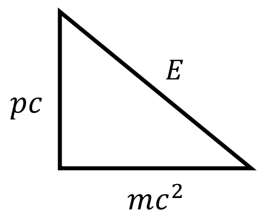
Impulsion mécanique et mesures optiques

Proposition de correction de l'épreuve Physique 1 MP Mines-Ponts 2025

Pour toute suggestion, merci de me contacter à l'adresse mail suivante : melkimathis@gmail.com

***

1/ (1) est une relation énergétique qui traduit la dépendance entre l'impulsion et l'énergie.



On obtient la relation (1) en appliquant le théorème de Pythagore au triangle rectangle représenté ci-dessus.

L'unité de p est $\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$. Le produit pc est exprimé en Joules (c'est une énergie).

2/ D'après la relation (1), on obtient : $E_0 = m_p c^2$ (énergie de masse, ou énergie de repos). A.N. : $E_0 = 940$ MeV.

3/ On effectue un développement limité au premier ordre en $\frac{E_c}{E_0}$. On note $E_0 = mc^2$ (d'après la question précédente).

$$E^2 = (E_0 + E_c)^2 = E_0^2 + p^2c^2$$

$$\Rightarrow E_0^2 \left(1 + \underbrace{\frac{E_c}{E_0}}_{\ll 1}\right)^2 = E_0^2 + p^2c^2$$

$$\Rightarrow E_0^2 \left(1 + \frac{2E_c}{E_0}\right) = E_0^2 + p^2c^2$$

$$\overset{E_0 = mc^2}{\Rightarrow} \quad E_c = \frac{p^2}{2m}$$

Dans la limite classique, on retrouve l'expression habituelle de l'énergie cinétique. On retrouve aussi $\vec{p} = m\vec{v}$.

La condition $\frac{E_c}{E_0} < \frac{1}{100}$ implique, compte tenu des expressions donnée, la condition :

$$\frac{p^2}{2m} \times \frac{1}{mc^2} < \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{v^2}{2c^2} < \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow v < \frac{c}{\sqrt{50}}$$

On remarque que, dans la limite classique, ce résultat est indépendant de la masse !

4/ On utilise les relations (1) et (3).

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 = \frac{m^2v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}c^2 + m^2c^4$$

$$= m^2c^4\left(1 + \frac{\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)$$

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

5/ La relation précédente impose que $m = 0$ pour un photon, sinon l'énergie diverge !

Des relations (1) et (2), on tire :

$$E = pc = \frac{hc}{\lambda} = h\nu$$

C'est la relation de Planck-Einstein !

6/ La conservation de l'impulsion totale donne :

$$\vec{p} = -m\vec{v}$$

La conservation de l'énergie totale donne :

$$E_i = E_f + \frac{1}{2}mv^2 + E$$

Or, d'après la conservation de l'impulsion totale, $v^2 = p^2/m^2$. En outre, $E_f = E_i - \Delta E$, donc :

$$E = \Delta E - \frac{p^2}{2m}$$

Enfin, l'impulsion d'un photon est donnée par $p = E/c$ (d'après l'énoncé). Donc finalement :

$$E = \Delta E - \frac{E^2}{2mc^2}$$

$$\Rightarrow E^2 + 2mc^2E = 2mc^2\Delta E$$

On complète le carré :

$$\Rightarrow (E + mc^2)^2 - (mc^2)^2 = 2mc^2\Delta E$$

$$\Rightarrow (E + mc^2)^2 = (mc^2)^2\left(1 + 2\frac{\Delta E}{mc^2}\right)$$

Posons $\eta = \Delta E/mc^2$.

$$\Rightarrow E = mc^2\left(\sqrt{1+2\eta} - 1\right)$$

7/ L'énergie de repos de l'atome d'hydrogène est approximativement égale à l'énergie de repos du proton, soit 940 MeV (question 2/). Si ΔE est de l'ordre de quelques électrons-volts, on conclut que $\eta \ll 1$, donc l'énergie de recul est négligeable.

En outre, un développement limité conduit à :

$$E = mc^2\big((1+\eta)-1\big) = mc^2\eta = \Delta E$$

Dans cette approximation, l'énergie du photon émis est exactement l'énergie de recul de l'atome d'hydrogène.

8/ Lorsque l'état final est $n_f = 1$, on a $n_i > n_f = 1$ donc $n_i \geq 2$. D'après la question précédente, et la relation (2), on déduit que :

$$\frac{hc}{\lambda} = \Delta E \coloneqq E_i - E_f = -\frac{H}{2n_i^2} + \frac{H}{2n_f^2} = \frac{H}{2}\left(1 - \frac{1}{n_i^2}\right)$$

Or, $n_i \geq 2$ donc :

$$1 - \frac{1}{n_i^2} \geq \frac{3}{4}$$

Ainsi,

$$\frac{hc}{\lambda} \geq \frac{3H}{8} \Rightarrow \lambda \leq \lambda_{\max} \coloneqq \frac{8hc}{3H} \approx 121{,}3\ \text{nm}$$

Le domaine spectral correspondant est : ultraviolet (il s'agit des raies de Lyman).

Lorsque l'état final est $n_f > 2$, soit $n_f \geq 3$, on a :

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{H}{2}\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right) \leq \frac{H}{2n_f^2} \leq \frac{H}{18}$$

Ainsi,

$$\lambda \geq \lambda_{\min} \coloneqq \frac{18hc}{H} \approx 818{,}9\ \text{nm}$$

Le domaine spectral correspondant est : infrarouge.

Le domaine visible se situe entre l'ultraviolet et l'infrarouge. Il correspond donc à $n_f = 2$.

9/ Schéma à faire.

10/ Miroirs orthogonaux = disposition lame d'air : on observe des anneaux d'égales inclinaison. La figure d'interférence est localisée à l'infini, donc si l'oculaire est déréglé, on ne peut plus l'observer.

11/ ΔN correspond à la différence d'ordre d'interférence lors d'un décalage Δz. En prenant en compte le fait que la lumière effectue un aller-retour, on obtient donc :

$$\Delta N = \frac{2\Delta z}{\lambda_0}$$

12/ Cf cours : $\delta(\Delta\theta) = 2\Delta z_{\text{max}} \cos(\Delta\theta)$ où Δz_{max} est l'écart entre les deux miroirs, et $\Delta\theta$ est l'angle d'observation.

Pour simplifier, supposons qu'après chariotage, le centre est brillant. Le prochain anneau brillant est donc atteint pour l'angle $\Delta\theta$ tel que :

$$2\Delta z_{\text{max}} \cos(\Delta\theta) = \lambda_0 \Rightarrow 2\Delta z_{\text{max}} \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{2}\right) = \lambda_0$$

$$\Rightarrow \Delta\theta = \sqrt{2}\sqrt{1 - \frac{\lambda_0}{2\Delta z_{\text{max}}}}$$

13/ On isole λ_0 dans la formule de la question 11/.

$$\lambda_0 = \frac{2\Delta z}{N} \approx \frac{2 \times 1035 \times 10^{-6}}{3156} \approx 655{,}9 \text{ nm}$$

Il s'agit de la raie rouge H_α.

L'incertitude relative pour la mesure de λ_0 est :

$$\frac{\Delta\lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\Delta(\Delta z)}{\Delta z} = \frac{2}{1035} \approx 0{,}2\%$$

On calcule alors :

$$\Rightarrow \Delta\theta = \sqrt{2}\sqrt{1 - \frac{\lambda_0}{2\Delta z}} = \sqrt{2}\sqrt{1 - \frac{1}{N}} \approx \sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{2N}\right) \approx 1{,}41 \text{ rad}$$

La valeur de l'angle est assez élevée. On peut remettre en question le développement limité effectué plus haut. Une estimation exacte avec la fonction *acos* serait idéale.

14/ D'après la formule de Fresnel :

$$I(\delta) = 2I_0\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta\right)\right)$$

Le contraste est défini par :

$$C \coloneqq \left|\frac{I_{\text{max}} - I_{\text{min}}}{I_{\text{max}} + I_{\text{min}}}\right|$$

Ainsi, on calcule :

$$C = \left|\frac{4I_0 - 0}{4I_0 + 0}\right| = 1$$

15/ Les sources ne sont pas cohérentes, car elles émettent sur des longueurs d'onde différentes. L'intensité totale est donc la somme de l'intensité de chaque source :

$$I = 2I_0\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_1}\delta\right)\right) + 2I_0\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_2}\delta\right)\right)$$

$$= 2I_0\left(2+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_1}\delta\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_2}\delta\right)\right)$$

$$= 4I_0\left(1+\cos\left(\pi\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}\right)\delta\right)\cos\left(\pi\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}\right)\delta\right)\right)$$

Or,

$$\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{\lambda_0-\frac{\Delta\lambda}{2}}+\frac{1}{\lambda_0+\frac{\Delta\lambda}{2}} = \frac{1}{\lambda_0}\left(\frac{1}{1-\frac{\Delta\lambda}{2\lambda_0}}+\frac{1}{1+\frac{\Delta\lambda}{2\lambda_0}}\right)$$

et $\Delta\lambda \ll \lambda_0$, donc :

$$\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2} \approx \frac{1}{\lambda_0}\left(1+\frac{\Delta\lambda}{2\lambda_0}+1-\frac{\Delta\lambda}{2\lambda_0}\right) = \frac{2}{\lambda_0}$$

De même, on trouve :

$$\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2} \approx \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2}$$

Enfin,

$$I = 4I_0\left(1+\cos\left(\frac{\pi\Delta\lambda\delta}{\lambda_0^2}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta\right)\right)$$

On déduit la valeur du contraste :

$$C = \left|\frac{4I_0\left(1+\cos\left(\frac{\pi\Delta\lambda\delta}{\lambda_0^2}\right)\right)-4I_0\left(1-\cos\left(\frac{\pi\Delta\lambda\delta}{\lambda_0^2}\right)\right)}{4I_0\left(1+\cos\left(\frac{\pi\Delta\lambda\delta}{\lambda_0^2}\right)\right)+4I_0\left(1-\cos\left(\frac{\pi\Delta\lambda\delta}{\lambda_0^2}\right)\right)}\right| = \left|\cos\left(\frac{\pi\Delta\lambda\delta}{\lambda_0^2}\right)\right| = \left|\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{\Delta\lambda}{2\lambda_0}\delta\right)\right|$$

Mesurer C permet donc de remonter au rapport $\lambda_0/\Delta\lambda$.

16/ Le constraste s'annule pour :

$$\frac{\pi\Delta\lambda\delta_p}{\lambda_0^2} = \frac{\pi}{2}+p\pi, \qquad p\in\mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \delta_p = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}\left(p+\frac{1}{2}\right), \qquad p\in\mathbb{N}$$

Pour la raie double H_α, la différence de marche minimale à mesurer est :

$$\delta_0 = \frac{\lambda_0^2}{2\Delta\lambda} = \frac{(655{,}9 \times 10^{-9})^2}{1{,}4 \times 10^{-11}} \approx 1{,}5 \text{ cm}$$

C’est tout à fait mesurable avec le dispositif présenté !

17/ Le circuit d’eau permet de refroidir le tube, afin d’obtenir un thermostat propice aux transferts thermiques.

Sur le graphique, la graduation est en Angströms.

Le spectre continu est probablement le spectre d'émission des molécules de dihydrogène. En effet, après dissociation, les atomes sont libres sont le spectre n’est plus quantifié. De même pour l’ionisation, l’électron peut être éjecté avec une énergie quelconque. En outre, le spectre moléculaire du dihydrogène s’étend vers l’ultraviolet, ce qui est cohérent avec les observations.

18/ Les bandes d’hydroxyle sont bien connues, et le spectre est très large, sans raies nettes et s’étend de l’UV au visible : l’HO peut donc servir d’étalonnage pour calibrer le spectre de l’hydrogène.

19/ Les raies sont décalées vers le bleu, car la masse réduite est plus élevée.

La longueur d’onde d’émission pour l’hydrogène est :

$$\lambda_H = \lambda_\infty \left(1 + \frac{m_e}{m_p}\right) \Rightarrow \lambda_\infty = \frac{\lambda_H}{1 + \frac{m_e}{m_p}}$$

La longueur d’onde d’émission pour le deutérium est :

$$\lambda_D = \lambda_H \frac{1 + \frac{m_e}{2m_p}}{1 + \frac{m_e}{m_p}} \approx \lambda_H \left(1 - \frac{m_e}{2m_p}\right)$$

La résolution spectrale est donc :

$$\Delta\lambda = |\lambda_H - \lambda_D| = \lambda_H \times \frac{m_e}{2m_p}$$

Pour l’application numérique, on écrit :

$$\Delta\lambda = \lambda_H \times \frac{m_e c^2}{2m_p c^2}$$

puis on utilise les valeurs données en début d’énoncé.

Pour la raie H_β, on trouve $\lambda_H \approx 500$ nm, soit $\Delta\lambda \approx 0{,}13$ nm.

20/ C’est un état stationnaire : la densité de probabilité associée ne dépend pas du temps. Le signe devant t et x est différent : la propagation se fait dans le sens des x croissants.

$$v_\phi = \frac{\omega(E)}{k(E)} = \frac{E/\hbar}{p(E)/\hbar} = \frac{E}{p(E)}$$

$$v_g = \left(\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right)^{-1} = \left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\omega}\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}E}\right)^{-1} = \frac{1}{p'(E)}$$

21/ On injecte la solution dans l'équation de Schrödinger :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(i\frac{p(E)}{\hbar}\right)^2 + V = i\hbar\left(-i\frac{E}{\hbar}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{p(E)^2}{2m} + V = E$$

$$\Rightarrow p(E) = \sqrt{2m(E-V)}$$

Enfin, la vitesse de groupe vaut :

$$v_g = \sqrt{\frac{2(E-V)}{m}}$$

On retrouve l'expression classique de l'énergie E : l'équation de Schrödinger est non relativiste.

22/ On fait de même avec l'équation de Klein-Gordon :

$$\hbar^2c^2\left(i\frac{p(E)}{\hbar}\right)^2 + \left(i\hbar\left(-i\frac{E}{\hbar}\right) - V\right)^2 = m^2c^4$$

$$\Rightarrow (E-V)^2 = p(E)^2c^2 + m^2c^4$$

On retrouve la relation impulsion/énergie relativiste !

23/ Voir cours. L'onde est évanescente dans la barrière de potentiel.

Les relations de continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée (discontinuité finie) permettent de calculer R et T.

On peut mettre ainsi en évidence l'effet tunnel : $T \neq 0$!

$|T|^2$ désigne la probabilité qu'a la particule de traverser la barrière.

24/ On écrit la fonction d'onde sous forme découplée :

$$\Psi(x,t) = \psi_0 e^{-i\frac{E}{\hbar}t}\phi(x)$$

On injecte cette solution dans l'équation de Klein-Gordon. Après simplification, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2} + \frac{q^2}{\hbar^2}\phi = 0$$

On résout :

$$\phi(x) = A\, e^{i\frac{q}{\hbar}x} + B e^{-i\frac{q}{\hbar}x}$$

On a une onde oscillante dans la zone $x \in [0, a]$.

23/ Le max de $|T|^2$ est 1 ! Il s'agit là d'une résonance quantique relativiste.

***

Merci à Antoine Pagot pour les questions 17 à 19.