

CCMP, Physique 2 MP 2025

Mesure et caractérisation du champ de pesanteur

Solutions proposées, sous toutes réserves, par Paul Roux

1 Mesure de la variation temporelle de g

1. On distingue une enveloppe d'oscillations entre les dates 57 126 et 57 139 donc $\tau_3 = 13\text{ j}$. Pendant cette durée on observe une oscillation principale dont la période est clairement $\tau_2 = 1\text{ j}$ et des oscillations un peu plus faibles chaque jour, de période $\tau_1 = 0,5\text{ j}$.

L'origine de ces oscillations est à rechercher dans l'influence de la Lune (τ_3 est une demi-période du mouvement apparent de la Lune) et dans la révolution propre de la Terre (périodes τ_2 et τ_1).

2. Un référentiel est galiléen si, relativement à celui-ci, un objet matériel ponctuel *isolé* persiste dans son état initial d'immobilité ou de mouvement rectiligne et uniforme : c'est la première loi de Newton.

Le référentiel de Copernic \mathcal{R}_0 est lié au barycentre du système solaire (donc en première approximation au centre du Soleil) et à trois directions pointant vers des étoiles lointaines, réputées sans mouvement propre.

Le référentiel géocentrique \mathcal{R}_g est lié au barycentre T de la Terre et aux mêmes trois directions fixes que celui de Copernic. Il est donc en translation relativement au référentiel de Copernic ; cette translation est celle du mouvement de T relativement à \mathcal{R}_0 .

3. Il suffit de remarquer que le mouvement du centre T de la Terre relativement au référentiel de Copernic n'est pas rectiligne et uniforme : il est en effet périodique, elliptique (et même quasiment circulaire dans ce qui suit). Ainsi \mathcal{R}_g n'est pas galiléen.

4. Le flux du champ de gravitation à travers une surface (S) géométriquement fermée (orientée vers l'extérieur)

est proportionnel à la masse M_{int} intérieure à cette surface :
$$\oint_{(S)} \vec{G} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{\text{int}}.$$

En un point M situé à l'extérieur de l'astre, la répartition de masse de l'astre (A) admet pour plans de symétrie tous les plans diamétraux passant par AM . Le champ de gravitation, qui a la même symétrie que les masses, est donc contenu dans l'intersection de tous ces plans et, utilisant des coordonnées sphériques de centre A , on peut donc écrire
$$\vec{G}_A(M) = \mathcal{G}_A(M) \vec{e}_r.$$

Cette répartition de masse est également invariante par toute rotation autour de A donc l'intensité $\mathcal{G}_A(M)$ ne dépend que de la distance $r = AM$,
$$\mathcal{G}_A(M) = \mathcal{G}_A(r).$$

On peut alors appliquer le théorème de Gauss à une sphère de centre A et de rayon r qui contient donc toute

la masse m_A de l'astre ; il vient $4\pi r^2 \mathcal{G}_A(r) = -4\pi G m_A$ donc
$$\vec{G}_A(M) = -\frac{G m_A}{r^2} \vec{e}_r \quad \text{ou} \quad \vec{G}_A(M) = -G m_A \frac{\vec{AM}}{\|\vec{AM}\|^3}.$$

5. T_M s'identifie justement à un jour, $T_M = 1\text{ j}$. La période apparente du mouvement de la Lune vue pour un observateur terrestre est proche de $T_L = 27\text{ j}$; celle du Soleil est elle-aussi pratiquement de l'ordre d'un jour, $T_S = 1\text{ j}$ (T_M est le jour sidéral et T_S le jour solaire, mais nous ne ferons pas la différence ici). Enfin,

$$\omega = \frac{2\pi}{T_M} \simeq 7 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}.$$

6. M est soumis aux forces de contact \vec{R} et aux forces gravitationnelles de la Terre et de l'astre (A), mais aussi aux pseudo-forces d'inertie dues au caractère non galiléen du référentiel géocentrique : il s'agit d'un référentiel en translation circulaire relativement à (\mathcal{R}_0) avec la vitesse et l'accélération du centre T du référentiel ; on peut donc écrire la force d'inertie d'entraînement
$$\vec{f} = -m\vec{a}(T/\mathcal{R}_0)$$
 et la force d'inertie de Coriolis est nulle.

Il nous faut alors faire l'étude du mouvement de la Terre dans le référentiel galiléen sous l'effet du champ de gravitation de l'astre (A) ; le théorème de la résultante cinétique (appliqué à la Terre) impose alors $m_T \vec{G}_A(T) =$

Note : ce résultat découle du fait que la résultante des forces de gravitation exercées sur la Terre, assimilée à une boule à symétrie de révolution, est la même que la force de gravitation exercée sur un point matériel qui concentrerait en T toute la masse m_T de la Terre. On peut établir ce résultat par une application de la troisième loi de Newton (principe des actions réciproques) et par une seconde application du théorème de Gauss.

La résultante des forces et pseudo-forces comprend donc $\boxed{\sum \vec{F} = \vec{R} + m \left(\vec{\mathcal{G}}_T(M) + \vec{\mathcal{G}}_A(M) - \vec{\mathcal{G}}_A(T) \right)}$.

Comme M est fixe relativement au sol son mouvement dans le référentiel géocentrique est celui d'une rotation uniforme de vitesse angulaire ω et d'axe Tz ; il a donc pour vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R}_g) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{TM}$ et pour accélération $\vec{a}(M/\mathcal{R}_g) = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{TM})$. Finalement le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel \mathcal{R}_g prend la forme $m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{TM}) = \vec{R} + m \left(\vec{\mathcal{G}}_T(M) + \vec{\mathcal{G}}_A(M) - \vec{\mathcal{G}}_A(T) \right)$ donc $\vec{R} + m\vec{g} = \vec{0}$ avec $\vec{g} = \vec{\mathcal{G}}_T(M) + \vec{\gamma}_0 + \vec{\gamma}_1$ où $\boxed{\vec{\gamma}_1 = \vec{\mathcal{G}}_A(M) - \vec{\mathcal{G}}_A(T)}$ et $\boxed{\vec{\gamma}_0 = -\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{TM})}$.

7. Ce terme $\vec{\gamma}_0$ (terme axifuge) est un terme constant (il intervient dans la moyenne locale \bar{g} mais pas dans la fluctuation variable δg) qui ne dépend que de la distance de M à l'axe de rotation (T, \vec{e}_z); il est en particulier nul aux pôles, maximal à l'équateur et finalement bien constant en un lieu donné.

8. Puisque δg_A est la variation par rapport à la valeur moyenne, les termes $\vec{\mathcal{G}}_T(M)$ et $\vec{\gamma}_0$ qui sont indépendants du temps disparaissent dans la définition de $\delta g_A = g - \bar{g}$. Finalement, en reprenant les notations de l'énoncé avec $\vec{u} = -\vec{e}_r$, l'écart dû à l'astre A est $f_A(t) = -\vec{e}_r \cdot \vec{\gamma}_1$ et $\boxed{\delta g_A = f_A(t) - \bar{f}_A}$ en notant \bar{f} la moyenne temporelle de f .

9. Du fait des résultats précédents, $\vec{\gamma}_1 = -Gm_A \left[\frac{\overrightarrow{AM}}{AM^3} - \frac{\overrightarrow{AT}}{AT^3} \right]$ où $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TM}$ et donc $AM^2 = AT^2 + TM^2 + 2AT \cdot TM \cos(\pi - \psi_A)$ qui s'écrit encore $AM^2 = d_A^2 + R_T^2 - 2d_A R_T \cos \psi_A$. Si on se limite à l'ordre 1, $\frac{1}{AM^3} = \frac{1}{d_A^3} \left[1 + 3 \frac{R_T}{d_A} \cos \psi_A \right]$ donc $\vec{\gamma}_1 = -\frac{Gm_A}{d_A^3} \left[(\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TM}) \left(1 + 3 \frac{R_T}{d_A} \cos \psi_A \right) - \overrightarrow{AT} \right]$ qui, au même ordre d'approximation, se réduit à $\boxed{\vec{\gamma}_1 = -\frac{Gm_A}{d_A^3} [\overrightarrow{TM} + \mu \overrightarrow{TA}]}$ à condition de poser $\boxed{\mu = -3 \frac{R_T}{d_A} \cos \psi_A}$, car le terme $\overrightarrow{TM} \cdot \frac{R_T}{d_A}$ est ici d'ordre deux en R_T/d_A .

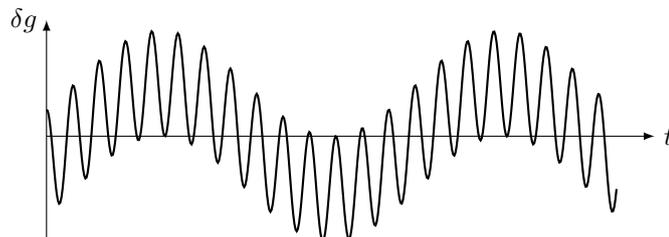
Comme enfin $\overrightarrow{TM} \cdot \vec{e}_r = R_T$ et $\overrightarrow{TM} \cdot \vec{e}_r = d_A \cos \psi_A$ on trouve $f_A = \frac{Gm_A R_T}{d_A^3} [1 - 3 \cos^2 \psi_A]$ mais la moyenne temporelle de $\cos^2 \psi_A$ est égale à $\frac{1}{2}$ au cours d'une rotation (apparente) de l'astre A autour de la Terre;

finalement, $\boxed{\delta g_A = \frac{3Gm_A R_T}{d_A^3} \left[\frac{1}{2} - \cos^2 \psi_A \right]}$.

10. La valeur demandée correspond au cas où $\psi_A = 0$ donc $\boxed{|\delta g_A| = \frac{3Gm_A R_T}{2d_A^3}}$ soit respectivement et numériquement

$\boxed{|\delta g_S| = \frac{3Gm_S R_T}{2d_S^3} = 4 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}^2}$, $\boxed{|\delta g_L| = \frac{3Gm_L R_T}{2d_L^3} = 9 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}^2}$, donc $\boxed{\kappa \simeq 2}$. Les valeurs absolues sont très faibles devant \bar{g} , ce qui explique la nécessité d'emploi d'un gravimètre de précision. Elles sont néanmoins comparables : la faible masse de la Lune est compensée par sa plus grande proximité (comme dans le cas des marées océaniques).

11. Si on suppose que M, L et S sont en permanence dans un même plan on peut proposer $\psi_L = \omega_L t$ et $\psi_S = \omega_S t$; l'expression de δg peut alors s'écrire $\delta g = \frac{1}{2} \delta g_S \cos(2\omega_S t) + \frac{1}{2} \delta g_L \cos(2\omega_L t + \Phi)$ d'où une somme de deux fonctions sinusoïdales, éventuellement déphasées, d'amplitude comparable et dont les périodes sont respectivement $T_S/2$ et $T_L/2$; on retrouve les périodes attendues mais pas la forme de la courbe :



2 Gravimètre à atomes froids

12. La relation de De Broglie s'écrit $p_\gamma = \frac{h}{\lambda_0} = 8,5 \cdot 10^{-26} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. L'énergie cinétique d'agitation thermique est

$\frac{3}{2} k_B T_0 = \frac{p_0^2}{2m}$ donc $p_0 = \sqrt{3mk_B T_0} = 2,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ en prenant $T_0 = 10^{-6} \text{ K}$. Les deux valeurs sont du même ordre de grandeur, ce qui est bien sûr inhabituel et dû à la très faible valeur de T_0 .

13. À l'instant $t = 0$ les conditions initiales seront $z_1 = 0 = z_2$ (par hypothèse) et $\dot{z}_1 = \frac{p_0}{m}$, $\dot{z}_2 = \frac{p_0 + p_\gamma}{m}$ (on fait en réalité l'hypothèse bizarre que l'agitation thermique est dirigée vers le bas, pour tous les atomes. On verra plus tard si cette hypothèse a de l'importance). Par la suite $\ddot{z}_1 = \ddot{z}_2 = g$ (l'axe (Oz) est orienté vers le bas) donc $\dot{z}_1 = \frac{p_0}{m} + gt$, $z_1 = \frac{p_0}{m}t + \frac{1}{2}gt^2$. On a donc $d_{1a} = \frac{p_0}{m}\tau + \frac{1}{2}g\tau^2$. De même $d_{2a} = \frac{p_0 + p_\gamma}{m}\tau + \frac{1}{2}g\tau^2$.

14. À l'instant τ avant l'interaction avec le faisceau, $\dot{z}_1 = \frac{p_0}{m} + g\tau$ et $\dot{z}_2 = \frac{p_0 + p_\gamma}{m} + g\tau$; après l'interaction avec le faisceau on trouve $\dot{z}_1 = \frac{p_0 + p_\gamma}{m} + g\tau$ et $\dot{z}_2 = \frac{p_0}{m} + g\tau$. Intégrant alors à nouveau $\ddot{z}_1 = \ddot{z}_2 = g$ on trouve au cours du temps t' écoulé depuis cet événement, $\dot{z}_1 = \frac{p_0 + p_\gamma}{m} + g(\tau + t')$ et $\dot{z}_2 = \frac{p_0}{m} + g(\tau + t')$ donc aussi $z_1 = z_1(\tau) + \frac{p_0 + p_\gamma}{m}t' + g\left(\tau t' + \frac{1}{2}t'^2\right)$ et $z_2 = z_2(\tau) + \frac{p_0}{m}t' + g\left(\tau t' + \frac{1}{2}t'^2\right)$ donc les distances parcourues entre $t' = 0$ et $t' = \tau$ sont $d_{1b} = \frac{p_0 + p_\gamma}{m}\tau + \frac{3}{2}g\tau^2$ et $d_{2b} = \frac{p_0}{m}\tau + \frac{3}{2}g\tau^2$.

À l'instant 2τ on a donc $d_{1a} + d_{1b} = d_{2a} + d_{2b}$: les deux paquets d'onde occupent la même position. On a alors $z_0 = \frac{2p_0 + p_\gamma}{m}\tau + 2g\tau^2$.

15. La force $\vec{F} = mg\vec{e}_z$ dérive de $V(z)$ telle que $mg = -\frac{dV}{dz}$ donc $V(z) = -mgz$ avec cette origine et cette orientation de l'axe (Oz) . La conservation de l'énergie mécanique s'écrit $E = \frac{1}{2m}p^2(z) - mgz$.

16. Reportant $\psi(z, t) = \phi(z)\zeta(t)$ et divisant par $\psi(z, t)$ on trouve $i\hbar\frac{1}{\zeta}\frac{d\zeta}{dt} = V(z) - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\phi}\frac{d^2\phi}{dz^2}$. Cette identité de deux fonctions de variables t et z indépendantes ne peut être réalisée que si les deux termes sont égaux à une même constante (*a priori* complexe) qu'on notera E ; on a donc $i\hbar\frac{1}{\zeta}\frac{d\zeta}{dt} = E$ donc aussi $\zeta(t) = \zeta_0 \exp\left[-i\frac{E}{\hbar}t\right]$ donc aussi (en intégrant la constante ζ_0 dans la fonction $\phi(z)$), $\psi(z, t) = \phi(z) \exp\left[-i\frac{E}{\hbar}t\right]$. La densité de probabilité $|\psi(z, t)|^2$ est, pour une solution stationnaire, nécessairement constante, ce qui n'est possible que si $E \in \mathbb{R}$.

17. Si $\phi(z) = \phi_0 \exp\left[\frac{i}{\hbar}\sigma(z)\right]$ alors $\frac{d\phi}{dz} = \frac{i}{\hbar}\sigma'(z)\phi(z)$ donc $\frac{d^2\phi}{dz^2} = \left[\frac{i}{\hbar}\sigma''(z) - \frac{\sigma'^2(z)}{\hbar^2}\right]\phi(z)$. Reportant dans l'équation de Schrödinger il vient $E - V(z) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{i}{\hbar}\sigma''(z) - \frac{\sigma'^2(z)}{\hbar^2}\right]$ soit aussi $2m[E - V(z)] = \frac{\hbar}{i}\sigma'' + \sigma'^2$. Posant alors $\sigma = \sigma_0(z) + \frac{\hbar}{i}\sigma_1(z)$ l'équation précédente fournit $\hbar^2 k^2(z) = \frac{\hbar}{i}\sigma_0''(z) - \hbar^2\sigma_1''(z) + \sigma_0'^2(z) + 2\frac{\hbar}{i}\sigma_0'(z)\sigma_1'(z) - \hbar^2\sigma_1'^2(z)$ donc en se limitant aux termes du premier ordre, $\hbar^2 k^2(z) = -i\hbar\sigma_0''(z) + \sigma_0'^2(z) - 2i\hbar\sigma_0'(z)\sigma_1'(z)$ dont les parties réelle et imaginaire fournissent respectivement $\sigma_0'(z) = \pm\hbar k(z)$ et $\sigma_0''(z) = 2\hbar\sigma_0'(z)\sigma_1'(z)$. La première équation s'intègre immédiatement en $\sigma_0(z) = \pm\int_0^z \hbar k(u)du + A$ tandis que la seconde s'écrit aussi $\sigma_1'(z) = -\frac{1}{2k(z)}\frac{dk}{dz}$ qui s'intègre en $\sigma_1(z) = B + \ln\sqrt{k(z)}$; A et B sont des constantes d'intégration réelles. Finalement $\exp\left[\frac{i}{\hbar}\sigma(z)\right] = \frac{1}{\sqrt{k(z)}} \exp\left[\pm i\int_0^z k(u)du\right] \exp\left(B + \frac{iA}{\hbar}\right)$ qu'on peut effectivement recopier sous la forme $\phi_\pm(z) = \frac{\Phi_0}{\sqrt{k(z)}} \exp\left[\pm i\int_0^z k(u)du\right]$. Lors de la propagation, le terme de phase $\varphi(z)$ doit être croissant pour que l'onde $\exp\left[i\left(\varphi(z) - \frac{Et}{\hbar}\right)\right]$ soit bien une onde se propageant dans le sens des z croissants; on ne peut

donc conserver que $\phi_+(z) = \frac{\Phi_0}{\sqrt{k(z)}} \exp \left[+i \int_0^z k(u) du \right]$. Dans le cas particulier où $k(z) = k_0 = \sqrt{2m(E - V_0)}$

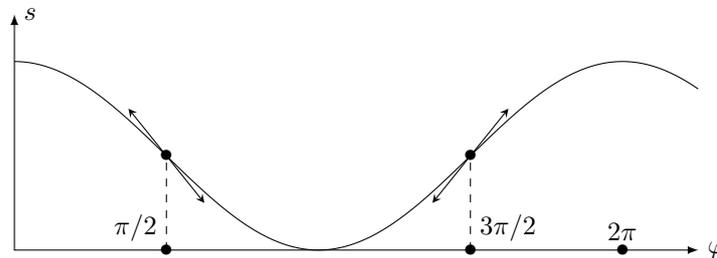
est constant, l'onde s'écrit $\phi_0(z) = \frac{\Phi_0}{\sqrt{k_0}} \exp [+ik_0z]$; l'onde est alors plane progressive et monochromatique.

18. La longueur d'onde de De Broglie est $\lambda_{dB} = \frac{h}{p}$. Ici l'expression $E = V(z) + \frac{p^2}{2m}$ $p = \hbar k$ donc aussi (comme si on généralisait les propriétés des ondes planes progressives) $\lambda_{dB}(z) = \frac{2\pi}{k(z)}$. L'approximation de l'énoncé consiste à considérer que les variations de $k(z)$ sont assez lentes, soit $\left| \frac{d\lambda_{dB}}{dz} \right| \ll 1$.

19. Au début de la phase a , $k_{1a} = \frac{p_0}{\hbar}$ et $k_{2a} = \frac{p_0 + p_\gamma}{\hbar}$ tandis que, au début de la phase b , $k_{1b} = \frac{p_0 + p_\gamma}{\hbar}$ et $k_{2b} = \frac{p_0}{\hbar}$. La phase a correspond à des parcours respectifs distincts d_{1a} et d_{1b} donc $\varphi_{1a} = k_{1a}d_{1a}$ et $\varphi_{2a} = k_{2a}d_{2a}$ soit un premier déphasage $\varphi_{2a} - \varphi_{1a} = g \frac{p_\gamma \tau^2}{2\hbar} + \frac{\hbar\tau}{m} [p_\gamma^2 + 2p_0 p_\gamma]$. Pendant le seconde phase un calcul analogue fournit $\varphi_{2b} - \varphi_{2a} = -g \frac{3p_\gamma \tau^2}{2\hbar} - \frac{\hbar\tau}{m} [p_\gamma^2 + 2p_0 p_\gamma]$. Finalement le déphasage total des deux paquets d'onde est $\varphi = -g \frac{p_\gamma \tau^2}{\hbar}$ avec $p_\gamma = \frac{h}{\lambda_0}$ donc $\varphi = \mu g$ avec $\mu = -2\pi \frac{\tau^2}{\lambda_0} = 3,2 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^2$.

20. L'onde de matière au point de mesure est la somme de deux termes de même amplitude et déphasés de φ , soit $\psi = \psi_0 (1 + e^{i\varphi})$; la probabilité de présence est proportionnelle à $|\psi|^2$ d'où le terme interférentiel à deux ondes $s = s_0 f(\varphi)$ avec $f(\varphi) = \frac{1 + \cos \varphi}{2}$.

21. $\varphi = \mu g$ donc $\delta\varphi = -\mu\delta g$ ou une précision $\Delta\varphi = 10^{-9} |\mu| g = 3,2 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$. Il faut se placer dans un domaine où les variations de s sont les plus importantes (en valeur absolue) donc (cf. figure) pour $\varphi = \pi/2$ ou $3\pi/2$.



22. On doit maintenant faire le calcul exact de $\varphi_{2a} = \int_0^{d_{2a}} k_2(z) dz$ avec $k_2 = \frac{1}{\hbar} p(t)$ et $\frac{p^2}{2m} - mgz = E = \frac{(p_0 + p_\gamma)^2}{2m}$. Il reste $\varphi_{2a} = \frac{1}{\hbar} \int_0^{d_{2a}} \sqrt{(p_0 + p_\gamma)^2 + 2m^2gz} dz$ On remarque alors que $\int \sqrt{a + bz} dz = \frac{2}{3b} (a + bz)^{3/2}$ donc $\varphi_{2a} = \frac{1}{3\hbar m^2 g} \left[((p_0 + p_\gamma)^2 + 2m^2gz)^{3/2} \right]_0^{d_{2a}}$. On identifie directement cette expression (et celle de φ_{1a} qui se calcule de la même manière) avec celle de l'énoncé à condition de poser $K = \frac{1}{3\hbar m^2 g}$ et $\nu = 2m^2 g$.

23. L'approximation faite plus haut découlerait de la condition $\frac{m^2 g d_{1a}}{p_0^2} \ll 1$. Ici $d_{1a} = \frac{p_0}{m} \tau + \frac{g\tau^2}{2} \simeq 1,3 \text{ cm}$ donc $\frac{m^2 g d_{1a}}{p_0^2} \simeq 4 \cdot 10^2$: l'approximation n'est pas du tout légitime. Il faudrait poursuivre et compléter le calcul de la question précédente pour en déduire la vraie expression du déphasage, qui reste pourtant vraisemblablement proportionnel à g .