MINES PSI 2025 - PHY 2

Rothlingshofer Yanic

Contact : Pour toute remarque, suggestion ou signalement d'erreur : yrothlin-24@telecom-paris.fr.

Remarque : Ce document peut contenir des coquilles ou des inexactitudes (fautes de signes, inattentions, etc.). Merci de ne pas tout prendre au pied de la lettre et de me faire part de vos retours (il a été rédigé juste après l'épreuve donc dans la précipitation). Ce document sert principalement à fournir des pistes qu'à prétendre fournir une correction exacte (même si j'essaie d'être le plus rigoureux possible).

Partie 1. Oscillateur mécanique

1. La force de Hooke s'écrit $\vec{F} = -k(l(t) - l_0)\vec{e}_z$. Puis :

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\mathcal{E}_{p,k} \iff \frac{d\mathcal{E}_{p,k}}{dz} = k(l(t) - l_0)$$

avec $z(t) = l(t)$ (avec les conventions d'origine du sujet), on a :

$$\mathcal{E}_{p,k} = \int_{l_0}^l k(z - l_0)dz = \frac{1}{2}k[(z - l_0)^2]_{l_0}^l = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$$

2. En appliquant le même raisonnement avec la force de pesanteur, on a $\mathcal{E}_{p,p} = -mgl(t)$ avec la convention $\mathcal{E}_{p,p}(0) = 0$.
3. Dans le référentiel $\mathcal{R}$, le point matériel P qui subit le potentiel de pesanteur et le potentiel élastique du ressort, on a :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{l}(t)^2 + \frac{1}{2}k(l(t) - l_0)^2 - mgl(t)$$

4. On néglige les frottements et donc ce point n'est soumis qu'à des forces conservatives et il y a donc conservation de l'énergie mécanique :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0 = m\ddot{l}(t)\dot{l}(t) + k\dot{l}(t)(l(t) - l_0) - mg\dot{l}(t)$$

Puisque $\dot{l}$ n'est pas la fonction identiquement nulle (pas d'intérêt, ressort à l'équilibre), on obtient :

$$\ddot{l} + \frac{k}{m}l(t) = g + \frac{kl_0}{m} \iff \ddot{l} + \omega_0^2 l = g + \frac{kl_0}{m}$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

5.
 - Solution particulière : $l_p = l_0 + \frac{mg}{k}$.
 - Solution homogène (cours) : $l_h(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$.

On a alors :

$$l(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + l_0 + \frac{mg}{k}$$

avec $l(0) = L = A + l_0 + \frac{mg}{k}$ et $\dot{l}(0) = 0 = B$. D'où :

$$l(t) = (L - l_0 - \frac{mg}{k}) \cos(\omega_0 t) + l_0 + \frac{mg}{k}$$

La valeur minimale de cette expression vaut $l_{min} = -(L - l_p) + l_p$ et $l_{min} > 0$ signifie $L < 2l_0$. On a alors un mouvement d'oscillation du point matériel autour de la position d'équilibre, d'amplitude $L - l_p$. Puis $T_0 \simeq 2s$.

6. Soit $\lambda = m_r/l$ la masse linéique du ressort constante. On considère une tranche du ressort de hauteur dz et de masse $\delta m = \lambda dz$. La force de pesanteur subit par ce tronçon de ressort vaut $\delta m g \vec{e}_z$ (attention au sens). D'où :

$$\frac{d(\delta \mathcal{E}_{p,p})}{dz} = -\delta m g$$

puis en intégrant entre 0 et z , on obtient :

$$\delta \mathcal{E}_{p,p} = -\delta m g z = -\lambda g z dz$$

puis en intégrant entre 0 et l , on obtient :

$$\mathcal{E}_{p,p}(l) = -\frac{1}{2} \lambda g l^2 = -\frac{1}{2} m_r g l$$

(Remarque : c'est un raisonnement avec les mains qui n'est pas faux en soit mais qui n'est pas une preuve mathématique rigoureuse, ici on confond $\delta \mathcal{E}_{p,p}$ avec $d\mathcal{E}_{p,p}$ qui n'ont pas nécessairement les mêmes sens. Le raisonnement est valable tant qu'on concède ses limitations).

7. On considère toujours une tranche dz de ressort pour $z \in [0, l]$ (à l fixé). La manière la plus de procédé est d'écrire la vitesse d'une tranche d'altitude z en fonction de la vitesse du ressort ramenée par unité de longueur du ressort. On a :

$$\dot{z} = \frac{\dot{l}}{l} z$$

D'où :

$$d\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} \delta m \dot{z}^2 = \frac{1}{2} \lambda \frac{\dot{l}^2}{l^3} z^2 dz$$

puis en intégrant pour z entre 0 et l , on obtient :

$$\mathcal{E}_c(l) = \frac{1}{6} \lambda l \dot{l}^2 = \frac{m_r}{6} \dot{l}^2$$

8. On a :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_m^{ressort} + \mathcal{E}_m^P = \frac{m_r}{6} \dot{l}^2 + \frac{1}{2} k (l - l_0)^2 - \frac{1}{2} m_r g l + \frac{1}{2} m \dot{l}^2 + m g l$$

Soit en factorisant :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} \left(\frac{m_r}{3} + m \right) \dot{l}^2 - g l \left(\frac{m_r}{2} + m \right) + \frac{1}{2} k (l - l_0)^2$$

9. Toujours en appliquant la conservation de l'énergie mécanique, on a :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0$$

d'où l'on sort :

$$\left(\frac{m_r}{3} + m \right) \ddot{l} + k l = k l_0 + g \left(\frac{m_r}{2} + m \right)$$

Cette équation a la même forme que l'équation trouvée Q4 si ce n'est qu'on prend en compte la masse du ressort qui ralentit l'ensemble.

10. On pose $M_{eff} = \frac{m_r}{3} + m$ (masse inertiel) et $M_g = \frac{m_r}{2} + m$ (masse pesante), on a :

$$\ddot{l} + \omega_1^2 l = \frac{k l_0}{M_{eff}} + g \frac{M_g}{M_{eff}}$$

La résolution étant essentiellement similaire à la question 5, on donne le résultat :

$$l(t) = (L - l_{eq}) \cos(\omega_1 t) + l_{eq}$$

avec $l_{eq} = l_0 + \frac{g M_g}{k}$ et $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M_{eff}}}$. Finalement, on obtient facilement $\omega_1 = \omega_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{m_r}{3m}}}$ que :

$$T_1 = T_0 \sqrt{1 + \frac{m_r}{3m}}$$

A.N : on trouve $T_1 \simeq 2,04$ s.

11.

$$\frac{|T_1 - T_0|}{T_0} < 0.01 \iff m_r < 0.06m$$

avec $\sqrt{1 + \frac{m_r}{3m}} \simeq 1 + \frac{m_r}{6m}$.

12. Si m_r nulle on néglige les potentiels associés au ressort et comme le point P se déplace dans une glissière orthogonale à la direction d'application de la force de pesanteur, nous n'avons pas non plus d'énergie potentielle de pesanteur. Ainsi le seul potentiel correspond à celui exercé par le ressort. On a la force de Hooke $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{e}_l$ avec $\vec{e}_l$ colinéaire à $\vec{OP}$ et $l = \sqrt{l_c^2 + x^2}$. En se plaçant un axe z' sur l'axe du ressort, on obtient le même résultat qu'en Q1 :

$$\mathcal{E}_{p,P}(x) = \frac{1}{2}k(\sqrt{l_c^2 + x^2} - l_0)^2$$

13. On a :

$$\frac{d\mathcal{E}_{p,P}}{dx} = kx \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{l_c^2 + x^2}}\right) \quad \text{et} \quad \frac{d^2\mathcal{E}_{p,P}}{dx^2} = k \left(1 - \frac{l_0 l_c^2}{(l_c^2 + x^2)^{3/2}}\right)$$

Les positions d'équilibre correspondent aux points d'annulation de la dérivée du potentiel. Ces points sont $x = 0$ (trivial) et :

$$x^2 = l_0^2 - l_c^2$$

Notons déjà que cela implique nécessairement $|l_c| \leq |l_0|$. Puis $x_{1,2} = \pm\sqrt{l_0^2 - l_c^2}$. Il y a symétrie par rapport à O' donc les comportements sont les mêmes et on n'étudie que le point $x_1 = \sqrt{l_0^2 - l_c^2}$. On a :

$$\frac{d^2\mathcal{E}_{p,P}}{dx^2}(x_1) = k \left(1 - \left(\frac{l_c}{l_0}\right)^2\right)$$

Ainsi x_1 est un point d'équilibre stable si et seulement si $l_c < l_0$.

- Pour finir l'analyse, si $l_0 < l_c$, 0 est le seul point d'équilibre et stable, ($\mathcal{E}_{p,P}(x)$ est strictement convexe).
- Si $l_0 > l_c$, alors 0 est un point d'équilibre instable (maximum de la fonction) et on a deux points d'équilibres stables symétriques par rapport à 0 donnés précédemment.

14. Si l'on est dans le cas $l_0 > l_c$ qui est le seul cas intéressant, on a deux minima en $x_e = \pm\sqrt{l_0^2 - l_c^2}$ et en $x = 0$ on a un maximum de potentiel. Pour passer d'un minimum à l'autre il faut franchir le gap d'énergie (il faut fournir suffisamment d'énergie pour sortir du puit et remonter au moins jusqu'à l'énergie nécessaire pour être en 0) qui vaut $U_b = \mathcal{E}_{p,P}(0) - \mathcal{E}_{p,P}(x_e) = \frac{1}{2}k(l_0 - l_c)^2$.

15. Toujours des forces conservatives, on applique la conservation de l'énergie mécanique et on obtient :

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m} \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{l_c^2 + x^2}}\right) x = 0$$

$\frac{d\mathcal{E}_{p,P}}{dx}x$ représente l'opposé de la force appliquée sur le point P par le ressort.

16. En appliquant le changement de variable de l'énoncé, on a :

$$\begin{cases} \frac{du_0}{dt} = u_1 \\ \frac{du_1}{dt} = -\frac{k}{m} \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{l_c^2 + u_0^2}}\right) u_0 \end{cases}$$

Puis en discrétisant selon un schéma d'Euler explicite, on obtient :

$$\begin{cases} u_{0,n+1} = u_{0,n} + \Delta t u_{1,n} \\ u_{1,n+1} = u_{1,n} - \frac{k}{m} \Delta t \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{l_c^2 + u_{0,n}^2}}\right) u_{0,n} \end{cases}$$

avec $u_{0,0} = L > 0$ et $u_{1,0} = 0$.

17. • Cas B : On commence à $x_0 > 0$ avec une énergie qui n'est pas suffisante pour franchir la barrière de potentielle et donc on a un mouvement d'oscillation autour du point d'équilibre correspondant au puit de potentiel de droite (pour $x > 0$).

- Cas A : On commence comme dans le cas B à $x_0 > 0$ mais cette fois l'énergie est suffisante pour franchir la barrière de potentielle en $x = 0$. C'est pour ça qu'on observe toujours un mouvement d'oscillation mais beaucoup plus large et on peut voir sur le graphe de vitesse que la vitesse diminue et présente une dérivée nulle lorsque le point P arrive 0, l'oscillation n'est pas linéaire mais saccadée. Le point accélère pour sortir d'un des puits puis ralentit en arrivant en 0, franchit la barrière de potentielle puis accélère à nouveau pour tomber dans l'autre puits et ainsi de suite.

18. j'ai mis facilement 20 min pour celle là (40 pour les 17 premières) On a vu que les oscillations se font autour de la position d'équilibre que l'on a déterminée théoriquement précédemment valant $x_e = \sqrt{l_0^2 - l_c^2} \simeq 0,98\text{m}$ d'après les données de l'énoncé. De plus graphiquement la valeur moyenne vaut $\frac{x_{max} + x_{min}}{2} \simeq 0,98\text{m}$ ce qui est bien cohérent. Ici on ne peut pas reprendre l'équation différentielle précédente et simplifier car comme on oscille autour de $x_e \simeq l_0$, on n'obtiendrait pas de résultat satisfaisant. Considérons de petites oscillations d'amplitude ξ autour du point x_e , on a (développement de Taylor) :

$$\mathcal{E}_p(x_e + \xi) = \mathcal{E}_p(x_e) + 0 + \frac{\mathcal{E}_p''(x_e)}{2} \xi^2$$

On en déduit que localement autour du point x_e , on a $k_{eff} = \mathcal{E}_p''(x_e) = k(1 - \frac{l_c^2}{l_0^2})$. Puis, on obtient :

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k_{eff}}{m}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{l_c^2}{l_0^2}}$$

d'où :

$$T_2 = T_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{l_c^2}{l_0^2}}}$$

A.N : $T_2 \simeq 2,04\text{s}$ ce qui correspond bien à la lecture graphique.

19. On a vu que l'énergie de gap vaut :

$$U_b = \frac{1}{2}k(l_0 - l_c)^2$$

puis pour le cas A il faut $\mathcal{E}_p(t=0) = \frac{1}{2}k(\sqrt{l_c^2 + X_0^2} - l_0)^2 > U_b$ (car il n'y a pas de perte). Soit

$$\sqrt{l_c^2 + X_0^2} - l_0 > l_0 - l_c$$

En effet pour être dans le cas A, on sait que l'on va devoir s'écarter assez largement du point d'équilibre x_e donc $X_0 > x_e$ et $l_c^2 + X_0^2 > l_0$. D'où l'on tire :

$$\sqrt{l_c^2 + X_0^2} > 2l_0 - l_c \iff X_0 > 2\sqrt{l_0(l_0 - l_c)}$$

20. On remarque que les graphiques tracés correspondent bien à des fonctions cubiques. Pour la justification, je ne vois pas comment faire simplement sans le faire qualitativement donc c'est ce que je vais faire. Il est facile de voir que $\beta_m > 0$ peu importe l_c . En suite si $l_c < l_0$, on observe un max et un min dans le graphe de $\frac{d\mathcal{E}_p}{dx}$, la fonction est concave et convexe et 0 est un point d'inflexion (aucun intérêt comme remarque) qui correspond bien au point d'équilibre instable. Puis, en 0, c'est le terme $\alpha_m x$ qui domine et donc on voit bien que dans le cas $l_c < l_0$, $\frac{d\mathcal{E}_p}{dx}$ est positive lorsque $x < 0$ donc α_m est négatif. De même si $l_c \geq l_0$, on a $\alpha_m > 0$.

Ensuite, on intègre et on obtient :

$$\mathcal{E}_{p,P}(x) = \frac{1}{2}\alpha_m x^2 + \frac{1}{4}\beta_m x^4 + \mathcal{E}_{p,P}(0)$$

et donc :

$$m\ddot{x}x + \alpha_m \dot{x}x + \beta_m \dot{x}x^3 = 0$$

d'où :

$$\ddot{x} + \frac{\beta_m}{m}x^3 + \frac{\alpha_m}{m}x = 0$$

Oscillateur électrique

Rien de "très" compliqué, il s'agit juste de cours et de gros calculs où il faut être rigoureux sur les notations que l'on pose (sens des courants, tension,...)