

Cette inégalité appliquée à : $a = x^p$ et $b = y^q$ s'écrit

$$\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \geq xy$$

Ainsi $\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}_+, \quad xy \leq \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}}$.

2 ▷ Inégalité de Hölder pour les variables aléatoires :

- Soient $X, Y \in L^0(\Omega)$ positives.
  Si $\mathbb{E}(X^p) = 0$, comme $X^p \geq 0$, alors $X^p = 0$ presque sûrement (p.s.), donc $X = 0$ p.s. Alors $XY = 0$ p.s., et $\mathbb{E}(XY) = 0$. L'inégalité est donc vérifiée. De même si $\mathbb{E}(Y^q) = 0$.

1. Mes corrigés sont ici `https://tinyurl.com/4up84xze` 23-04-2025

- Supposons $\|X\|_p = \left(\mathbb{E}(X^p)\right)^{1/p} = 1$ et $\|Y\|_q = \left(\mathbb{E}(Y^q)\right)^{1/q} = 1$.
  D'après Q1, pour tout $\omega \in \Omega$, on a
  $$X(\omega)Y(\omega) \leq \frac{X(\omega)^p}{p} + \frac{Y(\omega)^q}{q}$$
  ce qu'on peut écrire
  $$X\ Y \leq \frac{X^p}{p} + \frac{Y^q}{q}$$
  L'espérance est une application linéaire et croissante , donc :
  $$\mathbb{E}(XY) \leq \frac{1}{p}\mathbb{E}(X^p) + \frac{1}{q}\mathbb{E}(Y^q) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$
  Comme $\|X\|_p = 1$ et $\|Y\|_q = 1$, on a bien $\mathbb{E}(XY) \leq \|X\|_p\|Y\|_q$.
- Si $\|X\|_p > 0$ et $\|Y\|_q > 0$, posons $X' = \frac{X}{\|X\|_p}$ et $Y' = \frac{Y}{\|Y\|_q}$. On a $\mathbb{E}\left((X')^p\right) = 1$ et $\mathbb{E}\left((Y')^q\right) = 1$. D'après le cas précédent on a $\mathbb{E}(X'Y') \leq 1$. Substituons X' et Y' par leurs expressions :
  $$\mathbb{E}\left(\frac{X}{\|X\|_p}\frac{Y}{\|Y\|_q}\right) = \frac{1}{\|X\|_p\|Y\|_q}\mathbb{E}(XY) \leq 1$$
  donc $\boxed{\mathbb{E}(XY) \leq \|X\|_p\|Y\|_q = \left(\mathbb{E}(X^p)\right)^{1/p}\left(\mathbb{E}(Y^q)\right)^{1/q}}$

3 ▷ Si $p = q = 2$,

- On a alors $1/p + 1/q = 1/2 + 1/2 = 1$. Les conditions sont vérifiées. L'inégalité de Hölder devient :
  $$\mathbb{E}(XY) \leq \left(\mathbb{E}(X^2)\right)^{1/2}\left(\mathbb{E}(Y^2)\right)^{1/2}.$$
  C'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour l'espérance.
- **Preuve directe :**
  Considérons le polynôme en $t \in \mathbb{R}$: $P(t) = \mathbb{E}\left((X - tY)^2\right)$. Puisque $(X - tY)^2 \geq 0$, son espérance est positive ou nulle : $P(t) \geq 0$ pour tout t. Développons $P(t)$:
  $$P(t) = \mathbb{E}(X^2 - 2tXY + t^2Y^2) = \mathbb{E}(X^2) - 2t\mathbb{E}(XY) + t^2\mathbb{E}(Y^2).$$
  $P(t)$ est un polynôme du second degré en t.
  Si $\mathbb{E}(Y^2) = 0$, alors $Y = 0$ p.s., $\mathbb{E}(XY) = 0$, l'inégalité est vraie.
  Si $\mathbb{E}(Y^2) > 0$, alors $P(t)$ est un trinôme du second degré qui reste toujours positif ou nul. Son discriminant Δ doit être négatif ou nul. On a
  $$\Delta = 4\left(\left(\mathbb{E}(XY)\right)^2 - \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)\right) \leq 0.$$
  donc
  $$\left(\mathbb{E}(XY)\right)^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2).$$
  Comme $X, Y \geq 0$ alors $\mathbb{E}(XY) \geq 0$, ce qui donne :
  $$\mathbb{E}(XY) \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)}\sqrt{\mathbb{E}(Y^2)} = \left(\mathbb{E}(X^2)\right)^{1/2}\left(\mathbb{E}(Y^2)\right)^{1/2}.$$

Une inégalité de déviation

Soit $(X_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une suite de v.a.i. indépendantes suivant la loi de Rademacher ($\mathbb{P}(X_i=1)=\mathbb{P}(X_i=-1)=1/2$).

4 ▷ On utilise les développements en série entière : On a pour tout $t\in\mathbb{R}$

$$\mathrm{ch}\,(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{2k}}{(2k)!}\quad\text{et}\quad \mathrm{e}^{t^2/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(t^2/2\right)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{2^n n!}$$

On compare les coefficients des termes t^{2k}.
On a si $k=0$, $\frac{(2k)!}{2^k.k!}=1$.
Si $k\geq 1$ alors

$$\frac{(2k)!}{2^k.k!}=\frac{(2k)(2k-1)...(k+1)}{2^k}$$

et on a $\dfrac{h}{2}\geq 1$ pour tout $h\in\left\{k+1,...,2k\right\}$, donc

$$\frac{(2k)!}{2^k.k!}\geq 1$$

Par conséquent, $\dfrac{1}{(2k)!}\leq\dfrac{1}{2^k.k!}$. Comme tous les termes des séries sont positifs, on peut sommer les inégalités terme à terme :

$$\mathrm{ch}\,(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{2k}}{(2k)!}\leq\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{2k}}{2^k k!}=\mathrm{e}^{t^2/2}$$

d'où le résultat .

5 ▷ Soit $t\geq 0$ et $(c_1,\dots,c_n)\in\mathbb{R}^n$. Posons $S=\sum\limits_{i=1}^{n}c_iX_i$.

- On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathrm{e}^{tS}) &= \mathbb{E}\Big(\exp\Big(t\sum_{i=1}^{n}c_iX_i\Big)\Big)\\ &= \mathbb{E}\big(\prod_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{tc_iX_i}\big).\end{aligned}$$

  Les variables aléatoires X_i sont indépendantes donc les variables aléatoires $Y_i=\mathrm{e}^{tc_iX_i}$ sont donc aussi indépendantes. L'espérance du produit de variables indépendantes est le produit des espérances donc :

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{tS})=\prod_{i=1}^{n}\mathbb{E}(\mathrm{e}^{tc_iX_i}).$$

- Calculons $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{tc_iX_i})$.
  X_i prend les valeurs 1 et -1 avec probabilités $\dfrac{1}{2}$ chacune, donc par le théorème du transfert :

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{tc_iX_i})=\mathrm{e}^{tc_i(1)}\mathbb{P}(X_i=1)+\mathrm{e}^{tc_i(-1)}\mathbb{P}(X_i=-1)=\frac{\mathrm{e}^{tc_i}+\mathrm{e}^{-tc_i}}{2}=\mathrm{ch}\,(tc_i).$$

- Conclusion :

  On a
$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{tS}) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{ch}\,(tc_i).$$
  et d'après la question Q4
$$\mathrm{ch}\,(tc_i) \leq \mathrm{e}^{\left(tc_i\right)^2/2} = \mathrm{e}^{t^2c_i^2/2}.$$
  Ce qui donne
$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{tS}) \leq \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{t^2c_i^2/2} = \exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i^2\right).$$
  d'où le résultat.

6 $\triangleright$ Soit $t \geq 0$, $x \geq 0$ et $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$.
Posons $S = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i X_i$, $Y = \mathrm{e}^{xS}$ et $V^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i^2$.

- Comme Y est positive et $a = \mathrm{e}^{tx} > 0$, l'inégalité de Markov pour Y et a donne : $\mathbb{P}(Y \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(Y)}{a}$, donc
$$\mathbb{P}(\mathrm{e}^{xS} \geq \mathrm{e}^{tx}) \leq \frac{\mathbb{E}(\mathrm{e}^{xS})}{\mathrm{e}^{tx}}.$$
  En utilisant le résultat de Q5 , $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{xS}) \leq \mathrm{e}^{x^2V^2/2}$.
$$\mathbb{P}(\mathrm{e}^{xS} \geq \mathrm{e}^{tx}) \leq \frac{\mathrm{e}^{x^2V^2/2}}{\mathrm{e}^{tx}} = \mathrm{e}^{-tx}\mathrm{e}^{x^2V^2/2}.$$
- Le résultat est valable pour la famille $(-c_1, \ldots, -c_n)$, donc
$$\mathbb{P}(\mathrm{e}^{-xS} \geq \mathrm{e}^{tx}) \leq \mathrm{e}^{-tx}\mathrm{e}^{x^2V^2/2}.$$
  On a l'inclusion des évenements :
$$\left[\mathrm{e}^{x|S|} > \mathrm{e}^{tx}\right] \subset \left[\mathrm{e}^{x|S|} \geq \mathrm{e}^{tx}\right] \subset \left[\mathrm{e}^{-xS} \geq \mathrm{e}^{tx}\right] \cup \left[\mathrm{e}^{xS} \geq \mathrm{e}^{tx}\right]$$
  donc
$$\mathbb{P}(\mathrm{e}^{x|S|} > \mathrm{e}^{tx}) \leq \mathbb{P}(\mathrm{e}^{-xS} \geq \mathrm{e}^{tx}) + \mathbb{P}(\mathrm{e}^{xS} \geq \mathrm{e}^{tx}) \leq 2\mathrm{e}^{-tx}\mathrm{e}^{x^2V^2/2}.$$
  d'où $\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{e}^{x|S|} > \mathrm{e}^{tx}) \leq 2\mathrm{e}^{-tx}\mathrm{e}^{x^2V^2/2}}$.

7 $\triangleright$ On garde les mêmes notations : $S = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i X_i$ et $V^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i^2$. On a supposé $V^2 > 0$.
Soit $t \geq 0$ et $x > 0$.
On a
$$\left[\mathrm{e}^{x|S|} > \mathrm{e}^{tx}\right] = [|S| > x]$$
La question Q6 donne
$$\mathbb{P}((\,|S| > x) \leq 2\mathrm{e}^{-tx}\mathrm{e}^{x^2V^2/2}$$
Considérons la fonction $g_t : \lambda \mapsto \frac{\lambda^2V^2}{2} - \lambda t$ pour $\lambda > 0$.
On a $g_t'(\lambda) = \lambda V^2 - t$, elle s'annule en $\lambda_0 = \frac{t}{V^2}$, où g_t atteint son minimum . La valeur minimale est donc
$$g_t\left(\frac{t}{V^2}\right) = -\frac{t^2}{2V^2}$$

Donc

$$\mathbb{P}\big(|S| > x\big) \leq 2\mathrm{e}^{-tx}\mathrm{e}^{x^2V^2/2} \leq 2\mathrm{e}^{-t^2/2V^2}$$

D'où le résultat demandé.

Inégalités de Khintchine

Soit $p \in [1, +\infty[$. Soit $(X_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une suite v.a.r. Rademacher, indépendantes. Soit $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$.

8 ▷ Soit X une v.a. r positive et finie. Soit $F_X(t) = \mathbb{P}(X > t)$ pour $t \geq 0$.

- Convergence de l'intégrale :

  ▶ En 0 :

  Comme $p \geq 1$alors $t \mapsto t^{p-1}$est bornée au voisinage de 0 de plus on a $|F_X(t)| = |\mathbb{P}(X > t)| \leq 1$, donc la fonction $t \mapsto t^{p-1}F_X(t)$ est intégrable au voisinage de 0 .

  ▶ En $+\infty$:

  X une variable aléatoire finie ($X(\Omega)$ *est un ensemble fini*) et elle est bornée. Soit $M = \max X(\Omega)$, donc $X(\omega) \leq M$ pour tout $\omega \in \Omega$, par suite. $F_X(t) = \mathbb{P}(X > t) = 0$ si $t \geq M$. Donc on a

  $$\int_0^x t^{p-1}F_X(t)dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^M t^{p-1}F_X(t)dt$$

  D'où la convergence de l'intégrale .

- *S*oit X une v.a. réelle positive et finie. Posons $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ avec

  $$0 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_m = M \quad (M = \max X(\Omega))$$

  On a

  $$\mathbb{E}(X^p) = \sum_{k=1}^m x_k^p \ \mathbb{P}(X = x_k)$$

  On décompose l'intégrale (*en prenant* $x_0 := 0$) :

  $$\int_0^{+\infty} pt^{p-1}F_X(t)dt = \int_0^{x_m} pt^{p-1}\mathbb{P}(X > t)dt = \sum_{k=1}^m \int_{x_{k-1}}^{x_k} pt^{p-1}\mathbb{P}(X > t)dt$$

  Pour tout $t \in\,]x_{k-1}, x_k[$ on a $\mathbb{P}(X > t) = \mathbb{P}(X \geq x_k)$ (constante), donc

  $$\int_0^{+\infty} pt^{p-1}F_X(t)dt = \sum_{k=1}^m \mathbb{P}(X \geq x_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} pt^{p-1}dt = \sum_{k=1}^m \mathbb{P}(X \geq x_k)(x_k^p - x_{k-1}^p).$$

  Simplifions cette somme

  $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^m \mathbb{P}(X \geq x_k)(x_k^p - x_{k-1}^p) &= \sum_{k=1}^m \mathbb{P}(X \geq x_k)\ x_k^p - \sum_{k=1}^m \mathbb{P}(X \geq x_k)\ x_{k-1}^p \\ &= \sum_{k=1}^m \mathbb{P}(X \geq x_k)\ x_k^p - \sum_{j=0}^{m-1} \mathbb{P}(X \geq x_{j+1})\ x_j^p \quad \text{(Changement } j = k-1) \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} x_k^p\ \big(\mathbb{P}(X \geq x_k) - \mathbb{P}(X \geq x_{k+1})\big) + x_m^p\ \mathbb{P}(X \geq x_m) - x_0^p\ \mathbb{P}(X \geq x_1)\end{aligned}$$

Or, l'événement $[X \geq x_k]$ est la réunion disjointe de $[X = x_k]$ et$[X \geq x_{k+1}]$. Donc,

$$\mathbb{P}(X \geq x_k) = \mathbb{P}(X = x_k) + \mathbb{P}(X \geq x_{k+1})$$

Ce qui implique :

$$\mathbb{P}(X \geq x_k) - \mathbb{P}(X \geq x_{k+1}) = \mathbb{P}(X = x_k)$$

De plus, comme x_m est la plus grande valeur, l'événement $[X \geq x_m]$ est simplement $[X = x_m]$, donc $\mathbb{P}(X \geq x_m) = \mathbb{P}(X = x_m)$.

On obtient alors

$$\sum_{k=1}^{m} \mathbb{P}(X \geq x_k)(x_k^p - x_{k-1}^p) = \sum_{k=1}^{m-1} x_k^p \mathbb{P}(X = x_k) + x_m^p \mathbb{P}(X = x_m)$$

par suite

$$\int_0^{+\infty} pt^{p-1} F_X(t)dt = \sum_{k=1}^{m} x_k^p \mathbb{P}(X = x_k) = \mathbb{E}(X^p)$$

Ainsi $\boxed{\mathbb{E}(X^p) = p\int_0^{\infty} t^{p-1}\mathbb{P}(X > t)dt = p\int_0^{+\infty} t^{p-1}F_X(t)dt.}$

9 ▷ On suppose $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i^2 = 1$.

- Convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} t^3 e^{-t^2/2}dt$:
  La fonction $\varphi : t \mapsto t^3 e^{-t^2/2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, donc φ est intégrable sur $[0, +\infty[$. D'où la convergence de l'intégrale .
- Soit $S = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i X_i$. On suppose $V^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i^2 = 1$. On applique la formule de Q8 à la variable aléatoire $|S|^4$.

  $$\mathbb{E}(S^4) = \mathbb{E}(|S|^4) = 4\int_0^{\infty} t^{4-1}\mathbb{P}(|S| > t)dt.$$

  De Q7 on a

  $$\mathbb{P}(|S| > t) \leq \mathbb{P}(|S| \geq t) \leq 2\mathrm{e}^{-t^2/2} \quad (V^2 = 1\ ).$$

  Ce qui donne $\boxed{\mathbb{E}(S^4) \leq 8\int_0^{\infty} t^3\mathrm{e}^{-t^2/2}dt}$.

  Une intégration par parties donne $8\displaystyle\int_0^{\infty} t^3\mathrm{e}^{-t^2/2}dt = 16$.

10 ▷ Soit $S = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i X_i$.

- On a par linéarité de l'espérance :

  $$\mathbb{E}(S^2) = \mathbb{E}(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i c_j X_i X_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i c_j \mathbb{E}(X_i X_j).$$

- Calcul de $\mathbb{E}(X_i X_j)$.
  Si $i = j$, $\mathbb{E}(X_i X_j) = \mathbb{E}(X_i^2)$. Puisque X_i prend les valeurs 1 ou -1, donc $X_i^2 = 1$et $\mathbb{E}(X_i^2) = 1$.

Si $i \neq j$, les variables X_i et X_j sont indépendantes , donc $\mathbb{E}(X_iX_j) = \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j)$.

Calculons $\mathbb{E}(X_i)$:

$$\mathbb{E}(X_i) = 1 \cdot \mathbb{P}(X_i = 1) + (-1) \cdot \mathbb{P}(X_i = -1) = 1 \cdot (1/2) - 1 \cdot (1/2) = 0.$$

Donc, si $i \neq j$, $\mathbb{E}(X_iX_j) = 0 \times 0 = 0$.

Ainsi $\boxed{\mathbb{E}(X_iX_j) = \delta_{i,j}\ .}$

- Conclusion :

  La somme se simplifie :

$$\mathbb{E}(S^2) = \sum_{i=1}^{n} c_ic_i\mathbb{E}(X_i^2) + \sum_{i\neq j} c_ic_j(0) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \cdot 1 = \sum_{i=1}^{n} c_i^2.$$

  D'où $\boxed{\mathbb{E}(S^2) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2}$.

11 ▷ Soit $S = \sum_{i=1}^{n} c_iX_i$. Soit $V = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i^2}$.

On veut montrer $\|S\|_p \leq \beta_p\|S\|_2$ (*avec* $\|S\|_p = \mathbb{E}(\,|S|^p\,)^{1/p}$).

D'après Q10, on a

$$\|S\|_2 = \mathbb{E}(S^2)^{1/2} = (V^2)^{1/2} = V.$$

Si $V = 0$, alors tous les c_i sont nuls, $S = 0$, et l'inégalité est vraie pour tout β_p.

Supposons $V > 0$. Soit $c_i' = \dfrac{c_i}{V}$. Alors

$$\sum_{i=1}^{n}(c_i')^2 = \frac{1}{V^2}\sum_{i=1}^{n} c_i^2 = 1$$

Soit $S' = \sum_{i=1}^{n} c_i'X_i = \frac{1}{V}S$.

Par un raisonnement similaire à la question Q9 on obtient pour tout $p \geq 1$:

$$\mathbb{E}(\,|S'|^p\,) \leq 2p\int_0^{\infty} t^{p-1}e^{-t^2/2}dt = K_p.$$

Ce qui donne $\mathbb{E}(\,\left|\frac{1}{V}S\right|^p\,) \leq K_p$ et $\mathbb{E}(\,|S|^p\,) \leq K_pV^p$.

En prenant $\beta_p = K_p^{1/p}$ on a $(\mathbb{E}(\,|S|^p\,)^{1/p} \leq \beta_pV$.

Ainsi $\boxed{\|S\|_p \leq \beta_p\|S\|_2}$.

12 ▷ On suppose $p \geq 2$. Montrons que$\|S\|_2 \leq \|S\|_p$ avec $S = \sum_{i=1}^{n} c_iX_i$.

Si $p = 2$, l'inégalité est évidente .

Supposons $p > 2$, prenons $q = p/2 > 1$ et $r > 0$ tel que

$$\frac{1}{r} = 1 - \frac{1}{q} = \frac{q-1}{q} = \frac{p-2}{p}$$

Appliquons l'inégalité de Hölder à $|S|^2 = |S|^2 \cdot 1$, avec les exposants $q = p/2$ et $r = p/(p-2)$:

$$\mathbb{E}(\,|S|^2\,) = \mathbb{E}(\,|S|^2 \cdot 1) \leq \mathbb{E}(\,\left(|S|^2\right)^q\,)^{1/q}.\,(\mathbb{E}[1^r])^{1/r}$$

On a $\mathbb{E}(\,|S|^2\,) = \mathbb{E}(S^2)$ et $\mathbb{E}(\,\left(|S|^2\right)^q\,) = \mathbb{E}(\,|S|^{2q}\,) = \mathbb{E}(\,|S|^p\,)$, donc

$$\mathbb{E}(\,|S|^2\,) \leq \mathbb{E}(\,|S|^p\,)^{1/q} \cdot 1$$

Substituons $q = p/2$:

$$\mathbb{E}(\,|S|^2\,) \leq \mathbb{E}(\,|S|^p\,)^{2/p}$$

Ainsi

$$\mathbb{E}(\,|S|^2\,)^{1/2} \leq \mathbb{E}(\,|S|^p\,)^{1/p}$$

Ce qui s'écrit aussi $\boxed{\|S\|_2 \leq \|S\|_p.}$.

(**Remarque :** *On peut utilise l'inégalité de Jensen. Pour $r = p/2 \geq 1$, la fonction $\phi(x) = x^r$ est convexe sur $\mathbb{R}_+$, alors on a : $\phi(\mathbb{E}(S^2)) \leq \mathbb{E}(\phi(S^2))$, soit $(\mathbb{E}(S^2))^{p/2} \leq \mathbb{E}((S^2)^{p/2}) = \mathbb{E}(|S|^p)$...*)

13 ▷ On suppose $1 \leq p < 2$.

On résout l'équation d'inconnue θ.

$$\frac{1}{2} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{4}$$

On a

$$\frac{1}{2} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{4} \Leftrightarrow 2p = 4\theta + p(1-\theta) \Leftrightarrow \frac{p}{4-p} = \theta$$

L'application $x \mapsto \dfrac{x}{4-x}$ est croissante sur $[1, 2[$, donc si $p \in [1, 2[$, $\theta = \frac{p}{4-p} \in [\frac{1}{3}, 1[$. D'où $\theta \in \,]0, 1[$.

14 ▷ On suppose $1 \leq p < 2$.

Soit $S = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i X_i$. On veut montrer

$$\mathbb{E}(S^2) \leq (\mathbb{E}(|S|^p))^{2\theta/p} (\mathbb{E}(|S|^4))^{(1-\theta)/2}.$$

On a

$$\frac{1}{2} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{4}$$

donc

$$1 = \frac{1}{(p/2\theta)} + \frac{1}{(2/(1-\theta))}$$

Ecrivons

$$\mathbb{E}(S^2) = \mathbb{E}(|S|^{2\theta}|S|^{2(1-\theta)})$$

et utilisons l'inégalité de Hölder avec les exposants $a = \dfrac{p}{2\theta}$ et $b = \dfrac{2}{1-\theta}$:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(S^2) & \leq & \big(\mathbb{E}((|S|^{2\theta})^a)\big)^{1/a} \big(\mathbb{E}((|S|^{2(1-\theta)})^b)\big)^{1/b} \\ & \leq & \big(\mathbb{E}(|S|^{2\theta a})\big)^{1/a} \big(\mathbb{E}(|S|^{2b(1-\theta)})\big)^{1/b} \end{array}$$

Comme $2\theta a = p$ et $2b(1-\theta) = 4$ alors

$$\mathbb{E}(S^2) \leq \big(\mathbb{E}(|S|^p)\big)^{2\theta/p} \big(\mathbb{E}(|S|^4)\big)^{(1-\theta)/2}$$

15 ▷ On suppose $1 \leq p < 2$.

Montrer qu'il existe $\tilde{\alpha}_p > 0$ tel que $\tilde{\alpha}_p \|S\|_2 \leq \|S\|_p$.

De l'inégalité de Q14 , avec $\theta = p/(4-p)$ on a :

$$\mathbb{E}(S^2) \leq \big(\mathbb{E}(|S|^p)\big)^{2\theta/p} \, \big(\mathbb{E}(|S|^4)\big)^{(1-\theta)/2}.$$

soit encore

$$\|S\|_2^2 \leq \|S\|_p^{2\theta}\|S\|_4^{2(1-\theta)} \text{ (1)}$$

d'après Q11 on a :

$$\|S\|_4 \leq \beta_4\|S\|_2.$$

on remplace dans l'inégalité (1) :

$$\begin{aligned} \|S\|_2^2 &\leq \|S\|_p^{2\theta}(\beta_4\|S\|_2)^{2(1-\theta)}. \\ &\leq \beta_4^{2(1-\theta)}.\|S\|_p^{2\theta}\|S\|_2^{2(1-\theta)} \end{aligned}$$

Si $\|S\|_2 = 0$, l'inégalité est triviale.
Si $\|S\|_2 > 0$, on divise par $\|\|S\|_2^{2(1-\theta)}$:

$$\|S\|_2^{2\theta} = \|S\|_2^{2-2(1-\theta)} \leq \beta_4^{2(1-\theta)}\|S\|_p^{2\theta}.$$

par suite

$$\|S\|_2 \leq \beta_4^{(1-\theta)/\theta}\|S\|_p$$

Comme $\theta = \frac{p}{4-p}$ alors $\frac{1-\theta}{\theta} = \frac{2(2-p)}{p}$. Donc

$$\|S\|_2 \leq \|S\|_p\beta_4^{2(2-p)/p}.$$

Posons $\tilde{\alpha}_p = \beta_4^{-2(2-p)/p} = \beta_4^{2(p-2)/p}$. Comme $\beta_4 > 0$ (*en fait* $\beta_4 = (8\int_0^\infty t^3 \mathrm{e}^{-t^2/2}dt)^{1/4} = 2$) , $\tilde{\alpha}_p$ (*égale à* $4^{(p-2)/p}$) est bien défini et strictement positif.
Ainsi $\boxed{\tilde{\alpha}_p\|S\|_2 \leq \|S\|_p}$.

16 ▷ Dans cette question on revient au cas général : $p \geq 1$.
De Q12 on a $\|S\|_2 \leq \|S\|_p$ si $p \geq 2$.
De Q15 on a $\tilde{\alpha}_p\|S\|_2 \leq \|S\|_p$ si $1 \leq p < 2$.
En posant $\alpha_p = 1$ si $p \geq 2$ et $\alpha_p = \tilde{\alpha}_p$ si $1 \leq p < 2$, on obtient $\boxed{\alpha_p\|S\|_2 \leq \|S\|_p}$ pour tout $p \geq 1$, avec $\alpha_p > 0$.

Une première conséquence

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r.i. Rademacher.

17 ▷ Soit φ l'application définie sur $(L^0(\Omega))^2$ par $\varphi(X,Y) = \mathbb{E}(XY)$.
$L^0(\Omega)$ est l'espace vectoriel des v.a. r sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.
Vérifions les propriétés d'un produit scalaire.

- Symétrie :

$$\varphi(Y,X) = \mathbb{E}(YX) = \mathbb{E}(XY) = \varphi(X,Y).$$

- Bilinéarité : Par symétrie, il suffit de vérifier la linéarité à gauche.
  Soient $X_1, X_2, Y \in L^0(\Omega)$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\varphi(aX_1 + bX_2, Y) = \mathbb{E}((aX_1 + bX_2)Y) = \mathbb{E}(aX_1Y + bX_2Y).$$

Par linéarité de l'espérance :

$$\varphi(aX_1 + bX_2, Y) = a\mathbb{E}(X_1Y) + b\mathbb{E}(X_2Y) = a\varphi(X_1, Y) + b\varphi(X_2, Y).$$

- Positive : $\varphi(X, X) = \mathbb{E}(X^2)$. Puisque $X^2 \geq 0$ alors $\mathbb{E}(X^2) \geq 0$.
- Définie : Si $\varphi(X, X) = 0$, alors $\mathbb{E}(X^2) = 0$. Comme X^2 est une v.a. positive, $\mathbb{E}(X^2) = 0$ implique $X^2 = 0$ presque sûrement. Ceci signifie $X = 0$ presque sûrement. Par hypothèse, on confond v.a.r nulle et v.a.r presque sûrement nulle. Donc $\varphi(X, X) = 0$ implique $X = 0$.
(*On confond donc* $L^0(\Omega)$ *avec l'ensemble quotient* $L^0(\Omega)/\mathcal{R}$ *avec* $\mathcal{R}$ *la relation d'égalité presque sûrement des v.a.r qui est une relation d'équivalence sur* $L^0(\Omega)$)

φ est bien un produit scalaire sur $L^0(\Omega)$.

18 ▷ Soit l'application $\psi : u \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \to \sum\limits_{i=0}^{\infty} u_i X_i$, avec les X_i qui sont des variables aléatoires indépendantes et qui suivent une loi de Rademacher.

- $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ est l'espace des suites réelles nulles à partir d'un certain rang. Si $u = (u_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, alors il existe $K_u \in \mathbb{N}$ tel que $u_i = 0$ pour $i > K_u$. $\psi(u) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} u_i X_i = \sum\limits_{i=0}^{K_u} u_i X_i$. C'est une somme finie de variables aléatoires, donc c'est une variable aléatoire et $\psi(u) \in L^0(\Omega)$.
ψ prend bien ses valeurs dans $L^0(\Omega)$.
- Le produit scalaire sur $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ est $\langle u, v\rangle = \sum\limits_{i=0}^{\infty} u_i v_i$. (C'est une somme finie). Le produit scalaire sur $L^0(\Omega)$ est $\varphi(X, Y) = \mathbb{E}(XY)$.
Montrons que $\varphi(\psi(u), \psi(v)) = \langle u, v\rangle$, pour tout $u, v \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$.
Soient $u, v \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$. Il existe $K = \max(K_u, K_v)$ tel que $u_i = v_i = 0$ pour $i > K$ donc

$$\psi(u) = \sum_{i=0}^{K} u_i X_i \text{ et } \psi(v) = \sum_{j=0}^{K} v_j X_j.$$

et on a

$$\begin{aligned} \varphi(\psi(u), \psi(v)) &= \mathbb{E}(\psi(u)\psi(v)) \\ &= \mathbb{E}((\sum_{i=0}^{K} u_i X_i).(\sum_{j=0}^{K} v_j X_j)). \\ &= \mathbb{E}(\sum_{i=0}^{K}\sum_{j=0}^{K} u_i v_j X_i X_j) \\ &= \sum_{i=0}^{K}\sum_{j=0}^{K} u_i v_j \mathbb{E}(X_i X_j) \end{aligned}$$

Comme vu en Q10 on a $\mathbb{E}(X_i X_j) = \delta_{ij}$ donc

$$\varphi(\psi(u), \psi(v)) = \sum_{i=0}^{K} u_i v_i = \langle u, v\rangle.$$

Donc $\varphi(\psi(u), \psi(v)) = \langle u, v\rangle$, ψ conserve le produit scalaire (*c'est une isométrie linéaire*).

19 ▷ $\mathcal{R}$ est l'image de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ par ψ, donc c'est un sous-espace vectoriel de $L^0(\Omega)$.

Soit $Y \in R$, il est de la forme $Y = \sum\limits_{i=0}^{K} c_i X_i$. Les inégalités de Khintchine (Q11, Q12, Q15) affirment que pour tout $p \in [1, +\infty[$, il existe des constantes $\alpha_p, \beta_p > 0$ telles que pour tout $Y \in \mathcal{R}$:

$$\alpha_p \|Y\|_2 \leq \|Y\|_p \leq \beta_p \|Y\|_2$$

Ceci montre que toute norme $\|\cdot\|_p$ est équivalente à la norme $\|\cdot\|_2$ sur $\mathcal{R}$.

Ainsi pour tout $p, q \in [1, +\infty[$, les normes $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_q$ sont équivalentes sur $\mathcal{R}$.

Une deuxième conséquence

On suppose $n = 2^k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.

20 ▷ Soit $a = (a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{R}^k$.

- Considérons l'espace probabilisé $\Omega = \{-1, 1\}^k$, de cardinal n , muni de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$ et de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$, où $\mathbb{P}(\{\varepsilon\}) = 1/n = 1/2^k$ pour tout $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) \in \Omega$.
- Pour $i = 1, \ldots, k$, soit $X_i : \Omega \to \{-1, 1\}$ la variable aléatoire définie par $X_i(\varepsilon) = \varepsilon_i$.
  Vérifions que les X_i sont des variables de Rademacher indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$:
  Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \{-1, 1\}^k$ on a

$$\mathbb{P}(X_1 = \lambda_1, ..., X_k = \lambda_k) = \mathbb{P}(\{(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)\}) = \frac{1}{2^k}$$

  et si $\lambda \in \{-1, 1\}$

$$\mathbb{P}(X_i = \lambda) = \frac{\text{Card}\,\{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) \in \Omega \mid \varepsilon_i = \lambda\}}{\text{Card}\,(\Omega)} = \frac{2^{k-1}}{2^k} = \frac{1}{2}$$

- Considérons la variable aléatoire $S = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i X_i$ sur Ω .
  L'espérance de $|S|^p$: on a

$$\mathbb{E}(|S|^p) = \sum_{\varepsilon \in \Omega} |S(\varepsilon)|^p \mathbb{P}(\{\varepsilon\}) \quad (\ \textit{formule d'espérance cas fini}\ )$$

  donc

$$\mathbb{E}(|S|^p) = \sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^k} |\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i a_i|^p \cdot \frac{1}{n}$$

  Ce qui donne

$$\|S\|_p = (\mathbb{E}|S|^p)^{1/p} = (\frac{1}{n} \sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^k} |\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i a_i|^p)^{1/p}$$

  D'après Q10 on a

$$\mathbb{E}(S^2) = \sum_{i=1}^{k} a_i^2 = (||a||_2^{\mathbb{R}^k})^2$$

  par suite $\boxed{\|S\|_2 = ||a||_2^{\mathbb{R}^k}}$.

D'après Q19 il existe $\alpha_1, \beta_1 > 0$ tels que

$$\alpha_1 \|S\|_2 \leq \|S\|_1 \leq \beta_1 \|S\|_2.$$

$$\alpha_1 ||a||_2^{\mathbb{R}^k} \leq \frac{1}{n} \sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^k} |\sum_{i=1}^k \varepsilon_i a_i| \leq \beta_1 ||a||_2^{\mathbb{R}^k}.$$

D'où la relation .

21 $\triangleright$ Soit $\Omega = \{-1, 1\}^k$. Ordonnons les $n = 2^k$ éléments de Ω de manière arbitraire : $\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \ldots, \varepsilon^{(n)}$. Considérons l'application linéaire $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ définie par : $T(a_1, \ldots, a_k) = (x_1, \ldots, x_n)$, où $x_j = \sum\limits_{i=1}^k \varepsilon_i^{(j)} a_i$. C'est-à-dire, la j-ième composante de $T(a)$ est la valeur $S(\varepsilon^{(j)})$ avec $S = \sum\limits_{i=1}^k a_i X_i$.

- Calculons $\|T(a)\|_2^{\mathbb{R}^n}$:

$$(\|T(a)\|_2^{\mathbb{R}^n})^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2 = \sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^k \varepsilon_i^{(j)} a_i)^2 = \sum_{\varepsilon \in \Omega} (\sum_{i=1}^k \varepsilon_i a_i)^2.$$

Le calcul fait dans Q20 donne

$$\mathbb{E}(S^2) = \sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^k} (\sum_{i=1}^k \varepsilon_i a_i)^2 \cdot \frac{1}{n}$$

donc

$$(\|T(a)\|_2^{\mathbb{R}^n})^2 = n\mathbb{E}(S^2).$$

D'après Q10, $\mathbb{E}(S^2) = \sum\limits_{i=1}^k a_i^2 = (\|a\|_2^{\mathbb{R}^k})^2$, donc $(\|T(a)\|_2^{\mathbb{R}^n})^2 = n(\|a\|_2^{\mathbb{R}^k})^2$.

Ceci implique $\boxed{\|T(a)\|_2^{\mathbb{R}^n} = \sqrt{n}\|a\|_2^{\mathbb{R}^k}}$.

- T est injective .

On a

$$T(a) = 0 \Leftrightarrow \|T(a)\|_2^{\mathbb{R}^n} = 0 \iff \|a\|_2^{\mathbb{R}^k} = 0 \iff a = 0.$$

Donc $\ker T = \{0\}$ et T est injective.

- L'espace F.

Soit $F = \mathrm{Im}(T)$, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $\dim(F) = \dim(\mathbb{R}^k) = k$.

T est surjective de $\mathbb{R}^k$ vers F , donc induit une bijection de $\mathbb{R}^k$ vers F.

Soit $x \in F$ alors $x = T(a)$ pour un unique $a \in \mathbb{R}^k$. On a donc $\|x\|_2 = \sqrt{n}\|a\|_2^{\mathbb{R}^k}$.

Considérons la norme 1 de x dans $\mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_1^{\mathbb{R}^k} = \sum_{j=1}^n |x_j| = \sum_{j=1}^n |\sum_{i=1}^k \varepsilon_i^{(j)} a_i| = \sum_{\varepsilon \in \Omega} |\sum_{i=1}^k \varepsilon_i a_i|.$$

D'après Q20, on a :

$$n\alpha_1 \|a\|_2^{\mathbb{R}^k} \leq \|x\|_{\mathbb{R}^n,1} \leq n\beta_1 \|a\|_2^{\mathbb{R}^k}.$$

donc

$$n\alpha_1 \frac{1}{\sqrt{n}} \|x\|_2 \leq \|x\|_1^{\mathbb{R}^k} \leq n\beta_1 \frac{1}{\sqrt{n}} \|x\|_2.$$

Ainsi $\boxed{\alpha_1 \sqrt{n} \|x\|_2 \leq \|x\|_1^{\mathbb{R}^k} \leq \beta_1 \sqrt{n} \|x\|_2.}$