Proposition de correction : MINES MP Maths 2 2025

Awatef Nasri
khaled.jebari@imt-atlantique.net

26 avril 2025

Attention : Il s'agit d'une proposition de corrigé rédigée de manière impulsive. Si vous repérez une erreur ou une imprécision, n'hésitez pas à me contacter par mail.

A. propriétés du polynôme p_0 et stabilité des racines

1)

On a :

$$p(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

Alors pour $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned} x^n p\left(\frac{1}{x}\right) &= x^n \sum_{k=0}^{n} a_k x^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} x^k \\ &= p_0(x) \end{aligned}$$

par définition :

$$p(X) = a_n \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)$$

Alors :

$$\begin{aligned} p_0(X) &= X^n p\left(\frac{1}{X}\right) \\ &= a_n X^n \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{X} - \alpha_i\right) \\ &= a_n \prod_{i=1}^{n} \left(X\left(\frac{1}{X} - \alpha_i\right)\right) \\ &= a_n \prod_{i=1}^{n} (1 - \alpha_i X) \end{aligned}$$

2)

$\Rightarrow$) Supposons que $p \wedge p_0 = 1$, alors il existe $Q, S \in \mathbb{R}[X]$ tel que $pQ + Sp_0 = 1$

Supposons que p possède une racine stable α, alors $p(\alpha) = 0$ et $p_0(\alpha) = \alpha^n p(\alpha^{-1}) = 0$ donc $(pQ + Sp_0)(\alpha) = 0 \neq 1$ absurde d'où le résultat.

$\Leftarrow$)par contraposée : supposons que $p \wedge p_0 \neq 1$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $(X - \alpha)$ est un facteur commun entre p et p_0, tel que $p(\alpha) = p_0(\alpha) = p(\alpha^{-1}) = 0$ d'où le résultat.

3)

On a :

$$\begin{aligned} p_0(X) &= a_n \prod_{j=1}^{n} (1-\alpha_j X) \\ &= a_n \prod_{j=1}^{n} (\alpha_j^{-1} - X)\alpha_j \\ &= (-1)^n \prod_{j=1}^{n} \alpha_j \left[a_n \prod_{j=1}^{n} (X-\alpha_j^{-1}) \right] \end{aligned}$$

Comme les $(\alpha_j)_{1\leq j\leq n}$ sont stables, alors

$$\prod_{j=1}^{n} \alpha_j = 1 \quad \text{et} \quad \{\alpha_j : 1 \leq j \leq n\} = \{\alpha_j^{-1} : 1 \leq j \leq n\}$$

Donc :

$$p_0(X) = (-1)^n p(X)$$

On déduit donc qu'il existe $\lambda \in \{-1, 1\}$ tel que :

$$p = \lambda p_0$$

4)

On a d'après **3** :

$$p(X) = \lambda X^n p\left(\frac{1}{X}\right)$$

Alors, en dérivant, on aura :

$$p'(X) = \lambda n X^{n-1} p\left(\frac{1}{X}\right) + \lambda X^n \left(-\frac{1}{X^2}\right) p'\left(\frac{1}{X}\right)$$

En multipliant par X, on aura :

$$Xp'(X) = \lambda n X^n p\left(\frac{1}{X}\right) - \lambda X^{n-1} p'\left(\frac{1}{X}\right)$$

Comme $\deg(p') = n-1$, on déduit :

$$h = Xp' = np - \lambda (p')_0$$

On a :

$$\begin{aligned} h_0(X) &= X^n h\left(\frac{1}{X}\right) \\ &= nX^n p\left(\frac{1}{X}\right) - \lambda X^n (p')_0 \left(\frac{1}{X}\right) \\ &= np_0 - \lambda X p' \qquad (\text{car } (p_0)_0 = p \ \forall p) \\ &= \frac{n}{\lambda} p - \lambda X p' \\ &= \lambda n p - \lambda X p' \qquad (\text{car } \lambda^2 = 1) \\ &= \lambda (np - Xp') \end{aligned}$$

5)

On a $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$, les n racines distinctes de p (ils sont chacune de multiplicité 1)

D'après le théorème de Rolle, $\exists \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1} \in \mathbb{R}$ tel que

$$\alpha_1 < \gamma_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_{n-1} < \gamma_{n-1} < \alpha_n$$

et

$$p'(\gamma_i) = 0 \quad \forall\, 1 \leq i \leq n-1 \quad \text{et} \quad \deg(p') = n-1$$

Donc p' est scindé sur $\mathbb{R}$

On a

$$h_0 = \lambda(np - Xp') = \lambda(np - h)$$

Alors

$$h_0 \wedge h = p \wedge h = p \wedge Xp' \quad \text{or d'après ce qui précède } p \wedge Xp' = 1 \Rightarrow h \wedge h_0 = 1$$

Supposons que p' admet une racine stable, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$p'(\alpha) = (p')_0(\alpha) = 0$$

On a $h(\alpha) = \alpha p'(\alpha) = 0$ Or $h(\alpha) = np(\alpha) - \lambda \underbrace{(p')_0(\alpha)}_{=0} = 0 \Rightarrow p(\alpha) = 0$

Alors

$$h_0(\alpha) = \lambda(np(\alpha) - \alpha p'(\alpha)) = 0$$

Donc

$$h_0(\alpha) = h(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha \text{ est une racine stable de } h$$

Ce qui contredit $h \wedge h_0 = 1$ à travers question **2**. Donc p' n'admet pas de racine stable.

2ème Méthode **(Tuz)** : Montrons que :

$$p' \wedge (p')_0 = 1$$

On a :

$$\begin{aligned} p' \wedge (p')_0 &= p' \wedge (np - h) \qquad (\text{car } h = np - \lambda(p')_0) \\ &= p' \wedge h_0 \qquad (\text{car } h_0 = \lambda(np - h)) \\ &= Xp' \wedge h_0 \qquad (\text{car } X \text{ ne divise pas } h_0) \\ &= h \wedge h_0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

D'où le résultat

B. Liberté d'une famille des polynômes

6)

Soit $j \in [\![1, n]\!]$ On a :

$$f_j(\alpha_i) = a_n \prod_{k=j+1}^{n} (1 - \alpha_k \alpha_i) \prod_{k=1}^{j-1} (\alpha_i - \alpha_k)$$

En supposant qu'il existe i, k tels que $1 \leq i < k \leq n$ et $\alpha_i \alpha_k = 1$

Si $i \in [\![1, j-1]\!]$, alors $f_j(\alpha_i) = 0$, car le 2e produit s'annule.

Si $i > j$ or $k > j$, alors $k \geq j+1$ or $\alpha_k \alpha_j = 1$, donc le 1er produit s'annule.

Donc $f_j(\alpha_i) = 0$, ceci est vrai $\forall j \in [\![1, n]\!]$

Alors α_i est racine de f_j pour tout $j \in [\![1, n]\!]$

Supposons que $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre, donc cette famille est une famille libre de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ de taille $n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$

Alors $(f_1, \ldots, f_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$

Il suffit de choisir un polynômes dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui ne s'annule pas en α_i, pour contredire le fait qu'il s'écrit comme combinaison linéaire des f_j

D'où le résultat.

7)

Soit $j \in [\![1, n]\!]$

Pour $f \in E$, on a α_j est une racine de $(1-\alpha_j X)f - (1-\alpha_j^2)f(\alpha_j)$

Alors :

$$\frac{(1-\alpha_j X)f - (1-\alpha_j^2)f(\alpha_j)}{X-\alpha_j} \in E(*) \quad \Rightarrow \quad P_j(E) \subset E$$

On a $P_j(0_E) = 0_E$

Soient $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
P_j(f+\lambda g) &= \frac{(1-\alpha_j X)(f+\lambda g) - (1-\alpha_j^2)(f+\lambda g)(\alpha_j)}{X-\alpha_j} \\
&= \frac{(1-\alpha_j X)f - (1-\alpha_j^2)f(\alpha_j)}{X-\alpha_j} + \lambda \cdot \frac{(1-\alpha_j X)g - (1-\alpha_j^2)g(\alpha_j)}{X-\alpha_j} \\
&= P_j(f) + \lambda P_j(g)
\end{aligned}$$

Donc P_j est un endomorphisme de E, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$.

Remarque (*) : On pose $f = \frac{P}{Q}$ tel que Q s'écrit comme produit fini de facteurs $(1-\alpha_j X)$.

Alors :

$$P_j(f) = \frac{(1-\alpha_j X)\dfrac{P}{Q} - (1-\alpha_j^2)\dfrac{P(\alpha_j)}{Q(\alpha_j)}}{X-\alpha_j}$$

$$= \frac{(1-\alpha_j X)Q(\alpha_j)P - (1-\alpha_j^2)P(\alpha_j)Q}{(X-\alpha_j)Q(\alpha_j)Q}$$

On remarque que α_j est une racine de $(1-\alpha_j X)Q(\alpha_j)P - (1-\alpha_j^2)P(\alpha_j)Q$

Alors

$$P_j(f) = \frac{\widetilde{P}}{Q} \quad \text{avec } \widetilde{P} \in \mathbb{R}[X]$$

Soit $f \in \ker(P_j)$, alors :

$$(1-\alpha_j X)f - (1-\alpha_j^2)f(\alpha_j) = 0$$

Donc :

$$f = \frac{(1-\alpha_j^2)f(\alpha_j)}{1-\alpha_j X} \in \text{Vect}\left(\frac{1}{1-\alpha_j X}\right)$$

Alors :

$$\ker(P_j) \subset \text{Vect}\left(\frac{1}{1-\alpha_j X}\right) \quad \text{or} \quad \text{Vect}\left(\frac{1}{1-\alpha_j X}\right) \subset \ker(P_j)$$

Donc :

$$\ker(P_j) = \text{Vect}\left(\frac{1}{1-\alpha_j X}\right)$$

8)

Soit $j \in [\![1, n]\!]$, $g \in E$

$$P_j\left(\frac{(X-\alpha_j)g}{1-\alpha_j X}\right) = \frac{(X-\alpha_j)g - (1-\alpha_j^2)\cdot 0}{X-\alpha_j} = g$$

9)

Prenons $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ tels que

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_k g_k = 0$$

Montrons par récurrence que $\gamma_1 = \cdots = \gamma_n = 0$
On a d'abord, en divisant par $\prod_{i=1}^{n}(1-\alpha_i X)$, que

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_k g_k = 0$$

On a, pour $j \in [\![1, n]\!]$:

$$g_j = \frac{a_n \prod\limits_{i=1}^{j-1}(X-\alpha_i)}{\prod\limits_{i=1}^{j}(1-\alpha_i X)}$$

—
Pour $j = 1$,

$$g_1 = \frac{a_n}{1-\alpha_1 X} \quad \Rightarrow \quad g_1(\alpha_1) \neq 0 \quad \text{et} \quad g_j(\alpha_1) = 0 \quad \forall j \geq 2$$

(Le produit du numérateur s'annule)
Donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_k g_k(\alpha_1) = \gamma_1 g_1(\alpha_1) = 0 \Rightarrow \gamma_1 = 0$$

—
Supposons $\gamma_1 = \cdots = \gamma_{j-1} = 0$, montrons que $\gamma_j = 0$
On a :

$$\sum_{k=j}^{n} \gamma_k g_k = 0$$

Si $\alpha_j \notin \{\alpha_k \mid 1 \leq k \leq j-1\}$, on est bien, et on aura le résultat par la même méthode que l'initialisation.

Sinon, si α_j apparaît exactement m fois dans cet ensemble, alors :

$$g_j = \frac{a_n (X-\alpha_j)^m \prod\limits_{i=1}^{j-m-1}(X-\alpha_i)}{\prod\limits_{i=1}^{j}(1-\alpha_i X)}$$

tel que les α_k restants dans le produit sont tous $\neq \alpha_j$

D'après la question **8** (on note $P_j^{(k)} = \underbrace{P_j \circ P_j \circ \cdots \circ P_j}_{k \text{ fois}}$) :

$$P_j^{(k)}(g_j) = \frac{(1-\alpha_j X)^k a_n (X-\alpha_j)^{m-k} \prod_{k=1}^{j-m-1} (X-\alpha_k)}{\prod_{k=1}^{j} (1-\alpha_k X)}$$

Alors

$$P_j^{(m)}(g_j) = \frac{(1-\alpha_j X)^m a_n \prod_{k=1}^{j-m-1} (X-\alpha_k)}{\prod_{k=1}^{j} (1-\alpha_k X)}$$

Pour $i \geq j+1$, le produit dans le numérateur de g_i admet au moins $(m+1)$ termes égaux à $(X-\alpha_j)$

Donc :

$$P_j^{(m)}(g_i)(\alpha_j) = 0$$

On a

$$\sum_{k=j}^{n} \gamma_k P_j^{(m)}(g_k) = 0$$

On a alors :

$$\sum_{k=j}^{n} \gamma_k P_j^{(m)}(g_k)(\alpha_j) = \gamma_j P_j^{(m)}(g_j)(\alpha_j) = 0 \Rightarrow \gamma_j = 0$$

Car $P_j^{(m)}(g_j)(\alpha_j) \neq 0$

Comme les $(\alpha_k)_{1 \leq k \leq n}$ ne sont pas stables, on conclut que :

$$\gamma_j = 0$$

D'où le résultat et on déduit que $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre.

Alors on a cette équivalence :

$$\boxed{(f_1, \ldots, f_n) \text{ est libre} \Longleftrightarrow p \text{ n'admet aucune racine stable}}$$

(le sens direct est démontré par contraposée à travers question **6** et l'autre sens à travers le reste de partie B)

C. Expression de la matrice $J(p)$

10)

On a :

$$(S^T)^i = \begin{pmatrix} (0) & & & & & & \\ 1 & \ddots & & & & & \\ & & (0) & & & & \\ & & 1 & (0) & & & \\ & & & 1 & \ddots & & \\ & & & & \ddots & (0) & \\ & & & & & 1 & (0) \end{pmatrix}$$

Les 1 sont sur la $(i+1)$-ième diagonale en dessous de la diagonale principale.

$$\Rightarrow \quad (S^T)^i U = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{i+1} \qquad \forall\, 0 \leq i \leq n-1$$

Donc $(S^T)^i U = e_{i+1} \quad \forall\, 0 \leq i \leq n-1$, avec e_j le j-ème vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Alors $\Big((S^T)^i U\Big)_{0 \leq i \leq n-1}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

11)

On remarque que :

$$(X - \alpha_j X) f_j = (1 - \alpha_{j+1} X) f_{j+1}$$

Alors :

$$B_j f_j(s) = C_{j+1} f_{j+1}(s)$$

En transposant, on aura

$$f_j(s)^T B_j^T = f_{j+1}(s)^T C_{j+1}^T$$

En multipliant les deux dernières égalités, on a :

$$f_j(s)^T B_j^T B_j f_j(s) = f_{j+1}(s)^T C_{j+1}^T C_{j+1} f_{j+1}(s)$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} f_j(s)^T (C_j^T C_j - B_j^T B_j) f_j(s) &= \sum_{j=1}^{n-1} \Big[f_j(s)^T C_j^T C_j f_j(s) - f_j(s)^T B_j^T B_j f_j(s) \Big] \\
&\quad + f_n(s)^T (C_n^T C_n - B_n^T B_n) f_n(s) \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} \Big[f_j(s)^T C_j^T C_j f_j(s) - f_{j+1}(s)^T C_{j+1}^T C_{j+1} f_{j+1}(s) \Big] \\
&\quad + f_n(s)^T (C_n^T C_n - B_n^T B_n) f_n(s) \\
&= f_1(s)^T C_1^T C_1 f_1(s) - f_n(s)^T B_n^T B_n f_n(s) \quad \text{(Téléscopage)} \\
&= p_0(s)^T p_0(s) - p(s)^T p(s) \\
&= \mathcal{J}(p)
\end{aligned}$$

12)

On a, pour $1 \leq i, j \leq n$:

$$(S^T S)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (S)_{ki} (S)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{k+1,i} \delta_{k+1,j} = \begin{cases} \delta_{ij} & \text{si } i \in [\![2, n]\!] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc :

$$S^TS = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} = I_n - UU^T$$

Soit $j \in [\![1, n]\!]$:

$$\begin{aligned} C_j^T C_j - B_j^T B_j &= (I_n - \alpha_j S^T)(I_n - \alpha_j S) - (S^T - \alpha_j I_n)(S - \alpha_j I_n) \\ &= I_n - \alpha_j S^T - \alpha_j S + \alpha_j^2 S^T S - S^T S + \alpha_j S^T + \alpha_j S - \alpha_j^2 I_n \\ &= (1 - \alpha_j^2) I_n - (1 - \alpha_j^2) S^T S \\ &= (1 - \alpha_j^2) I_n - (1 - \alpha_j^2)(I_n - UU^T) \\ &= (1 - \alpha_j^2) UU^T \end{aligned}$$

13)

On a d'après **12** :

$$\mathcal{J}(p) = \sum_{k=1}^{n} \Big[f_k(S)^T UU^T f_k(S) \Big] (1 - \alpha_k^2) I_n$$

Donc, pour $1 \leq i, j \leq n$:

$$\begin{aligned} (\mathcal{J}(p))_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} \Big[(f_k(S)^T U)(U^T f_k(S)) \Big]_{i\ell} (1 - \alpha_k^2) \delta_{\ell j} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \Big[(f_k(S)U)(U^T f_k(S)) \Big]_{ij} (1 - \alpha_k^2) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \Big[f_k(S^T)U \Big]_i \Big[U^T f_k(S^T)^T \Big]_j (1 - \alpha_k^2) \\ &= \sum_{k=1}^{n} V_{ik} (1 - \alpha_k^2) V_{kj}^T \end{aligned}$$

Or :

$$(VDV^T)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} V_{ik} D_{k\ell} V_{\ell j}^T = \sum_{k=1}^{n} V_{ik} (1 - \alpha_k^2) V_{kj}^T = (\mathcal{J}(p))_{ij}$$

Donc :

$$\mathcal{J}(p) = VDV^T$$

14)

Si p possède une racine stable, alors, d'après **6**, $(f_1, \ldots, f_n)$ est liée.

Donc $\Big(f_1(S^T)U, \ldots, f_n(S^T)U \Big)$ est liée. *(Il existe une combinaison linéaire des f_i avec des coefficients non tous nuls, on applique cette combinaison à S^T, puis on multiplie le résultat par U)*

Par conséquent, V n'est pas inversible, donc $\det(V) = 0$.

Alors :

$$\det(\mathcal{J}(p)) = \det(D) \cdot \det(V)^2 = 0$$

Donc $\mathcal{J}(p)$ n'est pas inversible.

D. Cas où $J(p)$ est inversible : critère de Schur-Cohn

15)

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$A = P^T B P$$

Soit F un s.e.v. de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $(\mathcal{C}_A)$. Montrons qu'il existe un s.e.v. de même dimension que F qui vérifie $(\mathcal{C}_B)$.

On a :

$$X^T B X = X^T P^{-1} A P^{-1} X = (P^{-1}X)^T A (P^{-1}X)$$

Notons $F' = \{PX \mid X \in F\}$.
Alors F' est un s.e.v. isomorphe à F (car $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$), donc :

$$\dim F' = \dim F$$

Soit $Y \in F'$, alors $Y = PX$ avec $X \in F$.

$$Y^T B Y = (P^{-1}PX)^T A (P^{-1}PX) = X^T A X > 0 \quad \Rightarrow \quad F' \text{ vérifie } (\mathcal{C}_B)$$

Donc :

$$\{\dim F \mid F \text{ s.e.v. vérifiant } (\mathcal{C}_A)\} \subseteq \{\dim F \mid F \text{ s.e.v. vérifiant } (\mathcal{C}_B)\}$$

Par passage au max, on aura $d(B) \geq d(A)$ et en considérant $B = (P^{-1})^T A P^{-1}$, avec $P^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on obtient aussi $d(A) \geq d(B)$

$$\Rightarrow \quad d(A) = d(B)$$

16)

Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, $\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que :

$$M = P^T D P \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Sp}(M) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$$

Notons $\{i_k \mid 1 \leq k \leq \pi(M)\}$ les indices des valeurs propres strictement positives (avec leurs multiplicités).
Notons e_j le j-ième vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
Alors on pose :

$$F_M = \left\{P^{-1}X \mid X \in \mathrm{Vect}(e_{i_k})\right\}_{1 \leq k \leq \pi(M)} = P^{-1}\left(\mathrm{Vect}(e_{i_k})\right)$$

Soit $Y \in F_M \setminus \{0\}$, donc il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_{\pi(M)} \in \mathbb{R}$ tel que :

$$Y = P^{-1} \sum_{k=1}^{\pi(M)} \alpha_k e_{i_k}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
Y^T M Y &= (PY)^T D (PY) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{\pi(M)} \alpha_k e_{i_k}^T\right) D \left(\sum_{j=1}^{\pi(M)} \alpha_j e_{i_j}\right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{\pi(M)} \alpha_k e_{i_k}^T\right) \left(\sum_{j=1}^{\pi(M)} \alpha_j \lambda_j e_{i_j}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\pi(M)} \sum_{j=1}^{\pi(M)} \alpha_k \alpha_j \lambda_j \langle e_{i_k}, e_{i_j} \rangle
\end{aligned}$$

Alors :

$$Y^T M Y = \sum_{j=1}^{\pi(M)} \alpha_j^2 \lambda_j > 0 \quad (Y \neq 0)$$

Donc F_M est de dimension $\pi(M)$ et vérifie $(\mathcal{C}_M)$.
D'où le résultat :

$$d(M) \geq \pi(M)$$

17)

D'après la formule de Grassmann, on a :

$$\dim(F_M^\perp \cap G) = \dim(F_M^\perp) + \dim(G) - \dim(F_M^\perp + G)$$

Or :

$$\begin{aligned}
\dim(F_M^\perp) + \dim(G) - \dim(F_M^\perp + G) &\geq (n - \pi(M)) + 1 + \pi(M) - \dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})) \\
&\geq (n - \pi(M)) + 1 + \pi(M) - n \\
&\geq 1
\end{aligned}$$

Alors :

$$\dim(F_M^\perp \cap G) \geq 1$$

Il existe donc $X \in F_M^\perp \cap G \setminus \{0\}$
On a $X \in F_M^\perp$, donc il est inclus dans l'espace associé aux valeurs propres nulles ou négatives de M donc :

$$X^T M X \leq 0$$

Mais $X \in G$, qui vérifie $(\mathcal{C}_M)$, donc :

$$X^T M X > 0$$

Contradiction.

Donc :

$$d(M) = \pi(M)$$

18)

Si $\mathcal{J}(p)$ est inversible, d'après le contraposée de 14, p ne possède aucune racine stable.

D'après **13** :

$$\mathcal{J}(p) = VDV^T \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

Donc, d'après **17** :

$$\pi(\mathcal{J}(p)) = d(\mathcal{J}(p))$$

Or, d'après **9**, comme p ne possède aucune racine stable, la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre, et donc $(f_1(S^T)U, \ldots, f_n(S^T)U)$ est libre. Donc V est inversible et $\mathcal{J}(p) = VDV^T$, alors d'après **15** :

$$d(\mathcal{J}(p)) = d(D)$$

Comme D est diagonale, $d(D)$ correspond à la dimension de l'espace associé aux valeurs propres strictement négatives, donc autrement dit à $\alpha_i^2 < 1 \iff \alpha_i \in]-1, 1[$. Donc $d(D) = \sigma(p)$

Ainsi, on déduit le critère de Schur–Cohn :

$$\boxed{\sigma(p) = \pi(\mathcal{J}(p))}$$

E. Condition nécéssaire et suffisante d'inversibilité

19)

Si p n'admet pas de racine stable, alors D est inversible (tous les coefficients diagonaux sont non nuls), or $\mathcal{J}(p)$ n'est pas inversible.

Et comme $\mathcal{J}(p) = VDV^T$ (d'après **13**), on a :

$$\det(\mathcal{J}(p)) = \det(D) \cdot \det(V)^2 = 0 \quad \text{avec} \quad \det(D) \neq 0 \Rightarrow \det(V) = 0$$

Donc V n'est pas inversible.
Alors la famille $(f_1(S^T)U, \ldots, f_n(S^T)U)$ est liée, d'où l'existence de $q \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \setminus \{0\}$ tel que :

$$q(S^T)U = 0_{n,1}$$

20)

On sait que :

$$(S^T)^n = 0 \quad \text{et} \quad (S^T)^{n-1}U = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

D'après **19**, il existe $\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1} \in \mathbb{R}$, non tous nuls, tels que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k (S^T)^k U = 0$$

En multipliant par $(S^T)^{n-1}$, on obtient :

$$\gamma_0 (S^T)^{n-1} U = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma_0 = 0$$

Supposons que $\gamma_0 = \cdots = \gamma_j = 0$. Montrons que $\gamma_{j+1} = 0$

$$\sum_{k=j+1}^{n-1} \gamma_k (S^T)^k U = 0$$

En multipliant cette égalité par $(S^T)^{n-j-2}$, on obtient :

$$\gamma_{j+1}(S^T)^{n-1}U = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma_{j+1} = 0$$

On montre alors par récurrence que :

$$\gamma_0 = \cdots = \gamma_{n-1} = 0$$

Ce qui est absurde. On a donc montré par l'absurde que si p n'admet pas de racine stable, alors $\mathcal{J}(p)$ est inversible.

Le sens contraire est garanti par **18**.

On a alors cette équivalence :

$$\boxed{\mathcal{J}(p) \text{ inversible} \quad \Leftrightarrow \quad p \text{ n'admet aucune racine stable}}$$

F. Un cas particulier

21)

On a d'après **5** :

$$h \wedge h_0 = 1$$

Alors d'après **2**, h ne possède pas de racine stable.

Donc d'après **20**,

$$\mathcal{J}(h) \text{ est inversible}$$

22)

On remarque que :

$$\frac{1}{r-1}\left[p(rX) - p(X)\right] = X\frac{p(rX) - p(X)}{(r-1)X} \xrightarrow{r \to 1^-} Xp'(X)$$

Ainsi :

$$\frac{1}{r-1}\left[p(rX) - p(X)\right] \xrightarrow{r \to 1^-} h$$

On remarque que l'application $p \mapsto \mathcal{J}(p)$ est continue (car $\mathcal{J}(p)$ est polynomiale en les coefficients de p), donc :

$$\mathcal{J}\left(\frac{1}{r-1}\left[p(rX) - p(X)\right]\right) \xrightarrow{r \to 1^-} \mathcal{J}(h) \quad \text{avec} \quad \mathcal{J}(h) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \quad (\text{d'après } \mathbf{21})$$

On a (**Remarque :** $S^TS = UU^T$ est diagonale, donc S et S^T commutent, et ainsi tout polynôme en S et S^T commute) :

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}\left(\frac{1}{r-1}\left[p(rX)-p(X)\right]\right) &= \frac{1}{(r-1)^2}\Big[((p(rX))_0(S)^T - p_0(S)^T)((p(rX))_0(S) - p_0(S)) \\
&\quad -((p(rX))(S)^T - p(S)^T)((p(rX))(S) - p(S))\Big] \\
&= \frac{1}{(r-1)^2}\Big[(p(rX))_0(S)^T(p(rX))_0(S) - (p(rX))_0(S)^T p_0(S) \\
&\quad -p_0(S)^T(p(rX))_0(S) + p_0(S)^T p_0(S) \\
&\quad -(p(rX))(S)^T(p(rX))(S) + (p(rX))(S)^T p(S) \\
&\quad +p(S)^T(p(rX))(S) - p(S)^T p(S)\Big] \\
&= \frac{1}{(r-1)^2}\Big[\mathcal{J}(p(rX)) - \frac{1}{\lambda}(p(rX))_0(S)^T p(S) - \frac{1}{\lambda}(p(rX))_0(S)p(S)^T \\
&\quad +(p(rX))(S)^T p(S) + (p(rX))(S)p(S)^T\Big] \quad (\mathcal{J}(p) = 0 \text{ d'après } \mathbf{3}).
\end{aligned}$$

Comme $p \mapsto p_0$ est continue car elle est linéaire en dimension finie (on travaille dans $\mathbb{R}_n[X]$), on remarque que :

$$\mathcal{J}\left(\frac{1}{r-1}[p(rX)-p(X)]\right) \sim \frac{1}{(r-1)^2}\mathcal{J}(p(rX)) \quad (\text{quand } r \to 1^-)$$

Alors :

$$\frac{1}{(r-1)^2}\mathcal{J}(p(rX)) \xrightarrow{r\to 1^-} \mathcal{J}(h) \quad \text{avec} \quad \mathcal{J}(h) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \quad \text{or} \quad \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \det{}^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$$

Alors $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc il existe $\eta_0 > 0$ tel que

$$\forall r \in]1-\eta_0, 1[\quad \frac{1}{(r-1)^2}\mathcal{J}(p(rX)) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

donc

$$\mathcal{J}(p(rX)) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

D'après **20**, on déduit que

$$\forall r \in]1-\eta_0, 1[\quad p(rX) \text{ n'admet aucune racine stable.}$$

Soit $0 < r < 1$.

On a que $(\frac{\alpha_1}{r}, \dots, \frac{\alpha_n}{r})$ sont les racines de $p(rX)$; il est bien scindé.

Si i est tel que $\alpha_i > 1$, or $r < 1$ donc $\frac{1}{r} > 1$, donc $\frac{\alpha_i}{r} > 1$.
Si i est tel que $\alpha_i < -1$, alors $-\alpha_i > 1$ donc $-\frac{\alpha_i}{r} > 1$ donc $\frac{\alpha_i}{r} < -1$.

Prenons
$$r > \max\{|\alpha_i|; |\alpha_i| < 1\}.$$

On a donc
$$|\alpha_i| < r \text{ alors } |\frac{\alpha_i}{r}| < 1$$

Donc pour $r > \max\{|\alpha_i|; |\alpha_i| < 1\}$, on a

$$\sigma(p(rX)) = \sigma(p).$$

En prenant
$$\eta = \min\{\eta_0, 1 - \max\{|\alpha_i|; |\alpha_i| < 1\}\},$$
on obtient le résultat demandé.

23)

D'après **22**, il existe η tel que $\forall r \in]1-\eta, 1[$,
comme $\mathcal{J}(p) \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$, donc diagonalisable, en le multipliant par -1,
cela inverse les valeurs propres positives et négatives.

$$\begin{aligned}
\pi\left(\frac{n}{2(r-1)}\mathcal{J}(p(rX))\right) &= n - \pi\left(\frac{n}{2(1-r)}\mathcal{J}(p(rX))\right) \\
&= n - \pi\left(\mathcal{J}\left(\sqrt{\frac{n}{2(1-r)}}p(rX)\right)\right) \qquad (1-r>0) \\
&= n - \sigma\left(\sqrt{\frac{n}{2(1-r)}}p(rX)\right) \quad \text{(d'après } \mathbf{22} \text{ et critère de Schur-Cohn)} \\
&= n - \sigma(p(rX)) \\
&= n - \sigma(p) \quad \text{(d'après } \mathbf{22}\text{)}
\end{aligned}$$

$$\lim_{r\to 1^-} \pi\left(\frac{n}{2(r-1)}F(r)\right) = \lim_{r\to 1^-} \pi\left(\frac{n}{2(r-1)}\mathcal{J}(p(rX))\right) = n - \sigma(p) \quad \text{D'où le résultat}$$

24)

On a $\mathrm{F} : \mathrm{R}_+^* \to \mathrm{S}_n(\mathbb{R}), \quad r \mapsto \mathcal{J}(p(rX))$ (polynomiale en r donc dérivable)
Elle est dérivable et on a :

$$\begin{aligned}
F(r) &= (p(rX))_0(S)^T(p(rX))_0(S) - (p(rX))(S)^T(p(rX))(S) \\
&= r^{2n}p_0\left(\frac{S^T}{r}\right)p_0\left(\frac{S}{r}\right) - p(rS^T)p(rS) \\
&= r^{2n}p\left(\frac{S^T}{r}\right)p\left(\frac{S}{r}\right) - p(rS^T)p(rS)
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
F'(r) &= 2nr^{2n-1}p\left(\frac{S^T}{r}\right)p\left(\frac{S}{r}\right) \\
&\quad + r^{2n}\left[-\frac{S^T}{r^2}p'\left(\frac{S^T}{r}\right)p\left(\frac{S}{r}\right) - p\left(\frac{S^T}{r}\right)\frac{S}{r^2}p'\left(\frac{S}{r}\right)\right] \\
&\quad - S^Tp'\left(rS^T\right)p(rS) - Sp(rS^T)p'(rS)
\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
F'(1) &= 2np(S^T)p(S) - S^Tp'(S^T)p(S) - Sp(S^T)p'(S) \\
&\quad - S^Tp'(S^T)p(S) - Sp(S^T)p'(S) \\
&= 2n\,(p(S))^T\,p(S) - 2S^T\,(p'(S))^T\,p(S) - 2\,(p(S))^T\,p'(S)S
\end{aligned}$$

D'où le résultat

25)

On a comme $F(0) = \mathcal{J}(p) = 0$

$$\begin{aligned}
\frac{n}{2}\frac{F(r)}{r-1} &\underset{r\to 1}{=} \frac{n}{2}F'(1) + o(1) \\
&\underset{r\to 1}{=} n^2(p(S))^Tp(S) - nS^Tp'(S)^Tp(S) - np(S)^Tp'(S)S + o(1)
\end{aligned}$$

On a d'après **4** :

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(h) &= h_0(S)^T h_0(S) - h(S)^T h(S) \\
&= (np(S)^T - S^T p'(S)^T)(np(S) - Sp'(S)) - S^T p'(S^T) S p'(S) \\
&= n^2 p(S)^T p(S) - nSp(S)^T p'(S) - nS^T p'(S^T) p(S) \\
&\quad + S^T p'(S)^T S p'(S) - S^T p'(S)^T S p'(S) \\
&= n^2 p(S)^T p(S) - nSp(S)^T p'(S) - nS^T p'(S)^T p(S)
\end{aligned}$$

Alors

$$\frac{n}{2(r-1)} F(r) \underset{r \to 1}{=} \mathcal{J}(h) + o(1)$$

26)

On admet que l'application définie sur $S_n(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ qui à une matrice symétrique associe le n-uplet de ses valeurs propres réelles comptées avec leurs multiplicités, rangées dans l'ordre décroissant, est continue. On note une telle fonction φ

On a φ est continue alors d'après **25** :

$$\lim_{r \to 1} \varphi\left(\frac{n}{2(r-1)} F(r)\right) = \varphi\left(\mathcal{J}(h)\right)$$

On note $\lambda_{1,r}, \ldots, \lambda_{n,r}$ les valeurs propres de $\frac{n}{2(r-1)} F(r)$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de $J(|t|)$.

D'après **21** ; $\mathcal{J}(h)$ est inversible alors $\lambda_i \neq 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et on a

$$\lim_{r \to 1} \lambda_{i,r} = \lambda_i \quad \forall 1 \leq i \leq n$$

On suppose $\pi(\mathcal{J}(h))) = j$ alors $\lambda_i > 0$ pour $1 \leq i \leq j$ et $\lambda_i < 0$ pour $j+1 \leq i \leq n$.

D'après la définition de la limite et on travaille avec une famille finie, il existe un voisinage de 1 commun qu'on le note $\nu(1)$ tel que pour tout $r \in \nu(1)$:

$$\lambda_{i,r} > 0 \quad \forall 1 \leq i \leq j \quad \text{et} \quad \lambda_{i,r} < 0 \quad \forall j+1 \leq i \leq n$$

alors

$$\pi\left(\frac{n}{2(r-1)} F(r)\right) = j = \pi(\mathcal{J}(h))$$

On déduit alors que

$$\lim_{r \to 1} \pi\left(\frac{n}{2(r-1)} F(r)\right) = \pi(\mathcal{J}(h))$$

On a alors d'après **23** :

$$\pi(\mathcal{J}(h)) = n - \sigma(p)$$

Donc

$$\begin{aligned}
\sigma(p) &= n - \pi(\mathcal{J}(h)) \\
&= n - \sigma(h) \quad (\text{d'après } \mathbf{21} \text{ et } \mathbf{18}) \\
&= n - \sigma(Xp') \\
&= n - \left(1 + \sigma(p')\right) \quad (0 \in]-1, 1[) \\
&= n - 1 - \sigma(p')
\end{aligned}$$

D'après **4** : p' n'admet pas de racine stable.

Alors d'après **20**, $\mathcal{J}(p')$ est inversible.

Alors, d'après le critère de Schur-Cohn, $\sigma(p') = \pi(\mathcal{J}(p'))$.
Ainsi,

$$\boxed{\sigma(p) = n - 1 - \pi(\mathcal{J}(p'))}$$

G. Méthode générale

27)

On a $p = fg = (p_1 \wedge p_0)g$, alors $g = \frac{p}{p_1 \wedge p_0}$.

Alors g n'admet aucune racine stable, donc d'après **20**, $\mathcal{J}(g)$ est inversible.

Et donc, d'après le critère de Schur–Cohn :

$$\sigma(g) = \pi(\mathcal{J}(g))$$

28)

On a $f = p \wedge p_0$, les racines de f sont toutes stables, on les note $\gamma_1, \dots, \gamma_m$, $\gamma_1^{-1}, \dots, \gamma_m^{-1}$ de multiplicités $n_1, \dots, n_m$. Alors

$$f = \prod_{i=1}^{m} \left[(x - \gamma_i)(x - \gamma_i^{-1})\right]^{n_i}$$

Si $\gamma_i \notin \{1, -1\}$, alors

$$g_i = (x - \gamma_i)(x - \gamma_i^{-1})$$

Si $\gamma_i \in \{1, -1\}$, alors

$$g_i = (x - \gamma_i) = g_{i+1} = (x - \gamma_i^{-1})$$

On remarque que ces g_i sont de racines stables et de multiplicité 1, et il existe donc $\ell \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$f = \prod_{i=1}^{\ell} g_i$$

D'où le résultat. et donc

$$\boxed{p = fg = g_1 g_2 \cdots g_\ell g}$$

On sait que par définition de σ :

$$\begin{aligned}
\sigma(p) &= \sigma(g_1 \cdots g_\ell g) \\
&= \sum_{i=1}^{\ell} \sigma(g_i) + \sigma(g) \\
&= \sum_{i=1}^{\ell} (\deg g_i - 1 - \pi(\mathcal{J}(g_i'))) + \pi(\mathcal{J}(g)) \quad (\text{d'après } \mathbf{26} \text{ et } \mathbf{27}) \\
&= \sum_{i=1}^{\ell} \deg g_i - \ell - \sum_{i=1}^{\ell} \pi(\mathcal{J}(g_i')) + \pi(\mathcal{J}(g)) \\
&= (n - \deg g) - \ell - \sum_{i=1}^{\ell} \pi(\mathcal{J}(g_i')) + \pi(\mathcal{J}(g)) \quad \left(\text{car } \sum_{i=1}^{\ell} \deg g_i + \deg g = n\right)
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\sigma(p) = n - \deg g - \ell - \sum_{i=1}^{\ell} \pi(\mathcal{J}(g_i')) + \pi(\mathcal{J}(g))}$$

Fin de sujet