cpge-paradise.com

Corrigé de l'épreuve de Mathématique : Mines-Ponts-Math 1-MPI-2025
24 Avril 2025

Makrem Salhi : makremessalhi@gmail.com

Inégalité de Hölder

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$. L'inégalité de Young que l'on doit établir est trivialement vraie si $x = 0$ ou $y = 0$. On suppose alors que $x > 0$ et $y > 0$. Comme $t \mapsto \ln(t)$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ car sa dérivée est décroissante, on déduit que
$$\ln\left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}\right) \geq \frac{1}{p}\ln(x^p) + \frac{1}{q}\ln(y^q),$$
donc
$$\ln\left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}\right) \geq \ln(xy).$$
Par suite,
$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

2. Comme XY est une variable aléatoire finie, son espérance est finie et on a, par le théorème de Transfert,
$$\mathbf{E}(XY) = \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ y\in Y(\Omega)}} xyP(X = x, Y = y).$$
Comme X et Y sont finies et positives, il vient, par la question précédente,
$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(XY) &= \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ y\in Y(\Omega)}} xyP(X = x, Y = y)\\
&\leq \frac{1}{p}\sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ y\in Y(\Omega)}} x^pP(X = x, Y = y) + \frac{1}{q}\sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ y\in Y(\Omega)}} y^qP(X = x, Y = y)\\
&\leq \frac{1}{p}\sum_{x\in X(\Omega)} x^p \sum_{y\in Y(\Omega)} P(X = x, Y = y) + \frac{1}{q}\sum_{y\in Y(\Omega)} y^q \sum_{x\in CX(\Omega)} P(X = x, Y = y)\\
&\leq \frac{1}{p}\sum_{x\in X(\Omega)} x^pP(X = x) + \frac{1}{q}\sum_{y\in Y(\Omega)} y^qP(Y = y)\\
&\leq \frac{\mathbf{E}(X^p)}{p} + \frac{\mathbf{E}(Y^q)}{q}.
\end{aligned}$$
Soulignons ici que le passage de la ligne 2 à la ligne suivante dans la suite des inégalités ci-haut est justifié par le fait que les sommes sont finies, le passage de la ligne 3 à la ligne suivante utilise le fait que $\{x, \quad x \in X(\Omega)\}$ est un système complet d'événements, de même

pour l'ensemble $\{y, \quad y \in Y(\Omega)\}$ et, enfin, la dernière ligne est juste une application du théorème de Transfert.
Maintenant, si $\mathbf{E}(X^p) = \mathbf{E}(Y^q) = 1$, l'inégalité de Hölder est vérifiée. Notons aussi que X est positive et donc

$$\mathrm{E}(X^p) = 0 \Longleftrightarrow \|X\|_p = 0,$$

de même,

$$\mathrm{E}(Y^q) = 0 \Longleftrightarrow \|Y\|_q = 0.$$

Par suite, si X ou Y est nulle, l'inégalité est aussi automatiquement vérifiée.
Supposons alors que $X > 0$ et $Y > 0$. Ainsi,

$$\mathrm{E}\left(\frac{X}{\|X\|_p}\right)^p = 1 = \left(\frac{Y}{\|Y\|_q}\right)^q.$$

D'après l'étude qu'on a fait,

$$\mathrm{E}\left(\frac{X}{\|X\|_p}\frac{Y}{\|Y\|_q}\right) \leq 1,$$

ce qui fournit

$$\mathbf{E}(XY) \leq \|X\|_p\|Y\|_q,$$

d'où le résultat.

3. Lorsque $p = q = 2$, on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Prouvons maintenant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans sa version générale sans avoir recours à l'inégalité de Hölder. Pour cela, on considère deux variables aléatoires U et V admettant chacune un moment d'ordre 2 et on pose : $f(t) = \mathbf{E}\big((tU+V)^2\big)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Par suite,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \mathbf{E}(U)^2t^2 + 2t\mathbf{E}(UV)t + \mathbf{E}(V^2) \geq 0.$$

Donc,

$$\Delta' = \big(\mathbf{E}(UV)\big)^2 - \mathbf{E}(U)^2\mathbf{E}(V)^2 \leq 0.$$

Par conséquent,

$$|\mathbf{E(UV)}| \leq \sqrt{\mathbf{E}(U)}\sqrt{\mathbf{E}(V)}.$$

D'où le résultat.

Une inégalité de déviation

4. Soit $t \in \mathbb{R}$. Le développement en série entière de la fonction ch fournit

$$\mathrm{ch}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}.$$

Comme $(2n)! \geq 2.4...(2n)$, donc $(2n)! \geq 2^n n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il en résulte que

$$\mathrm{ch}(t) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n n!}.$$

D'autre part, on sait que
$$e^{\frac{t^2}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n n!},$$
d'où l'inégalité recherchée.

5. Soient $(c_1, ..., c_n) \in \mathbb{R}^n$ et $t \in \mathbb{R}_+$. Si $t = 0$, l'inégalité à prouver est vérifiée. Supposons alors que $t > 0$ et posons
$$f_i(x) = e^{tc_i x}, \quad x \in \mathbb{R}, i \in [\![1, n]\!].$$
L'indépendance mutuelle des variables aléatoires X_i implique l'indépendence mutuelle de la famille des varibales aléatoires $\big(f_i(X_i)\big)_{1 \leq i \leq n}$. On en déduit que
$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(\exp\left(t\sum_{i=1}^n c_i X_i\right)\right) &= \mathrm{E}\left(\prod_{i=1}^n e^{tc_i X_i}\right) \\ &= \prod_{i=1}^n \mathrm{E}\left(e^{tc_i X_i}\right). \end{aligned}$$
D'autre part, par le théorème de Transfert, on a
$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \mathrm{E}\left(e^{tc_i X_i}\right) = \frac{1}{2}e^{tc_i} + \frac{1}{2}e^{-tc_i} = \mathrm{ch}(tc_i).$$
Il vient, par la question précénte, que
$$\mathrm{E}\left(\exp\left(t\sum_{i=1}^n c_i X_i\right)\right) = \prod_{i=1}^n \mathrm{ch}(c_i t) \leq \prod_{i=1}^n e^{\frac{c_i^2 t^2}{2}}.$$
Par suite,
$$\mathrm{E}\left(\exp\left(t\sum_{i=1}^n c_i X_i\right)\right) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^n c_i^2\right).$$

6. Soient $x \geq 0$, $t \geq 0$ et $(c_1, ..., c_n) \in \mathbb{R}^n$. Si $x = 0$, le terme à gauche de l'inégalité à prouver est nul car il s'agit dans ce cas de la probabilité d'un événement impossible, et donc l'inégalité est automatiquement vérifiée si $x = 0$. Supposons donc que $x > 0$, comme l'application exponentielle est une bijection sur $\mathbb{R}$, on a
$$\left(\exp\left(x\left|\sum_{i=1}^n c_i X_i\right|\right) > e^{tx}\right) = \left(\left|\sum_{i=1}^n c_i X_i\right| > t\right).$$
Par suite,
$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\exp\left(x\left|\sum_{i=1}^n c_i X_i\right|\right) > e^{tx}\right) &= \mathbf{P}\left(\left|\sum_{i=1}^n c_i X_i\right| > t\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i > t\right) + \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i < -t\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i > t\right) + \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n c_i(-X_i) > t\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\exp\left(x\sum_{i=1}^n c_i X_i\right) > e^{tx}\right) + \mathbf{P}\left(\exp\left(x\sum_{i=1}^n c_i(-X_i)\right)\right) \end{aligned}$$

cpge-paradise.com

Par ailleurs, l'inégalité de Markov fournit

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\exp\left(x\sum_{i=1}^{n}c_iX_i\right)>e^{tx}\right) &\leq e^{-xt}\mathbf{E}\left(\exp\left(x\sum_{i=1}^{n}c_iX_i\right)\right)\\ &\leq e^{-xt}\exp\left(\frac{x^2}{2}\sum_{i=1}^{n}c_i^2\right) \quad \text{(d'après la question5).}\end{aligned}$$

Comme les variables aléatoires $-X_i$ suivent aussi une loi de Rademacher car on a : $(-X_i)(\Omega)=\{-1,1\}$ et $\mathbf{P}(-X_i=1)=\mathbf{P}(-X_i=-1)=\dfrac{1}{2}$, et comme les $-X_i$ sont aussi indépendantes, l'inégalité de Markov et la question 5 donnent

$$\mathbf{P}\left(\exp\left(x\sum_{i=1}^{n}c_i(-X_i)\right)>e^{tx}\right)\leq e^{-xt}\exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n}c_i^2\right).$$

En conclusion, on a

$$\mathbf{P}\left(\exp\left(x\left|\sum_{i=1}^{n}c_iX_i\right|\right)>e^{tx}\right)\leq 2e^{-xt}\exp\left(\frac{x^2}{2}\sum_{i=1}^{n}c_i^2\right).$$

7. Soient $t\geq 0$ et $(c_1,...,c_n)\in\mathbb{R}^n$. Pour tout $x>0$, on a, par bijectivité de la fonction exponentielle,

$$\mathbf{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n}c_iX_i\right|>t\right)=\mathbf{P}\left(\exp\left(x\left|\sum_{i=1}^{n}c_iX_i\right|\right)>e^{xt}\right).$$

En choisissant $x=\dfrac{t}{\sum_{i=1}^{n}c_i^2}$, l'inégalité précédente fournit immédiatement le résultat escompté.

Inégalités de Khintchine

8. En posant $x_0=0$, on a

$$X(\Omega)\subset\{x_0,x_1,..,x_m\}$$

où : $x_0=0<x_1<...<x_m$ et $m\in\mathbb{N}^*$. Ainsi, $F_X(t)=1$ si $t>x_m$, $F_X(t)=0$ si $t<x_0$ et F_X est constante sur chaque intervalle $[x_j,x_j+1]$ pour $j=0,...,m-1$. On en déduit que F_X est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Ainsi, la fonction $t\mapsto t^{p-1}F_X(t)$ est continue par morceau sur $\mathbb{R}$, comme elle est nulle sur $[x_m,+\infty[$, on déduit qu'elle est intégrable et

donc $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} t^{p-1}F_X(t)dt$ converge. De surcroît, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} t^{p-1}F_X(t)dt &= \int_0^{x_m} t^{p-1}F_X(t)dt \\
&= \sum_{k=0}^{m-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} t^{p-1}F_X(t)dt \\
&= \sum_{k=0}^{m-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} t^{p-1}\sum_{j=k+1}^{m} P(X)x_j)dt \\
&= \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=k+1}^{m} P(X=x_j)\int_{x_k}^{x_{k+1}} t^{p-1}dt \\
&= \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{m} P(X=x_j)\sum_{k=0}^{j-1}\left(x_k^{p+1}-x_k^p\right) \\
&= \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{m} P(X=x_j)x_j^p \\
&= \frac{1}{p}\mathbf{E}(X^p) \quad \text{(théorème de Transfert).}
\end{aligned}$$

9. La fonction $u : t \mapsto t^3e^{-\frac{t^2}{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et, par puissances comparées, $u(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ $(t \to \pm\infty)$. Comme la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, il en est de même pour la fonction u qui est alors intégrable sur $\mathbb{R}_+$. D'où la convergence de l'intégrale en question.
Par ailleurs, en posant
$$X = \left|\sum_{i=1}^{n} c_iX_i\right|,$$
on observe que X est une variable aléatoire réelle positive et finie car les X_i sont finies. En prenant $p=4$ dans l'égalité établie dans la question précédente, on obtient
$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X^4) &= 4\int_0^{+\infty} t^3\mathbf{P}(X>t)dt \\
&\leq 8\int_0^{+\infty} t^3e^{-\frac{t^2}{2}}dt \quad \text{(d'après la question 7).}
\end{aligned}$$

10. On a
$$\left(\sum_{i=1}^{n} c_iX_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} c_i^2X_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} c_ic_jX_iX_j.$$
Notons que : $\mathbf{E}(X_i) = 1.\frac{1}{2} + (-1).\frac{1}{2} = 0$ pour tout $i \in \{1,...,n\}$, donc si $i \neq j$, par indépendance des X_i, on a
$$\mathbf{E}(X_iX_j) = \mathbf{E}(X_i)\mathbf{E}(X_j) = 0.$$

De plus, par le théorème de Transfert, on a $\mathbf{E}(X_i^2) = 1$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$. Ainsi, par linéarité de l'espérance , on a

$$\mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i^2\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2.$$

11. Afin de simplifier les notations, posons $S = \left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|$ et $c = \sum_{i=1}^{n} c_i^2$. Je propose deux méthodes :

Première méthode : par application de la question 8 pour la variable aléatoire $X = S$ qui est manifestement positive et finie, on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(S^p) &= p\int_0^{+\infty} t^{p-1} P(S > t)dt \\
&\leq 2p\int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-\frac{t^2}{2c}}dt \quad (\text{ d'après la question7}) \\
&\leq 2pc^{\frac{p}{2}}\int_0^{+\infty} u^{p-1} e^{-\frac{u^2}{2}}du \quad (\text{ changement de varibale } = \frac{t}{\sqrt{c}}).
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right\|_p \leq \beta_p \left\|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right\|_2,$$

où

$$\beta_p = 2p\left(\int_0^{+\infty} u^{p-1} e^{-\frac{u^2}{2}}du\right)^{\frac{1}{p}} \in \mathbb{R}_+^*.$$

Deuxième méthode : soit $\lambda > 0$ et considérons la fonction $f(x) = x^p e^{-\lambda x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$. On a $f'(x) = x^{p-1}e^{-\lambda x}(p - \lambda x)$ et par suite : $\sup_{x\geq 0} f(x) = f\left(\frac{p}{\lambda}\right)$. Ainsi,

$$\forall x \geq 0, \quad x^p \leq \frac{1}{\lambda^p} p^p e^{-p} e^{\lambda x}.$$

Il en découle que

$$S^p \leq \frac{1}{\lambda^p} p^p e^{-p} e^{\lambda S}.$$

Par croissance de l'espérance, on a

$$\mathbf{E}(S^p) \leq \frac{1}{\lambda^p} p^p e^{-p} \mathbf{E}\left(e^{\lambda S}\right).$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(S^p) &\leq \frac{p^p e^{-p}}{\lambda^p}\left(\mathbf{E}\left(\exp\left(\lambda\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)\right) + \mathbf{E}\left(\exp\left(\sum_{i=1}^{n} c_i(-X_i)\right)\right)\right) \\
&\leq \frac{p^p e^{-p}}{\lambda^p}\left(2e^{\frac{c}{2}\lambda^2}\right) \quad (\text{ d'après la question 5}).
\end{aligned}$$

En choisisant $\lambda = \frac{1}{\sqrt{c}}$, on obtient

$$\mathbf{E}(S^p) \leq 2p^p e^{-p} e^{\frac{1}{2}} c^{\frac{p}{2}}.$$

On en déduit aussitôt que

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right\|_p \leq 2^{\frac{1}{p}} p e^{\frac{p-2}{2}} \left\|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right\|_2 .$$

D'où l'inégalité souhaitée.

12. Soit $p \geq 2$. La fonction : $g : t \mapsto t^{\frac{p}{2}}$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ car sa dérivée $f'(t) = \dfrac{p}{2} t^{\frac{p}{2}-1}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Posons encore : $S = \left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|$, par le théorème de Transfert, on a

$$\mathbf{E}(S^2) = \sum_{s \in S(\Omega)} s^2 \mathbf{P}(S = s).$$

Ainsi, en utilisant la convexité de g et en guardant en mémoire le fait que l'on a : $\sum_{s \in S(\Omega)} P(S = s) = 1$, on obtient

$$\begin{aligned}
\left(\mathbf{E}(S^2)\right)^{\frac{p}{2}} &= g\left(\sum_{s \in S(\Omega)} s^2 \mathbf{P}(S = s)\right) \\
&\leq \sum_{s \in S(\Omega)} \mathbf{P}(S = s) g(s^2) \\
&= \sum_{s \in S(\Omega)} s^p \mathbf{P}(S = s) \\
&= \mathbf{E}(S^p) \quad (\text{ théorème de Transfert}).
\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right\|_2 \leq \left\|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right\|_p .$$

13. Un simple calcul fournit

$$\theta = \frac{p}{4-p},$$

comme $1 \leq p < 2$, on déduit immédiatement que $\theta \in]0, 1[$.

14. Soulignons que la question précédente fournit l'dentité

$$1 = \frac{1}{\frac{p}{2\theta}} + \frac{1}{\frac{2}{1-\theta}},$$

de plus, on a

$$\frac{p}{2\theta} = \frac{4-p}{2} \geq 1 \text{ et } \frac{2}{1-\theta} = \frac{2(4-p)}{2-p} \geq 1.$$

Posons, comme d'habitude, $S = \left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right| \geq 0$. En écrivant

$$S^2 = S^{2\theta + 2(1-\theta)},$$

cpge-paradise.com

puis en appliquant l'inégalité de Hölder obtenue dans la question 2, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(S^2) &= \mathbf{E}\left(S^{2\theta}S^{2(1-\theta)}\right)\\ &\leq \left(\mathbf{E}(S^{2\theta})^{\frac{p}{2\theta}}\right)^{\frac{2\theta}{p}}\left(\mathbf{E}(S^{2(1-\theta)})^{\frac{2}{1-\theta}}\right)^{\frac{1-\theta}{2}}\\ &\leq (\mathbf{E}(S^p))^{\frac{2\theta}{p}}\left(\mathbf{E}(S^4)\right)^{\frac{1-\theta}{2}}\end{aligned}$$

15. Soit $S = \left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|$. La question précédente montre que

$$\mathbf{E}(S^2) \leq (\mathbf{E}(S^p))^{\frac{2\theta}{p}}\left(\mathbf{E}(S^4)\right)^{\frac{1-\theta}{2}}.$$

Par la question 11, en choisissant $p=4$, il existe une consante $\mu>0$ telle que

$$\mathbf{E}(S^4) \leq \mu\left(\mathbf{E}(S^2)\right)^2.$$

Ainsi,

$$\mathbf{E}(S^2) \leq \mu^{\frac{1-\theta}{2}}\left(\mathbf{E}(S^2)\right)^{1-\theta}(\mathbf{E}(S^p))^{\frac{2\theta}{p}}.$$

On en déduit que

$$\left(\mathbf{E}(S^2)\right)^{1-\theta}\left\{\mu^{\frac{1-\theta}{2}}(\mathbf{E}(S^p))^{\frac{2\theta}{p}} - \left(\mathbf{E}(S^2)\right)^{\theta}\right\} \geq 0.$$

Comme $(\mathbf{E}(S^2))^{1-\theta} \geq 0$, on conclut que

$$\left(\mathbf{E}(S^2)\right)^{\theta} \leq \mu^{\frac{1-\theta}{2}}(\mathbf{E}(S^p))^{\frac{2\theta}{p}}.$$

En conclusion, on a

$$\left(\mathbf{E}(S^2)\right)^{\frac{1}{2}} \leq \mu^{\frac{1-\theta}{4\theta}}(\mathbf{E}(S^p))^{\frac{1}{p}}.$$

En posant

$$\tilde{\alpha}_p = \frac{1}{\mu^{\frac{1-\theta}{4\theta}}},$$

on obtient l'inégalité voulue.

16. On pose : $\alpha_p = \min(\tilde{\alpha}_p, 1)$ et le résultat demandé découle immédiatement des questions 12 et 15.

Une première conséquence

17. L'application φ est bien définie car il s'agit de l'espérance de variables aléatoires finies. En outre, φ est manifestement symétrique, elle est linéaire à gauche car l'espérance est linéaire et elle est positive par positivité de l'espérance. Finalement, si $\varphi(X,X)=0$, alors, comme $X \in L^0(\Omega)$, on a $\|X\|=0$ et donc $X=0$. Il en découle que φ est bien un produit scalaire sur $L^0(\Omega)$.

18. Soit $u \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, alors $\psi(u)$ est une variable aléatoire finie comme somme finie de variables aléatoires finies, d'où le résultat.
Pour tout $u, v \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, on a
$$\begin{aligned}\varphi(\psi(u), \psi(v)) &= \varphi\left(\sum_{i=0}^{+\infty} u_i X_i, \sum_{j=0}^{+\infty} v_j X_j\right) \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} u_i v_j \varphi(X_i, X_j) \quad \text{(les deux sommes sont finies).}\end{aligned}$$
Par ailleurs, par indépendance es X_i, on a
$$\varphi(X_i X_j) = \mathbf{E}(X_i X_j) = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j \\ 1, & \text{si } i = j. \end{cases}$$
On en déduit que
$$\varphi(\psi(u), \psi(v)) = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i v_i = \langle u, v \rangle,$$
ceci montre que ψ conserve le produit scalaire.
19. Notons que ψ est linéaire et donc $\mathbf{R} = \psi(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})})$ est un sous espace vectoriel de $L^0(\Omega)$. Soient $U, V \in \mathbf{R}$, il existe alors $u, v \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ tels que
$$U = \psi(u) = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i X_i \text{ et } V = \psi(v) = \sum_{i=0}^{+\infty} v_i X_i.$$
Notons n le plus grand indice pour lequel $u_i = v_i = 0$ pour tout $i \geq n$. Ainsi,
$$U = \sum_{i=0}^{n} u_i X_i \text{ et } V = \sum_{i=0}^{n} v_i X_i.$$
En combinant les questions 11 et 16, on observe que
$$\alpha_p \|U\|_2 \leq \|U\|_p \leq \beta_p \|U\|_2.$$
Cela montre que les normes $\| \|_p$ et $\| \|_2$ sont équivalents sur $\mathbf{R}$. Par suite, les normes $\| \|_q$ et $\| \|_2$ sont équivalents sur $\mathbf{R}$. Par transitivité de la relation d'équivalence des normes, on déduit que les normes $\| \|_p$ et $\| \|_q$ sont équivalents sur $\mathbf{R}$.

Une deuxième conséquence

20. Soit $(a_1, ..., a_k) \in \mathbb{R}^k$, posons : $S = \left|\sum_{j=1} a_j X_j\right|$. Par le théorème de Transfert, on a
$$\begin{aligned}\mathbf{E}(S) &= \sum_{(\varepsilon_1,...,\varepsilon_k)\in\{-1,1\}^k} \left|\sum_{i=1}^{k} a_i \varepsilon_i\right| P(X_1 = \varepsilon_1, ..., X_k = \varepsilon_k) \\ &= \frac{1}{2^k} \sum_{(\varepsilon_1,...,\varepsilon_k)\in\{-1,1\}^k} \left|\sum_{i=1}^{k} a_i \varepsilon_i\right| \quad \text{(les } X_i \text{ sont indéoendantes).}\end{aligned}$$

cpge-paradise.com

D'autre part, les questions 11 et 16 assurent l'existence de deux constantes $\beta_1 > 0$ et $\alpha_1 > 0$ telles que

$$\alpha_1 \|S\|_2 \leq \mathbf{E}(S) \leq \beta_1 \|S\|_2.$$

En outre, on a, par la question 10,

$$\|S\|_2 = \|(a_1, ..., a_k\|_2^{\mathbb{R}^k},$$

d'où le résultat demandé.

21. On ordonne les $n = 2^k$ éléments de $\{-1, 1\}^k$ de manière arbitraire, on observe aussi que l'application T est linéaire et injective. En effet, si $(a_1, ..., a_k) \in \ker(T)$, alors, on a, en particulier : $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \text{sign}(a_i) a_i = 0$ et donc $a_i = 0$ pour tout $i = 1, ..., k$. Par suite, $F = T(\mathbb{R}^k)$ est s-ev de $\mathbb{R}^n$ de dimension k. Soit $x \in F$, il existe alors $(a_1, ..., a_k) \in \mathbb{R}^k$ tel que $x = T(a_1, ..., a_k)$ et on a

$$\|x\|_1^{\mathbb{R}^n} = \frac{1}{2^k} \sum_{(\varepsilon_1,...,\varepsilon_k)\in\{-1,1\}^k} \left| \sum_{i=1}^{k} a_i \varepsilon_i \right|.$$

D'autre part, en posant $S_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} a_i X_i$, on voit que

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(S_1^2) &= \mathbf{E}\left(\sum_{i,j=1}^{k} a_i a_j X_i X_j \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{k} a_i a_j \mathbf{E}(X_i X_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \\
&= \left(\|(a_1, ..., a_k)\|_2^{\mathbb{R}^k} \right)^2.
\end{aligned}$$

Cependant, on a, par le théorème de Transfert,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(S_1^2) &= \sum_{(\varepsilon_1,...,\varepsilon_k)\in\{-1,1\}^k} \left(\sum_{i=1}^{k} a_i \varepsilon_i \right)^2 \mathbf{P}\left(X_1 = \varepsilon_1, ..., X_k = \varepsilon_k\right) \\
&= \frac{1}{2^k} \sum_{(\varepsilon_1,...,\varepsilon_k)\in\{-1,1\}^k} \left(\sum_{i=1}^{k} a_i \varepsilon_i \right)^2 \\
&= n \|T(a_1, ..., a_k)\|_2^{\mathbb{R}^n} \\
&= n \|x\|_2^{\mathbb{R}^n}.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\|(a_1, ..., a_k)\|_2^{\mathbb{R}^k} = \sqrt{n} \|x\|_2^{\mathbb{R}^n}.$$

On conclut, à l'aide de la question précédente, que

$$\forall x \in F, \quad \alpha_1 \sqrt{n} \|x\|_2^{\mathbb{R}^n} \leq \|x\|_1^{\mathbb{R}^n} \leq \beta_1 \sqrt{n} \|x\|_2^{\mathbb{R}^n},$$

d'où le résultat prononcé.