

Correction Mines PC 2025

Thomas Bodillis

En cas d'erreurs ou autres remarques, me contacter à bodilisthomas73@gmail.com

Étude des séries congruo-harmoniques alternées

1. $\left(\frac{1}{pk+q}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle positive décroissante et tendant vers 0. Donc par le critère spécial des séries alternées, la série $\sum u_k$ converge.
2. On a :

$$\phi_{1,1}(n) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}$$

Or :

$$\frac{1}{k+1} = \int_0^1 t^k dt$$

Donc, par linéarité de l'intégrale :

$$\phi_{1,1}(n) = \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-t)^k dt$$

Or, pour $|t| < 1$:

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-t)^k$$

Donc, on obtient par changement d'indices :

$$\sum_{k=0}^n (-t)^k = \frac{1}{1+t} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-t)^k = \frac{1}{1+t} - (-t)^{n+1} \frac{1}{1+t}$$

On a donc bien le résultat voulu :

$$\phi_{1,1}(n) = \int_0^1 \frac{1}{1+t} - (-t)^{n+1} \frac{1}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt$$

3. On a, par définition :

$$S_{1,1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_{1,1}(n)$$

On cherche donc à déterminer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt$$

Si on note $f_n(t) = \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}$, on a :

- (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux sur $I = [0, 1]$
- On a : $\forall t \in I - \{1\}, \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = 0$. On note f la fonction nulle sur I , elle est continue par morceaux. (le point $\{1\}$ ne compte pas pour notre limite)
- Hypothèse de domination: $\forall t \in I, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(t)| \leq \frac{1}{1+t}$. Donc (f_n) est dominée par ψ définie sur I par : $\psi(t) = \frac{1}{1+t}$ et qui est intégrable sur I .

Par le théorème de convergence dominée, on a donc que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt = 0$$

Ainsi, par le résultat de la question précédente, on a:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_{1,1}(n) = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2)$$

Donc : $\boxed{S_{1,1} = \ln(2)}$

4. On a :

$$\phi_{1,q}(n) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+q}$$

Comme précédemment, on a : $\frac{1}{k+q} = \int_0^1 t^{k+q-1} dt$.

Donc :

$$\phi_{1,q}(n) = \int_0^1 t^{q-1} \sum_{k=0}^n (-t)^k dt$$

En utilisant ce que l'on avait trouvé à la question 2 (pour l'expression de la somme dans l'intégrale $\sum_{k=0}^n (-t)^k$), on a :

$$\phi_{1,q}(n) = \int_0^1 t^{q-1} \frac{1}{1+t} dt - \int_0^1 t^{q-1} (-t)^{n+1} \frac{1}{1+t} dt$$

Or, par le résultat de la question 2, on a :

$$\phi_{1,1}(q-2) = \ln(2) + \int_0^1 \frac{(-t)^{q-1}}{1+t} dt$$

Donc, on a :

$$(-1)^q \int_0^1 t^{q-1} \frac{1}{1+t} dt = \phi_{1,1}(q-2) - \ln(2)$$

D'où :

$$\phi_{1,q}(n) = (-1)^q (\phi_{1,1}(q-2) - \ln(2)) - \int_0^1 t^{q-1} (-t)^{n+1} \frac{1}{1+t} dt$$

On montre que le dernier terme a une limite nulle de la même manière qu'à la question 3. Cela donne donc en passant à la limite :

$$\boxed{S_{1,q} = (-1)^q (\phi_{1,1}(q-2) - \ln(2))}$$

5. On pose la fonction h définie sur $I \times \mathbb{R}_+$ comme :

$$h(x, t) = \frac{x^{(t+1)\alpha_{p,q}}}{1 + x^{\alpha_{p,q}}}$$

$x \mapsto h(x, t)$ est continue sur I pour t, p, q quelconques dans leurs domaines de définitions, donc $I_{p,q}$ est bien définie.

Utilisons le théorème de continuité des intégrales à paramètres pour montrer la continuité de $I_{p,q}$.

- $t \mapsto h(x, t)$ est bien continue sur $\mathbb{R}_+$ pour tout x dans I .
- $x \mapsto h(x, t)$ est continue par morceaux sur I pour tout t dans $\mathbb{R}_+$.
- Hypothèse de domination On a : $\forall x \in I, \forall t \in \mathbb{R}_+, |h(x, t)| \leq g(x) = \frac{1}{1 + x^{\alpha_{p,q}}}$, donc h est dominée par g , qui est bien continue par morceaux et intégrable sur I .

Ainsi, on a bien $\boxed{\text{la continuité de } I_{p,q} \text{ sur } \mathbb{R}_+}$.

6. On reprend les notations de la question précédente.

- $(h(x, n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues par morceaux sur $I = [0, 1]$
- On a : $\forall x \in I - \{1\}, \lim_{n \rightarrow +\infty} h(x, n)(t) = 0$. On note f la fonction nulle sur I , elle est continue par morceaux.
- Hypothèse de domination: $\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, |h(x, n)| \leq g(x)$. Donc $(h(x, n))$ est dominée par g , qui est bien continue par morceaux et intégrable sur I .

Par le théorème de convergence dominée, on a bien le résultat voulu : $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{p,q}(n) = 0}$

7. On a :

$$\sum_{k=0}^n (-x^{\alpha_{p,q}})^k = \frac{1 - (-x^{\alpha_{p,q}})^{n+1}}{1 + x^{\alpha_{p,q}}}$$

On a :

$$\phi_{p,q}(n) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{pk + q}$$

On a aussi :

$$\int_0^1 x^{\alpha_{p,q}k} dx = \frac{1}{\alpha_{p,q}k + 1} = \frac{q}{pk + q}$$

Donc :

$$\phi_{p,q}(n) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{q} \int_0^1 x^{\alpha_{p,q}k} dx$$

Donc on fait rentrer la somme dans l'intégrale, et ainsi par le calcul fait précédemment :

$$\phi_{p,q}(n) = \frac{1}{q} \int_0^1 \frac{1 - (-x^{\alpha_{p,q}})^{n+1}}{1 + x^{\alpha_{p,q}}} dx = \frac{1}{q} \left(\int_0^1 \frac{1}{1 + x^{\alpha_{p,q}}} dx + (-1)^n \int_0^1 \frac{(x^{\alpha_{p,q}})^{n+1}}{1 + x^{\alpha_{p,q}}} dx \right)$$

On reconnaît l'expression de $I_{p,q}(n)$, d'où :

$$\boxed{\phi_{p,q}(n) = \frac{1}{q} \left(\int_0^1 \frac{1}{1 + x^{\alpha_{p,q}}} dx + (-1)^n I_{p,q}(n) \right)}$$

8. On a, en passant à la limite :

$$S_{p,q} = \frac{1}{q} \int_0^1 \frac{1}{1 + x^{\alpha_{p,q}}} dx$$

On pose $t = x^{\frac{1}{q}}$.

$$\text{D'où : } dt = \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1} dx = \frac{1}{q} t^{1-q} dx$$

Ainsi, par changement de variables, on a :

$$S_{p,q} = \int_0^1 \frac{t^{q-1}}{1+t^p} dt$$

9. On a, pour $(p, q) \in E_1$:

$$S_{p,q} = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \frac{1}{p} S_{1,1}$$

D'où :

$$S_{p,q} = \frac{\ln(2)}{p}$$

10. On pose m tel que $q = pm$. On a donc :

$$\phi_{p,q}(n) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{pk + pm} = \frac{1}{p} \phi_{1,m}(n)$$

Par la question 4, on a, en passant à la limite :

$$S_{p,q} = (-1)^m \frac{1}{p} (\phi_{1,1}(m-2) - \ln(2)) = \frac{(-1)^{m-1}}{p} \left(\ln(2) - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{(-1)^k}{k+1} \right)$$

D'où, par changement d'indices :

$$S_{p,q} = \frac{(-1)^{m-1}}{p} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$$

D'où le résultat voulu pour $\lambda = m = q/p$.

11. On a la factorisation suivante, si p est pair :

$$X^p + 1 = \prod_{k=1}^p (X - \omega_{p,k})$$

Et si p est pair :

$$X^p + 1 = (X + 1) \prod_{k=1}^p (X - \omega_{p,k})$$

Où les $(\omega_{p,k})_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ sont complexes non réels car le polynôme a au plus une racine réelle (qui est -1).

Comme le polynôme est réel, les $(\omega_{p,k})_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ sont deux à deux conjugués. On a donc, quitte à changer les notations :

$$\forall k \in \llbracket 1, \lfloor p/2 \rfloor \rrbracket, \overline{\omega_{p,k}} = \omega_{p, k + \lfloor p/2 \rfloor}$$

D'où par décomposition en éléments simples de $F(X)$, on a l'existence des éléments $(a_0, b_0, \dots, b_{p-1})$ tels que :

$$F(X) = \underbrace{\frac{1 - (-1)^p}{2} \frac{a_0}{X+1}}_{=0 \text{ pour } p \text{ pair}} + \sum_{k=0}^{p-1} \frac{b_k}{X - \omega_{p,k}}$$

Il reste à montrer que :

$$\forall k \in \llbracket 0, \lfloor p/2 \rfloor - 1 \rrbracket, \overline{b_k} = b_{k + \lfloor p/2 \rfloor}$$

Or, $\overline{F(x)} = F(x)$ pour x réel.

On a donc le résultat voulu par unicité des coefficients pour la décomposition en éléments simples.

D'où le résultat voulu avec : $\boxed{\omega_{p,k} = \exp\left(i \frac{\pi}{p} + i \frac{2k\pi}{p}\right)}.$

12. On a, comme p est impair :

$$\frac{X^p + 1}{X + 1} = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k X^k$$

Donc : $F(X)(X+1)(-1) = \frac{(-1)^{q-1}}{p}$

On multiplie par $X+1$ dans le résultat obtenu et on évalue en -1 , on a donc :

$$a_0 = F(X)(X+1)(-1) = \frac{(-1)^{q-1}}{p}$$

Tous les pôles sont simples, on peut donc utiliser la formule " $\frac{P}{Q'}$ " pour déterminer les b_k :

$$\forall k \in \llbracket 0, \lfloor p/2 \rfloor - 1 \rrbracket, b_k = \frac{X^{q-1}}{pX^{p-1}}(\omega_{p,k}) = \frac{1}{p}(\omega_{p,k})^{q-p} = -\frac{1}{p}(\omega_{p,k})^q$$

Car $\omega_{p,k}^p = -1$.

D'où, en reprenant la formule pour les $\omega_{p,k}$:

$$b_k = -\frac{1}{p} e^{iq(2k+1)\frac{\pi}{p}}$$

On a bien : $\boxed{b_k = -\frac{1}{p} e^{iq\theta_k}}$

13. On a, en mettant au même dénominateur :

$$\frac{b_k}{X - \omega_{p,k}} + \frac{\overline{b_k}}{X - \overline{\omega_{p,k}}} = \frac{X(b_k + \overline{b_k}) - b_k \overline{\omega_{p,k}} - \overline{b_k} \omega_{p,k}}{X^2 - X(\omega_{p,k} + \overline{\omega_{p,k}}) + 1}$$

Or :

$$b_k + \overline{b_k} = -\frac{2}{p} \Re(b_k) = -\frac{2}{p} \cos(q\theta_k)$$

Et :

$$\omega_{p,k} + \overline{\omega_{p,k}} = 2\Re(\omega_{p,k}) = 2\cos(\theta_k)$$

Puis :

$$b_k \overline{\omega_{p,k}} + \overline{b_k} \omega_{p,k} = 2\Re(b_k \overline{\omega_{p,k}}) = -\frac{2}{p} \Re(\exp(iq\theta_k - i\theta_k)) = -\frac{2}{p} \cos((q-1)\theta_k)$$

D'où :

$$\frac{b_k}{X - \omega_{p,k}} + \frac{\overline{b_k}}{X - \overline{\omega_{p,k}}} = \frac{X(-\frac{2}{p} \cos(q\theta_k)) + \frac{2}{p} \cos((q-1)\theta_k)}{X^2 - 2X \cos(\theta_k) + 1} = -\frac{2}{p} \frac{X \cos(q\theta_k) - \cos((q-1)\theta_k)}{X^2 - 2X \cos(\theta_k) + 1}$$

On a bien, grâce aux deux questions précédentes :

$$\boxed{F(X) = \frac{1 - (-1)^p}{2} \frac{(-1)^{q-1}}{p} \frac{1}{X+1} - \frac{2}{p} \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} F_k(X)}$$

14. On a : $\cos(q\theta_k) = \Re(\exp(iq\theta_k))$

Donc on étudie la somme suivante : $\sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \exp(iq\theta_k)$

On a, en reprenant l'expression de θ_k :

$$\sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \exp(iq\theta_k) = \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \exp\left(\frac{iq\pi}{p}\right) \exp\left(\frac{2iq\pi}{p}\right)^k = \exp\left(\frac{iq\pi}{p}\right) \frac{1 - \exp\left(\frac{2iq\pi}{p}\right)^{\lfloor p/2 \rfloor}}{1 - \exp\left(\frac{2iq\pi}{p}\right)}$$

On suppose p pair, on a donc :

$$\sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \exp(iq\theta_k) = \exp\left(\frac{iq\pi}{p}\right) \frac{1 - \exp(iq\pi)}{1 - \exp\left(\frac{2iq\pi}{p}\right)}$$

Si q est pair, on a directement le numérateur nul donc : $\sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \exp(iq\theta_k) = 0$

Si q est impair, on a :

$$\sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \exp(iq\theta_k) = \frac{2}{\exp\left(-\frac{iq\pi}{p}\right) - \exp\left(\frac{iq\pi}{p}\right)} = \frac{2}{-2i \sin\left(\frac{q\pi}{p}\right)}$$

Dans ces deux cas, en passant à la partie réelle, on a bien que : $\sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \cos(q\theta_k) = 0$.

Supposons maintenant p impair, on a ainsi (comme $\lfloor p/2 \rfloor = \frac{p-1}{2}$) :

$$\sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \exp(iq\theta_k) = \exp\left(\frac{iq\pi}{p}\right) \frac{1 - \exp\left(\frac{iq\pi(p-1)}{p}\right)}{1 - \exp\left(\frac{2iq\pi}{p}\right)}$$

De la même manière que précédemment :

$$\exp\left(\frac{iq\pi}{p}\right) \frac{1}{1 - \exp\left(\frac{2iq\pi}{p}\right)} = \frac{1}{-2i \sin\left(\frac{q\pi}{p}\right)}$$

D'où :

$$\sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \exp(iq\theta_k) = \frac{1 - \exp(iq\pi) \exp\left(-\frac{iq\pi}{p}\right)}{-2i \sin\left(\frac{q\pi}{p}\right)} = \frac{1 + (-1)^{q+1} \left(\cos\left(\frac{iq\pi}{p}\right) - i \sin\left(\frac{iq\pi}{p}\right)\right)}{-2i \sin\left(\frac{q\pi}{p}\right)}$$

En passant à la partie réelle, on a bien :
$$\sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \cos(q\theta_k) = \frac{(-1)^{q+1}}{2}.$$

15. En utilisant le résultat de la question 8, on va intégrer l'expression de $F(X)$ obtenue à la question 13 puis utiliser le résultat admis sur les $F_k(X)$.

D'où :

$$S_{p,q} = \frac{1 - (-1)^p}{2} \frac{(-1)^{q-1}}{p} \ln(2) + \frac{2}{p} \left(\sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \frac{\pi}{2p} (p-1-2k) \sin(q\theta_k) - \cos(q\theta_k) \ln(2 \sin(\frac{\theta_k}{2})) \right)$$

Or, d'après la question précédente :

$$\frac{1 - (-1)^p}{2} \frac{(-1)^{q-1}}{p} \ln(2) = \frac{2}{p} \ln(2) \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \cos(q\theta_k)$$

(Si l'on n'est point convaincu, refaire la disjonction p pair/impair)

D'où, en regroupant les sommes :

$$S_{p,q} = \frac{2}{p} \left(\sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \frac{\pi}{2p} (p-1-2k) \sin(q\theta_k) - \cos(q\theta_k) \left(\ln(2 \sin(\frac{\theta_k}{2})) - \ln(2) \right) \right)$$

Or : $\ln(2 \sin(\frac{\theta_k}{2})) - \ln(2) = \ln(\sin(\frac{\theta_k}{2}))$.

On a donc bien :
$$S_{p,q} = \frac{2}{p} \left(\sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \frac{\pi}{2p} (p-1-2k) \sin(q\theta_k) - \cos(q\theta_k) \ln(\sin(\frac{\theta_k}{2})) \right)$$

16. En remplaçant avec les valeurs données, on trouve :
$$S_{2,1} = \frac{\pi}{4} \text{ et } S_{3,1} = \frac{1}{9}(\sqrt{3}\pi + \ln(8)).$$

(On retrouve bien la valeur de $\arctan(1)$ pour $S_{2,1}$.)

17. Il est clair, vu les définitions de E_1, E_2 et E_3 , que $A_n \cup B_n \cup C_n = E_n$

De plus, les événements sont visiblement 2 à 2 incompatibles. $\{A_n, B_n, C_n\}$ forment bien une partition de E_n .

18. $(p=i)_{i \in [1,n]}$ est un système complet d'évènement.

On a donc, par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(A_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}((p = q) \cap (p = i)) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}((p = i) \cap (q = i))$$

Or les évènements $(p = i)$ et $(q = i)$ sont indépendants car le tirage est "avec remise".

Donc :

$$\mathbb{P}(A_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(p = i) \mathbb{P}(q = i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^2}$$

D'où : $\boxed{\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{n}}.$

De même, par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(C_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}((p > q) \cap (p = i)) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}((q < i) \cap (p = i)) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(q < i) \mathbb{P}(p = i)$$

Ainsi, comme $(q < 1)$ est impossible et que $\mathbb{P}(q < i) = \frac{i-1}{n}$:

$$\mathbb{P}(C_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n \frac{i-1}{n}$$

Donc : $\boxed{\mathbb{P}(C_n) = \frac{n(n-1)}{2n^2}}.$

(Vérification : on retrouve bien que $\mathbb{P}(A_n) + 2\mathbb{P}(C_n) = 1$, ce qui est cohérent avec le fait que $(p < q)$, $(p > q)$, $(p = q)$ couvrent toutes les possibilités).

19. On va chercher la probabilité que l'on tire p et q tels que $p|q$. Cela revient en fait à calculer $\mathbb{P}(A_n \cup B_n)$.

Pour ce faire, on va dénombrer le nombre de multiples de p (avec p parcourant $\llbracket 1, n \rrbracket$) inférieurs à n .

Soit $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Les multiples de p , inférieurs à n , sont $\{1.p, 2.p, \dots, \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor .p\}$. Il y en a $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$.

Donc, si p parcourt tout l'intervalle, on a $\sum_{p=1}^n \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$ possibilités pour p et q tels que $p|q$.

Or, au total, il y a n^2 possibilités pour p et q . Donc : $\boxed{\mathbb{P}(A_n \cup B_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{p=1}^n \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor}.$

Comme $A_n \cap B_n = \emptyset$, on a :

$$\mathbb{P}(B_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{p=1}^n \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor - \frac{1}{n}$$

20. L'équivalent peut s'obtenir avec une comparaison série-intégrale.

On peut aussi écrire que :

$$\ln(n+1) - \ln(n) \sim \frac{1}{n}$$

Puis que : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ diverge en $+\infty$.

Donc par sommation des relations de comparaisons (peut-être HP en PC), puis par télescopage :

$$H_n \sim \sum_{k=1}^n \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(n+1)$$

Or : $\ln(n) \sim \ln(n+1)$.

Donc : $H_n \sim \ln(n)$.

21. On a : $\frac{n}{p} - 1 \leq \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \leq \frac{n}{p}$.

Donc, en utilisant l'expression obtenue à la question 19 :

$$\frac{1}{n}H_n - \frac{1}{n} \leq \mathbb{P}(A_n \cup B_n) \leq \frac{1}{n}H_n$$

Or : $H_n \sim H_n - \frac{1}{n} \sim \frac{\ln(n)}{n}$.

Donc : $\mathbb{P}(A_n \cup B_n) \sim \frac{\ln(n)}{n}$.

22. On a, comme $\{A_n, B_n, C_n\}$ est une partition de E_n :

$$\mathbb{P}(E_n) = \mathbb{P}(A_n \cup B_n) + \mathbb{P}(C_n) = \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{2n^2}$$

Donc en passant à la limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(E_n) = \frac{1}{2}$

23. On rappelle que : $I_{p,q}(n) = \int_0^1 \frac{x^{(1+n)\alpha_{p,q}}}{1+x^{\alpha_{p,q}}} dx$

On pose : $s = x^{n+1}$.

D'où : $ds = (n+1)x^n dx$.

Donc :

$$I_{p,q}(n) = \int_0^1 \frac{s^{\alpha_{p,q}}}{1+s^{\alpha_{p,q}/(n+1)}} \frac{ds}{(n+1)s^{n/(n+1)}}$$

On utilise une nouvelle fois le théorème de convergence dominée sur $nI_{p,q}(n)$ (dont je ne détaille pas les hypothèses), d'où :

$$nI_{p,q}(n) \longrightarrow \int_0^1 \frac{s^{\alpha_{p,q}-1}}{2} ds = \frac{1}{2\alpha_{p,q}}$$

On a donc bien : $R_{p,q} \sim \frac{1}{2pn}$.

24. D'après la question 7, on a :

$$\phi_{p,q}(n) = \frac{1}{q} \left(\int_0^1 \frac{1}{1+x^{\alpha_{p,q}}} dx + (-1)^n I_{p,q}(n) \right)$$

Et donc on en avait déduit que :

$$\phi_{p,q}(n) \longrightarrow \frac{1}{q} \int_0^1 \frac{1}{1+x^{\alpha_{p,q}}} dx = l$$

De plus, la vitesse de convergence a un sens car on montre facilement que $(\phi_{p,q}(n))$ est toujours différent de sa limite l

Ainsi :

$$\frac{\phi_{p,q}(n+1) - l}{\phi_{p,q}(n) - l} = \frac{(-1)^{n+1} R_{p,q}(n+1)}{(-1)^n R_{p,q}(n)}$$

En passant à la limite, on a, d'après la question précédente : $V = 1$.

La convergence est donc infra-linéaire.