Corrigé - sujet Maths 2

Mines-Ponts 2025 - MP/MPI

Jules PIRONY - jules.pirony@orange.fr

21 mai 2025

Note destinée aux lecteur.ice.s : Si vous relevez une quelconque coquille dans ce corrigé, n'hésitez surtout pas à me contacter par mail pour me le faire savoir !

Sommaire

6. Un cas particulier

7. Méthode générale

1. Propriétés du polynôme p_0 et stabilité des racines

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$p_0(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} = x^n \sum_{k=0}^{n} a_k x^{-k}$$

D'où :

$$\boxed{p_0(x) = x^n p\left(\frac{1}{x}\right)}$$

On a donc, en considérant $p_0 \in \mathbb{R}(X)$, on a :

$$p_0(X) = X^n p\left(\frac{1}{X}\right) \in \mathbb{R}(X)$$

Or, par définition :

$$p = a_n \prod_{j=1}^{n} (X - \alpha_j)$$

Donc :

$$p_0 = a_n X^n \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{X} - \alpha_j\right)$$

D'où :

$$\boxed{p_0 = a_n \prod_{j=1}^{n} (1 - \alpha_j X)}$$

Bilan : Via la première égalité, on obtient donc que :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^*, \Big(\alpha \text{ est une racine stable de } p \iff p(\alpha) = 0 \text{ et } p_0(\alpha) = 0\Big)$$

i.e. :

$$\boxed{p \text{ admet une racine stable} \iff p \text{ et } p_0 \text{ possèdent une racine non nulle commune}}$$

2. Comme p est scindé et que 0 n'est pas racine de p_0, on a par la question **1.** :

$$\begin{aligned} p \wedge p_0 \neq 1 &\iff \text{il existe } \alpha \in \mathbb{R}^* \text{ tel que } X - \alpha \text{ divise } p \text{ et } p_0 \\ &\iff \text{il existe } \alpha \in \mathbb{R}^* \text{ tel que } p(\alpha) = 0 \text{ et } p_0(\alpha) = 0 \end{aligned}$$

Or par la question **1.**, on a aussi :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^*, \quad p_0(\alpha) = \alpha^n p\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

D'où :

$$\begin{aligned} p \wedge p_0 \neq 1 &\iff \text{il existe } \alpha \in \mathbb{R}^* \text{ tel que } p(\alpha) = 0 \text{ et } \alpha^n p\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0 \\ &\iff \text{il existe } \alpha \in \mathbb{R}^* \text{ tel que } p(\alpha) = 0 \text{ et } p\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0 \\ &\iff p \text{ admet une racine stable} \end{aligned}$$

Ainsi, par contraposée, on a :

$$\boxed{p \wedge p_0 = 1 \iff p \text{ n'admet pas de racine stable}}$$

3. Puisque toutes les racines de p sont supposées stables, on a :

$$\forall j \in [\![1\,;n]\!], \quad \alpha_j \neq 0 \qquad \text{et} \qquad p(\alpha_j) = p\left(\frac{1}{\alpha_j}\right) = 0$$

Ainsi on a :

$$p_0 = a_n \prod_{j=1}^{n}(1-\alpha_j X) = a_n \prod_{j=1}^{n} \alpha_j \left(\frac{1}{\alpha_j} - X\right) = (-1)^n \prod_{j=1}^{n} \alpha_j \left[a_n \prod_{j=1}^{n}\left(X - \frac{1}{\alpha_j}\right)\right]$$

et

$$\{\alpha_j \ : \ 1 \leq j \leq n\} = \left\{\frac{1}{\alpha_j} \ : \ 1 \leq j \leq n\right\}$$

D'où :

$$p_0 = (-1)^n \prod_{j=1}^{n} \alpha_j \times p \qquad \text{et} \qquad \prod_{j=1}^{n} \alpha_j = 1$$

Ainsi :

$$p_0 = (-1)^n p$$

Donc on a bien :

$$\boxed{\exists \lambda \in \{-1, 1\}, \quad p = \lambda p_0}$$

4. Tout d'abord remarquons que par la question **3.**, puisque $\lambda = \pm 1$, on a :

$$p = \lambda p_0 \qquad \text{et} \qquad p_0 = \lambda p \tag{1}$$

On a :

$$\begin{aligned} np - \lambda[p']_0 &= \sum_{k=0}^{n} n a_k X^k - \lambda \left[\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1}X^k\right]_0 \\ &= \sum_{k=0}^{n} n a_k X^k - \lambda \sum_{k=0}^{n-1}\big(n-1-k+1\big)a_{n-1-k+1}X^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} n a_k X^k - \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\lambda a_{n-k}X^k \end{aligned}$$

Or, par l'équation (1) , on a :

$$\forall k \in [\![0\,;n-1]\!], \ \lambda a_{n-k} = a_k$$

D'où :

$$\begin{aligned} np - \lambda[p']_0 &= \sum_{k=0}^{n} n a_k X^k - \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)a_k X^k \\ &= n a_n X^n + \sum_{k=0}^{n-1}\big(n-(n-k)\big)a_k X^k \\ &= n a_n X^n + \sum_{k=0}^{n-1} k a_k X^k \\ &= \sum_{k=1}^{n} k a_k X^k = Xp' \end{aligned}$$

D'où finalement :

$$\boxed{h = np - \lambda[p']_0}$$

D'autre part, on a :

$$h_0 = [Xp']_0 = \left[\sum_{k=0}^{n} k a_k X^k\right]_0 = \sum_{k=0}^{n}(n-k)a_{n-k}X^k$$

Et par l'équation (1) :

$$\lambda(np - Xp') = n\lambda p - \lambda Xp' = np_0 - \lambda Xp' = \sum_{k=0}^{n} na_{n-k}X^k - \sum_{k=0}^{n} k\lambda a_k X^k$$

Or, par l'équation (1), on a aussi :

$$\forall k \in [\![0\,;n]\!],\ \lambda a_k = a_{n-k}$$

D'où :

$$\lambda(np - Xp') = \sum_{k=0}^{n} na_{n-k}X^k - \sum_{k=0}^{n} ka_{n-k}X^k = \sum_{k=0}^{n}(n-k)a_{n-k}X^k$$

D'où finalement :

$$\boxed{h_0 = \lambda(np - Xp')}$$

5. Si $n = 1$, alors p' est constant donc scindé. Si $n \geq 2$, alors, puisque que pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, $p(\alpha_k) = 0$, pour tout $k \in [\![1\,;n-1]\!]$, on a par le théorème de Rolle :

$$\exists \beta_k \in \,]\alpha_k\,;\alpha_{k+1}[\,: \quad p'(\beta_k) = 0$$

Et en particulier, on a :

$$\beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_{n-1}$$

Donc p' possède $n - 1 = \deg p'$ racines réelles simples. Ainsi $\boxed{p' \text{ est scindé.}}$

Ensuite, par la question **4.**, on a :

$$h_0 = \lambda np - \lambda h$$

D'où :

$$h \wedge h_0 = h \wedge p = Xp' \wedge p$$

Or par ce qui précède, p et p' sont scindés et n'ont pas de racines communes. De plus, comme toutes les racines de p sont supposées stables, en particulier 0 n'est pas racine de p. D'où :

$$Xp' \wedge p = 1$$

i.e.

$$\boxed{h \wedge h_0 = 1}$$

Enfin, supposons par l'absurde que p' admet une racine stable, i.e. il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que :

$$p'(\alpha) = p'\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$$

D'où :

$$h(\alpha) = \alpha p'(\alpha) = 0$$

Et par la question **1.** :

$$[p']_0(\alpha) = \alpha^{n-1}p'\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$$

Ainsi, comme on a $h = np - \lambda[p']_0$ par la question **4.**, il vient que :

$$p(\alpha) = \frac{1}{n}\big(h(\alpha) - \lambda[p']_0(\alpha)\big) = 0$$

Et donc, comme on a $h_0 = \lambda(np - Xp')$ par la question **4.**, il vient que :

$$h_0(\alpha) = \lambda\big(np(\alpha) - Xp'(\alpha)\big) = 0$$

Ainsi on a obtenu que :

$$h(\alpha) = h_0(\alpha) = 0$$

Ce qui contredit $h \wedge h_0 = 1$. Donc $\boxed{p' \text{ n'admet pas de racine stable.}}$

2. Liberté d'une famille de polynômes

6. Remarquons que l'hypothèse impose que $n \geq 2$. Soient $1 \leq i < k \leq n$ tel que $\alpha_i\alpha_k = 1$. Alors pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$, on a :

- si $i \leq j-1$, alors :

$$\prod_{l=1}^{j-1}(\alpha_i - \alpha_l) = 0 \qquad \text{donc} \qquad f_j(\alpha_i) = 0$$

- si $i \geq j$, alors $k \geq j+1$, et puisque $\alpha_k\alpha_i = 1$, il en découle que :

$$\prod_{l=j+1}^{n}(1 - \alpha_l\alpha_i) = 0 \qquad \text{donc} \qquad f_j(\alpha_i) = 0$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall j \in [\![1\,;n]\!], \quad f_j(\alpha_i) = 0}$$

Maintenant, supposons par l'absurde que $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre. Puisque l'on a :

$$\forall j \in [\![1\,;n]\!],\ \deg(f_j) = n-1 \qquad \text{et} \qquad \dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = n$$

$(f_1, \ldots, f_n)$ est donc une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Mais alors, pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $X - \alpha \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ (car $n \geq 2$). Donc il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$X - \alpha = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j$$

Or, par le résulat précédent, on a :

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j(\alpha_i) = 0$$

Donc $\alpha_i - \alpha = 0$, ce qui est absurde. Ainsi $\boxed{(f_1, \ldots, f_n) \text{ est liée.}}$

7. Soit $j \in [\![1\,;n]\!]$ et soit $f \in E$. Alors il existe $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ tels que :

$$f = \frac{P}{Q} \qquad \text{et} \qquad Q = \prod_{k \in I}(1 - \alpha_k X)$$

où $I \subseteq [\![1\,;n]\!]$ (si $I = \varnothing$ alors $Q = 1$).

Comme p n'admet pas de racine stable, en particulier α_j n'est pas stable, donc il n'existe pas $k \in [\![1\,;n]\!]$ tel que $\alpha_k = \frac{1}{\alpha_j}$; i.e. pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, $\alpha_k\alpha_j \neq 1$. D'où $Q(\alpha_j) \neq 0$ et ainsi, on a :

$$P_j(f) = \frac{(1-\alpha_j X)\frac{P}{Q} - \left(1 - \alpha_j^2\right)\frac{P(\alpha_j)}{Q(\alpha_j)}}{X - \alpha_j} = \frac{(1-\alpha_j X)Q(\alpha_j)P - \left(1-\alpha_j^2\right)P(\alpha_j)Q}{(X-\alpha_j)Q(\alpha_j)Q}$$

Or α_j est racine du polynôme $(1-\alpha_j X)Q(\alpha_j)P - \left(1-\alpha_j^2\right)P(\alpha_j)Q$, donc il existe $\widetilde{P} \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$(1-\alpha_j X)Q(\alpha_j)P - \left(1-\alpha_j^2\right)P(\alpha_j)Q = (X - \alpha_j)\widetilde{P}$$

Posons $\widehat{P} := \frac{1}{Q(\alpha_j)}\widetilde{P}$. On a donc :

$$P_j(f) = \frac{\widehat{P}}{Q} \in E$$

D'autre part P_j est trivialement linéaire et on a $P_j(0_E) = 0_E$. Donc $\boxed{P_j \in L(E).}$

Soit $f \in \operatorname{Ker} P_j$. Alors on a :

$$(1-\alpha_j X)f - \left(1-\alpha_j^2\right)f(\alpha_j) = 0$$

D'où :

$$f = \frac{(1-\alpha_j^2) f(\alpha_j)}{(1-\alpha_j X)} \in \operatorname{Vect}\left(\frac{1}{(1-\alpha_j X)}\right)$$

Donc :

$$\operatorname{Ker} P_j \subseteq \operatorname{Vect}\left(\frac{1}{(1-\alpha_j X)}\right)$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$P_j\left(\frac{\lambda}{(1-\alpha_j X)}\right) = \frac{\lambda - \lambda \frac{1-\alpha_j^2}{1-\alpha_j^2}}{X-\alpha_j} = 0$$

Donc :

$$\operatorname{Vect}\left(\frac{1}{(1-\alpha_j X)}\right) \subseteq \operatorname{Ker} P_j$$

Ainsi :

$$\boxed{\operatorname{Ker} P_j = \operatorname{Vect}\left(\frac{1}{(1-\alpha_j X)}\right)}$$

8. Soit $j \in [\![1\,;n]\!]$ et soit $g \in E$. On a :

$$P_j\left(\frac{(X-\alpha_j)g}{1-\alpha_j X}\right) = \frac{(X-\alpha_j)g - (\alpha_j - \alpha_j)g}{X-\alpha_j} = \frac{(X-\alpha_j)g}{X-\alpha_j} = g$$

9. Si $n = 1$, le résultat est trivial. Supposons $n \geq 2$. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j = 0$$

D'où :

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j g_j = 0 \tag{2}$$

Or, par construction, on a :

$$\forall j \in [\![1\,;n]\!], \quad g_j = \frac{a_n \displaystyle\prod_{k=1}^{j-1}(X-\alpha_k)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{j}(1-\alpha_k X)}$$

D'où :

$$g_1(\alpha_1) \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \forall j \geq 2, \quad g_j(\alpha_1) = 0$$

Donc, par l'équation (2), on a :

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j g_j(\alpha_1) = \lambda_1 \underbrace{g_1(\alpha_1)}_{\neq 0}$$

Donc $\lambda_1 = 0$.

Montrons que pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $\lambda_i = 0$. Si $n = 1$, le résultat est déjà établi. Si $n \geq 2$, supposons que pour $m \in [\![2\,;n]\!]$, on ait :

$$\forall j \in [\![1\,;m-1]\!], \quad \lambda_j = 0$$

et montrons que $\lambda_m = 0$.

Par hypothèse, l'équation (2) devient :

$$\sum_{j=m}^{n} \lambda_j g_j = 0 \tag{3}$$

- Si $\alpha_m \notin \{\alpha_k \ : \ 1 \leq k \leq m-1\}$, alors on a :

$$g_m(\alpha_m) \neq 0 \qquad \text{et (si } m \neq n) \qquad \forall j \geq m+1, \quad g_j(\alpha_m) = 0$$

  Et donc l'équation (3) donne $\lambda_m = 0$.

- Si $\alpha_m \in \{\alpha_j \ : \ 1 \leq k \leq m-1\}$, notons $\mu \in [\![1\,;m-1]\!]$ la multiplicité de α_m dans cet ensemble. On a alors :

$$\prod_{k=1}^{m-1}(X-\alpha_k) = (X-\alpha_m)^\mu \prod_{\substack{1\leq k\leq m-1\\ \alpha_k\neq\alpha_m}}(X-\alpha_k)$$

Et (si $m \neq n$), pour tout $j \geq m+1$:

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{j-1}(X-\alpha_k) &= \prod_{k=1}^{m-1}(X-\alpha_k)\times(X-\alpha_m)\prod_{k=m+1}^{j-1}(X-\alpha_k)\\ &= (X-\alpha_m)^{\mu+1}\prod_{\substack{1\leq k\leq m-1\\ \alpha_k\neq\alpha_m}}(X-\alpha_k)\prod_{k=m+1}^{j-1}(X-\alpha_k)\end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$g_m = \frac{a_n(X-\alpha_l)^\mu}{\displaystyle\prod_{k=1}^{j}(1-\alpha_k X)}\prod_{\substack{1\leq k\leq m-1\\ \alpha_k\neq\alpha_m}}(X-\alpha_k)$$

Et (si $m \neq n$) :

$$\forall j \geq m+1, \quad g_j = \frac{a_n(X-\alpha_m)^{\mu+1}\displaystyle\prod_{k=m+1}^{j-1}(X-\alpha_k)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{j}(1-\alpha_k X)}\prod_{\substack{1\leq k\leq m-1\\ \alpha_k\neq\alpha_m}}(X-\alpha_k)$$

Donc, d'après la question **8.**, on a :

$$P_m^\mu(g_m) = \frac{a_n(1-\alpha_m X)^\mu}{\displaystyle\prod_{k=1}^{j}(1-\alpha_k X)}\prod_{\substack{1\leq k\leq m-1\\ \alpha_k\neq\alpha_m}}(X-\alpha_k)$$

où $P_m^\mu = \underbrace{P_m\circ\cdots\circ P_m}_{\mu}$. Et aussi (si $m \neq n$) :

$$\forall j \geq m+1, \quad P_m^\mu(g_j) = \frac{a_n(1-\alpha_m X)^\mu(X-\alpha_m)\displaystyle\prod_{k=m+1}^{j-1}(X-\alpha_k)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{j}(1-\alpha_k X)}\prod_{\substack{1\leq k\leq m-1\\ \alpha_k\neq\alpha_m}}(X-\alpha_k)$$

Ainsi :

$$P_m^\mu(g_m)(\alpha_m) \neq 0 \qquad \text{et (si } m\neq n) \qquad \forall j \geq m+1, \quad P_m^\mu(g_j)(\alpha_m) = 0$$

Or par linéarité de P_m, donc de P_m^μ et par l'équation (3), on a :

$$\sum_{j=m}^{n}\lambda_j P_m^\mu(g_j) = 0$$

D'où :

$$0 = \sum_{j=m}^{n}\lambda_j P_m^\mu(g_j)(\alpha_m) = \lambda_m \underbrace{P_m^\mu(g_m)(\alpha_m)}_{\neq 0}$$

Donc $\lambda_m = 0$.
Ainsi, par récurrence forte (finie), on obtient que :

$$\forall j \in [\![1\,;n]\!], \quad \lambda_j = 0$$

Donc $\boxed{(f_1,\ldots,f_n) \text{ est libre.}}$

Bilan : On a donc montré que si p n'admet pas de racine stable alors $(f_1,\dots,f_n)$ est libre. Et à la question **6.**, par contraposée, on a montré que si $(f_1,\dots,f_n)$ est libre alors p n'admet pas de racine stable. On a donc l'équivalence :

$$\boxed{p \text{ n'admet pas de racine stable} \iff (f_1,\dots,f_n) \text{ est libre}}$$

3. Expression de la matrice $J(p)$

10. On montre par récurrence que pour tout $i \in [\![0\,;n-1]\!]$, $(S^T)^i$ est la matrice composée seulement de 1 sur la i-ème sous-diagonale et de 0 ailleurs (la diagonale principale étant la « 0-ème sous-digonale »), i.e. :

$$(S^T)^i = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & & & & & \vdots \\ 1 & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ L_{i+1} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_{n-i} & 0 \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\forall i \in [\![0\,;n-1]\!], \quad (S^T)^i U = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow L_{i+1} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = e_{i+1}$$

où $(e_i)_{1\le i\le n}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Ainsi $\boxed{\left((S^T)^i\right)_{0\le i\le n-1} \text{ est une base de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).}$

11.

- Si $n=1$, on a :

$$f_1(S) = a_1 \quad \text{et} \quad p(S) = a_1(S-\alpha_1) \quad \text{ainsi que} \quad p_0(S) = a_1(1-\alpha_1 S)$$

Et donc, on a bien :

$$\begin{aligned} f_1(S)^T\left(C_1^TC_1 - B_1^TB_1\right)f_1(S) &= \left(C_1f_1(S)\right)^TC_1f_1(S) - \left(B_1f_1(S)\right)^TB_1f_1(S) \\ &= p_0(S)^Tp_0(S) - p(S)^Tp(S) = J(p) \end{aligned}$$

- Si $n \ge 2$, alors remarquons que :

$$\forall j \in [\![1\,;n-1]\!], \quad (X-\alpha_j)f_j = (1-\alpha_{j+1}X)f_{j+1}$$

D'où :

$$\forall j \in [\![1\,;n-1]\!], \quad B_jf_j(S) = C_{j+1}f_{j+1}(S)$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^n f_j(S)^T\left(C_j^TC_j - B_j^TB_j\right)f_j(S) \\ &\quad = f_n(S)^TC_n^TC_nf_n(S) - f_n(S)^TB_n^TB_nf_n(S) + \sum_{j=1}^{n-1} f_j(S)^TC_j^TC_jf_j(S) - f_j(S)^TB_j^TB_jf_j(S) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (C_n f_n(S))^T C_n f_n(S) - (B_n f_n(S))^T B_n f_n(S) + \sum_{j=1}^{n-1} (C_j f_j(S))^T C_j f_j(S) - (B_j f_j(S))^T B_j f_j(S) \\
&= (C_n f_n(S))^T C_n f_n(S) - (B_n f_n(S))^T B_n f_n(S) + \sum_{j=1}^{n-1} (C_j f_j(S))^T C_j f_j(S) - (C_{j+1} f_{j+1}(S))^T C_{j+1} f_{j+1}(S) \\
&= (C_n f_n(S))^T C_n f_n(S) - (B_n f_n(S))^T B_n f_n(S) \ + \ (C_1 f_1(S))^T C_1 f_1(S) - (C_n f_n(S))^T C_n f_n(S) \\
&= (C_1 f_1(S))^T C_1 f_1(S) - (B_n f_n(S))^T B_n f_n(S) \\
&= p_0(S)^T p_0(S) - p(S)^T p(S) \\
&= J(p)
\end{aligned}$$

Dans tous les cas, on a bien :

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} f_j(S)^T \left(C_j^T C_j - B_j^T B_j\right) f_j(S) = J(p)}$$

12. Soit $j \in [\![1\,;n]\!]$. On a :

$$C_j^T C_j = \left(I_n - \alpha_j S^T\right)(I_n - \alpha_j S) = I_n - \alpha_j \left(S^T + S\right) + \alpha_j^2 S^T S$$

Et :

$$B_j^T B_j = \left(S^T - \alpha_j I_n\right)(S - \alpha_j I_n) = S^T S - \alpha_j \left(S^T + S\right) + \alpha_j^2 I_n$$

D'où :

$$C_j^T C_j - B_j^T B_j = \left(I_n - S^T S\right) + \alpha_j^2 \left(S^T S - I_n\right) = \left(1 - \alpha_j^2\right)\left(I_n - S^T S\right)$$

Or on a :

$$S^T S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n - E_{1,1}$$

où $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Et d'autre part, on a :

$$UU^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} = E_{1,1} = I_n - S^T S$$

Finalement, on obtient bien que :

$$\boxed{C_j^T C_j = \left(1 - \alpha_j^2\right) UU^T}$$

13. Par les questions **11.** et **12.**, on a donc :

$$J(p) = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \alpha_k^2\right)\left(f_k(S)^T UU^T f_k(S)\right)$$

Donc, pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\left(J(p)\right)_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \alpha_k^2\right) \left[\left(f_k(S)^T U\right)\left(U^T f_k(S)\right)\right]_{i,j} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \alpha_k^2\right) \left[\left(f_k(S)^T U\right)\right]_i \left[\left(U^T f_k(S)\right)\right]_j \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \alpha_k^2\right) V_{i,k} (V^T)_{k,j} \\
&= \sum_{k=1}^{n} V_{i,k} \left(1 - \alpha_k^2\right) (V^T)_{k,j}
\end{aligned}$$

Or, pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$:

$$\left(VDV^T\right)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{n} V_{i,l}\left(1-\alpha_l^2\right)\sigma_{l,k}\right)\left(V^T\right)_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} V_{i,k}\left(1-\alpha_k^2\right)\left(V^T\right)_{k,j}$$

Ainsi, il vient que :

$$\boxed{J(p) = VDV^T}$$

14. Si p admet une racine stable, alors par la question **6.**, la famille $(f_1,\ldots,f_n)$ est liée. Il en résulte que la famille

$$\left(f_1(S^T)U,\ldots,f_n(S^T)U\right)$$

est une famille liée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Donc $\det V = 0$, d'où :

$$\det J(p) = \prod_{j=1}^{n}\left(1-\alpha_j^2\right)\det V^2 = 0$$

Donc $\boxed{J(p) \text{ n'est pas inversible.}}$

4. Cas où $J(p)$ est inversible : critère de Schur-Cohn

15. Notons $F \leq \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ lorsque F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Soit $F \leq \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $(\mathcal{C}_A)$. On a par hypothèse :

$$A = P^TBP \quad \text{avec} \quad P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

Donc :

$$\forall X \in F \setminus \{0_{n,1}\}, \quad (PX)^T B(PX) = X^TAX > 0$$

Posons $F' := \left\{PX \ : \ X \in F\right\} = PF$. Donc $F' \leq \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifie $(\mathcal{C}_B)$. De plus, comme $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on a $F' \simeq F$, donc $\dim F = \dim F'$. Ainsi, on a :

$$\left\{\dim F \ : \ F \leq \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ vérifiant } (\mathcal{C}_A)\right\} \subseteq \left\{\dim F' \ : \ F' \leq \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ vérifiant } (\mathcal{C}_B)\right\}$$

i.e.

$$\boxed{d(B) \geq d(A)}$$

Toujours par hypothèse, on a :

$$B = \left(P^T\right)^{-1}AP^{-1} = Q^TAQ$$

en posant $Q := P^{-1}$. En raisonnant de manière analogue avec Q, on obtient que $d(B) \leq d(A)$. D'où :

$$\boxed{d(B) = d(A)}$$

16. Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors par le théorème spectral, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$M = P^T \operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)P$$

où $\left\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\right\} = \mathcal{S}p(M)$, les λ_i étant comptées avec leur multiplicité.

Notons $i_1,\ldots,i_{\pi(M)}$ les indices tels que $\lambda_{i_k} > 0$, toujours comptées avec leur multiplicité. Considérons alors le sous-espace vectoriel $F_M \leq \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par :

$$\boxed{F_M := \left\{P^TX \ : \ X \in \operatorname{Vect}\Big(\left(e_{i_k}\right)_{1\leq k\leq \pi(M)}\Big)\right\} = P^T \operatorname{Vect}\Big(\left(e_{i_k}\right)_{1\leq k\leq \pi(M)}\Big)}$$

où $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est toujours la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On a alors $F_M \simeq \operatorname{Vect}\Big((e_{i_k})_{1\leq k\leq \pi(M)}\Big)$ puisque $P\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ donc $P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. D'où $\boxed{\dim F_M = \pi(M).}$

Soit $X\in F_M\setminus\{0_{n,1}\}$. Donc il existe $Y\in\operatorname{Vect}\Big((e_{i_k})_{1\leq k\leq \pi(M)}\Big)\setminus\{0_{n,1}\}$ tel que $X=P^TY$. D'où :

$$X^TMX = Y^TPMP^TY = Y^T\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)Y$$

Or $Y\in\operatorname{Vect}\Big((e_{i_k})_{1\leq k\leq \pi(M)}\Big)\setminus\{0_{n,1}\}$, donc il existe $\big(y_1,\dots,y_{\pi(M)}\big)\in\mathbb{R}^{\pi(M)}\setminus\big\{0_{\mathbb{R}^{\pi(M)}}\big\}$ tel que :

$$Y=\sum_{k=1}^{\pi(M)} y_k e_{i_k}$$

Et donc :

$$\begin{aligned}
Y^T\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)Y &= \left(\sum_{j=1}^{\pi(M)} y_j e_{i_j}^T\right)\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\left(\sum_{k=1}^{\pi(M)} y_k e_{i_k}\right)\\
&= \left(\sum_{j=1}^{\pi(M)} y_j e_{i_j}^T\right)\left(\sum_{k=1}^{\pi(M)} \lambda_{i_k} y_k e_{i_k}\right)\\
&= \sum_{j=1}^{\pi(M)}\sum_{k=1}^{\pi(M)} y_j y_k \lambda_{i_k} e_{i_j}^T e_{i_k}
\end{aligned}$$

Or pour tout $j,k\in[\![1\,;\pi(M)]\!]$, on a :

$$e_{i_j}^T e_{i_k} = \sigma_{i_j,i_k} = \sigma_{j,k}$$

D'où :

$$X^TMX = Y^T\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)Y = \sum_{j=1}^{\pi(M)} y_j^2\lambda_{i_k} > 0$$

Donc $\boxed{F_M \text{ vérifie } (\mathcal{C}_M).}$

17. Par la formule de Grassman, on a :

$$\dim\big(F_M^\perp\cap G\big) = \dim F_M^\perp + \dim G - \dim\big(F_M^\perp + G\big)$$

Or a :

$$\dim F_M^\perp = n-\pi(M) \qquad \text{et} \qquad \dim G \geq \pi(M)+1 \qquad \text{ainsi que} \qquad \dim\big(F_M^\perp+G\big)\leq n$$

D'où :

$$\dim\big(F_M^\perp\cap G\big)\geq n-\pi(M)+\pi(M)+1-n$$

i.e. :

$$\boxed{\dim\big(F_M^\perp\cap G\big)\geq 1}$$

Ainsi il existe $X\in F_M^\perp\cap G$ tel que $X\neq 0_{n,1}$. Or par construction, on a :

$$F_M^\perp = \operatorname{Vect}\Big((e_{j_k})_{1\leq k\leq n-\pi(M)}\Big)$$

où $j_1,\dots,j_{n-\pi(M)}$ sont les indices tels que $\lambda_{j_k}\leq 0$, comptées avec leur multiplicité.

Remarque : On a donc :

$$\mathcal{S}p(M) = \big\{\lambda_{i_1},\dots,\lambda_{i_{\pi(M)}}\big\}\sqcup\big\{\lambda_{j_1},\dots,\lambda_{j_{n-\pi(M)}}\big\}$$

Donc, puisque $X\in F^\perp$, on a :

$$X^TMX = (PX)^T\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)(PX) = \sum_{k=1}^{n-\pi(M)}\big((PX)_{k,1}\big)^2\lambda_{j_k}\leq 0$$

Or $X \in G \setminus \{0_{n,1}\}$, donc par hypothèse sur G, on a :

$$X^T M X > 0$$

C'est absurde. Ainsi il n'existe pas de sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant M de dimension supérieure à $\pi(M)$. Donc :

$$\boxed{d(M) = \pi(M)}$$

18. Par contraposée du résultat de la question **14.**, $\boxed{\text{si } J(p) \text{ n'est pas inversible alors } p \text{ ne possède pas de racine stable.}}$

D'autre part, on a $J(p) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, donc par la question **17.**, on obtient que :

$$\pi\big(J(p)\big) = d\big(J(p)\big)$$

Mais par la question **13.**, $J(p) = VDV^T$. Or, si $J(p)$ est inversible, en particulier, V est nécessairement inversible. D'où, par la question **15.** :

$$d\big(J(p)\big) = d(D)$$

Comme D est diagonale, en particulier $D \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et donc :

$$d(D) = \pi(D)$$

Or on a par définition :

$$\pi(D) = \sum_{\substack{1 \le j \le n \\ 1-\alpha_j^2 > 0}} 1 \ = \sum_{\substack{1 \le j \le n \\ \alpha_j \in]-1;1[}} 1 \ = \sigma(p)$$

Finalement :

$$\boxed{\pi\big(J(p)\big) = \sigma(p)}$$

5. Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité

19. Par la question **13.**, on a $J(p) = VDV^T$, d'où

$$\det J(p) = \det D \times \det V^2$$

j Donc si $J(p)$ n'est pas inversible, alors :

$$\det D = 0 \qquad \text{ou} \qquad \det V = 0$$

Or, si p n'admet pas de racine stable, en particulier 1 n'est pas racine de p, i.e. on a :

$$\forall j \in [\![1\,;n]\!], \quad \alpha_j \neq 1$$

Donc :

$$\det D = \prod_{j=1}^{n} 1 - \alpha_j^2 \neq 0$$

Et donc $\det V = 0$. Ainsi la famille $\big(f_1(S^T)U, \dots, f_n(S^T)U\big)$ est liée, i.e. il existe $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ tel que :

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j f_j(S^T)U = 0$$

Posons :

$$\boxed{q := \sum_{j=1}^{n} \beta_j f_j \in \mathbb{R}_{n-1}[X]}$$

On a donc $\boxed{q(S^T)U = 0_{n,1}}$. Et par la question **9.**, si p n'admet pas de racine stable, alors la $(f_1, \dots, f_n)$ est libre. Donc, par construction, $\boxed{q \neq 0.}$

20. Le sens direct de l'implication est garanti par la question **18.**. Montrons l'autre sens. Supposons que p n'admet pas de racine stable et que $J(p)$ n'est pas inversible. Alors par la question **19.**, il existe $(q_0, \dots, q_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ tel que :

$$\sum_{i=0}^{n-1} q_i \left(S^T\right)^i U = 0_{n,1} \tag{4}$$

Or on a montré à la question **10.** que

$$\left(S^T\right)^{n-1} U \neq 0_{n,1} \qquad \text{et} \qquad \left(S^T\right)^n U = 0_{n,1}$$

Donc par l'équation (4), on a :

$$0_{n,1} = \left(S^T\right)^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} q_i \left(S^T\right)^i U = \sum_{i=0}^{n-1} q_i \underbrace{\left(S^T\right)^{n-1+i}}_{=0 \text{ si } i>0} U = q_0 \underbrace{\left(S^T\right)^{n-1} U}_{\neq 0_{n,1}}$$

Donc $q_0 = 0$.

Montrons que pour tout $i \in [\![0\,;n-1]\!]$, $q_i = 0$. Si $n = 1$, le résultat est déjà établi. Si $n \geq 2$, supposons que pour $k \in [\![1\,;n-1]\!]$, on a :

$$\forall i \in [\![0\,;k-1]\!], \quad q_i = 0$$

L'équation (4) devient alors :

$$\sum_{i=k}^{n-1} q_i \left(S^T\right)^i U = 0_{n,1} \tag{5}$$

D'où :

$$0_{n,1} = \left(S^T\right)^{n-k-1} \sum_{i=k}^{n-1} q_i \left(S^T\right)^i U = \sum_{i=k}^{n-1} q_i \underbrace{\left(S^T\right)^{n-k-1+i}}_{=0 \text{ si } i>k} U = q_k \underbrace{\left(S^T\right)^{n-1} U}_{\neq 0_{n,1}}$$

Et donc $q_k = 0$.

Ainsi, par principe de récurrence forte (finie), on a :

$$\forall i \in [\![0\,;n-1]\!], \quad q_i = 0$$

Ce qui est absurde puisque $(q_0, \dots, q_{n-1}) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$.

Donc si p n'admet pas de racine stable, alors $J(p)$ est inversible. Ainsi, on a bien l'équivalence :

$$\boxed{J(p) \text{ est inversible} \iff p \text{ n'admet pas de racine stable}}$$

Bilan : On a donc montré que :

$$\boxed{J(p) \text{ est inversible} \iff p \text{ n'admet pas de racine stable}}$$

Et dans ce cas, on a :

$$\boxed{\pi\big(J(p)\big) = \sigma(p)}$$

6. Un cas particulier

21. On a :

$$h = Xp'$$

Donc les racines de h sont 0 et les racines de p'.

Or, d'après la question **5.**, p' n'admet pas de racine stable.

Donc h n'admet pas de racine stable, d'où, par la question **20.**, $\boxed{J(h) \text{ est inversible.}}$

22. Pour tout $r > 0$, les racines de $p(rX)$ sont $\frac{\alpha_1}{r}, \dots, \frac{\alpha_n}{r}$. Donc, par hypothèse, elles sont toutes de multiplicité 1. D'où, de fait, $p(rX)$ est scindé.

D'autre part, on a pour tout $r > 0$ et tout $i \in [\![1\,;n]\!]$:

$$\frac{\alpha_i}{r} \in]-1\,;1[\iff \left|\frac{\alpha_i}{r}\right| < 1 \iff |\alpha_i| < r$$

Posons :

$$\rho := \max\Big(\Big\{|\alpha_i| \ : \ 1 \leq i \leq n, \ |\alpha_i| < 1\Big\}\Big)$$

qui est bien défini car $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ est, de fait, fini.
Alors on a $0 \leq \rho < 1$ par construction et si $r \in]\rho\,;1[$, on a pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$:

$$|\alpha_i| < 1 \implies |\alpha_i| < r \implies \left|\frac{\alpha_i}{r}\right| < 1 \qquad \text{et} \qquad |\alpha_i| \geq 1 \implies |\alpha_i| \geq r \implies \left|\frac{\alpha_i}{r}\right| \geq 1$$

i.e.

$$|\alpha_i| < 1 \iff \left|\frac{\alpha_i}{r}\right| < 1$$

Donc on a :

$$\forall r \in]\rho\,;1[, \quad \sigma\big(p(rX)\big) = \sigma(p)$$

Enfin, par défintion, on a pour tout $r > 0$:

$$\begin{aligned} p(rX) \text{ admet une racine stable } &\iff p(rX) \text{ et } p\Big(\frac{r}{X}\Big) \text{ ont une racine commune non nulle} \\ &\iff \exists (j,k) \in [\![1\,;n]\!]^2, \ \frac{\alpha_j}{r} = \frac{r}{\alpha_k} \\ &\iff \exists (j,k) \in [\![1\,;n]\!]^2, \ r^2 = \alpha_j \alpha_k \end{aligned}$$

car les racines de $p(rX)$ sont $\frac{\alpha_1}{r}, \dots, \frac{\alpha_n}{r}$ et comme les $(\alpha_i)_{1\leq i \leq n}$ sont stables, en particulier elles sont non nulles, d'où les racines de $p\big(\frac{r}{X}\big)$ sont $\frac{r}{\alpha_1}, \dots, \frac{r}{\alpha_n}$.
Posons :

$$\delta := \max\Big(\Big\{\sqrt{\alpha_j\alpha_k} \ : \ (j,k) \in [\![1\,;n]\!]^2, \alpha_j\alpha_k \in]0\,;1[\Big\} \cup \{0\}\Big)$$

qui est bien défini car $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ est, de fait, fini.

Remarque : Si $\Big\{\sqrt{\alpha_j\alpha_k} \ : \ (j,k) \in [\![1\,;n]\!]^2, \alpha_j\alpha_k \in]0\,;1[\Big\} = \varnothing$, alors $\delta = 0$.

Alors on a $0 \leq \delta < 1$ par construction et :

$$r \in]\delta\,;1[\quad \implies \quad \forall (j,k) \in [\![1\,;n]\!]^2, \ \alpha_j\alpha_k \in]0\,;1[\ : \ r \neq \sqrt{\alpha_j\alpha_k} \qquad \text{et} \qquad 0 < r^2 < 1$$

D'où :

$$r \in]\delta\,;1[\implies \forall (j,k) \in [\![1\,;n]\!]^2, \ r^2 \neq \alpha_j\alpha_k$$

Ainsi, par l'équivalence précédente, il vient que pour tout $r \in]\delta\,;1[$, $p(rX)$ n'admet pas de racine stable.

Finalement, posons :

$$\boxed{\eta := \min\big(1-\rho, 1-\delta\big)}$$

Alors on a :

$$]1-\eta\,;1[\, = \,]0\,;+\infty[\cap]\rho\,;1[\cap]\delta\,;1[$$

Et donc $\boxed{\text{pour tout } r \in]1-\eta\,;1[, \ p(rX) \text{ est scindé, tel que } \sigma\big(p(rX)\big) = \sigma(p) \text{ et n'admet aucune racine stable.}}$

23. Montrons le résulatat préliminaire suivant :

$$\forall M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \quad \pi(-M) = n - \pi(M) \tag{6}$$

Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, par le théorème spectral, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que :

$$M = P^T \operatorname{diag}\Big((\lambda)_{\lambda \in \mathcal{S}p(M)}\Big) P \qquad \text{d'où} \qquad -M = P^T \operatorname{diag}\Big((-\lambda)_{\lambda \in \mathcal{S}p(M)}\Big) P$$

D'où le résultat.

Soit $r \in]0\,;1[$. On a $F(r) = J\big(p(rX)\big) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, donc :

$$\frac{n}{2(r-1)} F(r) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

Ainsi, par l'équation (6), on a :

$$\pi\left(\frac{n}{2(r-1)} F(r)\right) = n - \pi\left(\frac{n}{2(1-r)} F(r)\right)$$

Or, puisque $1 - r > 0$, on a :

$$\frac{n}{2(1-r)} F(r) = J\left(\sqrt{\frac{n}{2(1-r)}} p(rX)\right)$$

D'autre part, par la question **22.**, si $r \in]1-\eta\,;1[$, $F(r) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et donc :

$$J\left(\sqrt{\frac{n}{2(1-r)}} p(rX)\right) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

Par la question **18.**, on a :

$$\pi\left(J\left(\sqrt{\frac{n}{2(1-r)}} p(rX)\right)\right) = \sigma\left(\sqrt{\frac{n}{2(1-r)}} p(rX)\right) = \sigma\big(p(rX)\big)$$

Or, par la question **22.**, si $r \in]1-\eta\,;1[$, on a :

$$\sigma\big(p(rX)\big) = \sigma(p)$$

Donc on a :

$$\pi\left(\frac{n}{2(r-1)} F(r)\right) = n - \pi\left(J\left(\sqrt{\frac{n}{2(1-r)}} p(rX)\right)\right) = n - \sigma(p)$$

Et d'où :

$$\boxed{\lim_{r \to 1^-} \pi\left(\frac{n}{2(r-1)} F(r)\right) = n - \sigma(p)}$$

24. La fonction

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \\ r & \longmapsto & J\big(p(rX)\big) \end{array}$$

est polynomiale en r, donc en particulier, elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, on a pour tout $r > 0$:

$$\begin{aligned}
F(r) &= [p(rX)]_0(S)^T [p(rX)]_0(S) - p(rX)(S)^T p(rX)(S) \\
&= r^{2n} p_0\left(\frac{1}{r}X\right)(S)^T p_0\left(\frac{1}{r}X\right)(S) - p(rX)(S)^T p(rX)(S) \\
&= \frac{r^{2n}}{\lambda^2} p\left(\frac{1}{r}X\right)(S)^T p\left(\frac{1}{r}X\right)(S) - p(rX)(S)^T p(rX)(S) \quad (\text{car } p = \lambda p_0) \\
&= r^{2n} p\left(\frac{1}{r}X\right)(S)^T p\left(\frac{1}{r}X\right)(S) - p(rX)(S)^T p(rX)(S) \quad (\text{car } \lambda \in \{-1, 1\}) \\
&= r^{2n} p\left(\frac{S^T}{r}\right) p\left(\frac{S}{r}\right) - p(rS^T) p(rS)
\end{aligned}$$

D'où, pour tout $r > 0$:

$$F'(r) = 2nr^{2n-1} p\left(\frac{S^T}{r}\right) p\left(\frac{S}{r}\right) + r^{2n}\left[-\frac{S^T}{r^2} p'\left(\frac{S^T}{r}\right) p\left(\frac{S}{r}\right) - p\left(\frac{S^T}{r}\right)\frac{S}{r^2} p'\left(\frac{S}{r}\right)\right] - S^T p'\big(rS^T\big) p(rS) - p\big(rS^T\big) S p'(rS)$$

Donc, en particulier :

$$F'(1) = 2np\big(S^T\big)p(S) - 2S^Tp'\big(S^T\big)p(S) - 2p\big(S^T\big)Sp'(S)$$

i.e.

$$\boxed{F'(1) = 2n\big(p(S)\big)^T p(S) - 2S^T\big(p'(S)\big)^T p(S) - 2\big(p(S)\big)^T p'(S)S}$$

25. Puisque F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, en particulier elle admet un DL_1 en 1 :

$$F(r) = F(1) + F'(1)(r-1) + \underset{r\to 1}{o}(r-1)$$

Or on a $p = \lambda p_0$ avec $\lambda \in \{-1, 1\}$, d'où :

$$F(1) = J(p) = p_0\big(S^T\big)p_0(S) - p\big(S^T\big)p(S) = \left(\frac{1}{\lambda^2} - 1\right)p\big(S^T\big)p(S) = 0$$

Ainsi on a :

$$\frac{n}{2(r-1)}F(r) = \frac{n}{2}F'(1) + \underset{r\to 1}{o}(1)$$

Montrons que $\frac{n}{2}F'(1) = J(h)$. On a :

$$J(h) = h_0\big(S^T\big)h_0(S) - h\big(S^T\big)h(S)$$

Or, par la question **4.**, on a

$$h_0\big(S^T\big) = \lambda\Big(np\big(S^T\big) - S^Tp'\big(S^T\big)\Big) \qquad \text{et} \qquad h_0(S) = \lambda\Big(np(S) - Sp'(S)\Big)$$

D'où :

$$\begin{aligned} h_0\big(S^T\big)h_0(S) &= \Big(np\big(S^T\big) - S^Tp'\big(S^T\big)\Big)\Big(np(S) - Sp'(S)\Big) \quad (\text{car } \lambda \in \{-1,1\}) \\ &= n^2p\big(S^T\big)p(S) - np\big(S^T\big)Sp'(S) - S^Tp'\big(S^T\big)np(S) + S^Tp'\big(S^T\big)Sp'(S) \\ &= n^2p\big(S^T\big)p(S) - np\big(S^T\big)Sp'(S) - nS^Tp'\big(S^T\big)p(S) + h\big(S^T\big)h(S) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} J(h) &= n^2p\big(S^T\big)p(S) - np\big(S^T\big)Sp'(S) - nS^Tp'\big(S^T\big)p(S) \\ &= \frac{n}{2}\Big[2np\big(S^T\big)p(S) - 2S^Tp'\big(S^T\big)p(S) - 2p\big(S^T\big)Sp'(S)\Big] \\ &= \frac{n}{2}\Big[2n\big(p(S)\big)^T p(S) - 2S^T\big(p'(S)\big)^T p(S) - 2\big(p(S)\big)^T p'(S)S\Big] \\ &= \frac{n}{2}F'(1) \quad (\text{d'après } \textbf{24.}) \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{\frac{n}{2(r-1)}F(r) = J(h) + \underset{r\to 1}{o}(1)}$$

26. Notons $\psi\colon \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ l'application qui à une matrice symétrique associe le n-uplet de ses valeurs propres réelles comptées avec leurs multiplicités, rangées dans l'ordre décroissant. On admet donc que ψ est continue. Or par la question **25.**, on a :

$$\frac{n}{2(r-1)}F(r) \xrightarrow[r\to 1^-]{} J(h)$$

Donc :

$$\psi\left(\frac{n}{2(r-1)}F(r)\right) \xrightarrow[r\to 1^-]{} \psi\big(J(h)\big)$$

Posons :

$$(\mu_1, \ldots, \mu_n) := \psi\big(J(h)\big) \qquad \text{et} \qquad \forall r \in \,]0\,;1[, \quad (\mu_{1,r}, \ldots, \mu_{n,r}) := \psi\left(\frac{n}{2(r-1)}F(r)\right)$$

On a donc :

$$\forall k \in [\![1\,;n]\!], \quad \lim_{r\to 1^-}\mu_{k,r} = \mu_k$$

Or, par la question **21.**, $J(h) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, d'où $0 \notin \mathcal{S}p\big(J(h)\big)$. Donc pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, on a :

$$k \leq \pi\big(J(h)\big) \quad \Longrightarrow \quad \mu_k > 0 \qquad \text{et} \qquad k > \pi\big(J(h)\big) \quad \Longrightarrow \quad \mu_k < 0$$

Donc pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, il existe $\varepsilon_k > 0$ tel que pour tout $r \in \,]1-\varepsilon_k\,;1[$, on a :

$$k \leq \pi\big(J(h)\big) \quad \Longrightarrow \quad \mu_{k,r} > 0 \qquad \text{et} \qquad k > \pi\big(J(h)\big) \quad \Longrightarrow \quad \mu_{k,r} < 0$$

Posons :

$$\varepsilon := \min\big(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\big) > 0$$

On a donc :

$$\forall r \in \,]1-\varepsilon\,;1[, \quad \pi\left(\frac{n}{2(r-1)}F(r)\right) = \pi\big(J(h)\big)$$

Donc, par la question **23.**, on a :

$$\sigma(p) = n - \pi\big(J(h)\big)$$

Comme $J(h) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, par la question **18.**, on a :

$$\pi\big(J(h)\big) = \sigma(h)$$

Or :

$$\sigma(h) = \sigma(Xp') = 1 + \sigma(p')$$

Donc :

$$\sigma(p) = n - \sigma(h) = n - 1 - \sigma(p')$$

Or, par la question **4.**, p' n'admet pas de racine stable, donc par la question **18.**, on a :

$$\sigma(p') = \pi\big(J(p')\big)$$

Finalement :

$$\boxed{\sigma(p) = n - \sigma(h) = n - 1 - \pi\big(J(p')\big)}$$

7. Méthode générale

27. On a :

$$g = \frac{p}{p \wedge p_0}$$

Or, par la question **1.**, on a pour $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\alpha \text{ est une racine stable de } p \iff \alpha \text{ est racine de } p \text{ et } p_0$$

Donc les racines de g sont les racines non stables de p et donc g n'admet pas de racine stable. Ainsi, par la question **18.**, on a $J(g) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et :

$$\boxed{\sigma(g) = \pi\big(J(g)\big)}$$

28. Comme $f = p \wedge p_0$, ses racines sont toutes stables par la question **1.**. Notons-les $\gamma_1, \ldots, \gamma_m, \frac{1}{\gamma_1}, \ldots, \frac{1}{\gamma_m}$ et $n_1, \ldots, n_m$ leur multiplicité respective. On a donc :

$$f = \prod_{k=1}^{m} \left[(X-\gamma_k)\left(X - \frac{1}{\gamma_k}\right)\right]^{n_k}$$

Posons :

$$\forall k \in [\![1\,;m]\!], \quad \ell_k := \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ \gamma_i \neq \pm 1}} n_i \; + 2 \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ \gamma_i = \pm 1}} n_i$$

Notons $\ell_0 := 1$ ainsi que $\ell := \ell_m$ et construisons les $(g_i)_{1 \leq i \leq \ell}$. On procède de la façon suivante : pour tout $k \in [\![1\,;m]\!]$,

- si $\gamma_k \neq \pm 1$, alors on pose :

$$\forall i \in [\![\ell_{k-1}\,;\ell_k]\!], \quad g_i := (X-\gamma_k)\left(X - \frac{1}{\gamma_k}\right)$$

- si $\gamma_k = \pm 1$, alors on pose :
$$\forall i \in [\![\ell_{k-1}\,;\ell_k]\!], \quad g_i := (X-\gamma_k)$$

Ainsi et on a :

$$\begin{aligned} f &= \prod_{\substack{1\leq k\leq m\\ \gamma_k\neq\pm1}} \left[(X-\gamma_k)\left(X-\frac{1}{\gamma_k}\right)\right]^{n_k} \times \prod_{\substack{1\leq k\leq m\\ \gamma_k=\pm1}} \left[(X-\gamma_k)\left(X-\frac{1}{\gamma_k}\right)\right]^{n_k} \\ &= \prod_{\substack{1\leq k\leq m\\ \gamma_k\neq\pm1}} \left[(X-\gamma_k)\left(X-\frac{1}{\gamma_k}\right)\right]^{n_k} \times \prod_{\substack{1\leq k\leq m\\ \gamma_k=\pm1}} (X-\gamma_k)^{2n_k} \\ &= \prod_{\substack{1\leq k\leq m\\ \gamma_k\neq\pm1}} \left(\prod_{i=\ell_{k-1}}^{\ell_k} g_i\right) \times \prod_{\substack{1\leq k\leq m\\ \gamma_k=\pm1}} \left(\prod_{i=\ell_{k-1}}^{\ell_k} g_i\right) \end{aligned}$$

i.e. :

$$\boxed{f = \prod_{i=1}^{\ell} g_i}$$

et les $\boxed{(g_i)_{1\leq i\leq \ell} \text{ sont à racines simples de multiplicité 1.}}$

On a donc $p = g \times g_1 \cdots g_\ell$ et par construction de g et des $(g_i)_{1\leq i\leq\ell}$ il vient que :

$$\sigma(p) = \sigma(g) + \sum_{i=1}^{\ell} \sigma(g_i)$$

Or d'après la question **26.**, on a :

$$\forall i \in [\![1\,;\ell]\!], \quad \sigma(g_i) = \deg g_i - 1 - \pi\big(J(g_i')\big)$$

Et on a :

$$\sum_{i=1}^{\ell} \deg g_i = \deg f = n - \deg g$$

D'où :

$$\sum_{i=1}^{\ell} \sigma(g_i) = n - \deg g - \ell - \sum_{i=1}^{\ell} \pi\big(J(g_i')\big)$$

Et d'après la question **27.** :

$$\sigma(g) = \pi\big(J(g)\big)$$

Donc, finalement, on a :

$$\boxed{\sigma(p) = \pi\big(J(g)\big) + n - \deg g - \ell - \sum_{i=1}^{\ell} \pi\big(J(g_i')\big)}$$