Forêts de factorisation

Le sujet comporte 12 pages, numérotées de 1 à 12.

Préliminaires

Étant donnés deux ensembles A et B, on note B^A l'ensemble des fonctions de A dans B.

Dans ce sujet, un **alphabet** est toujours un ensemble fini dont les éléments sont appelés des **lettres**. Étant donné un alphabet Σ, on notera Σ^* l'ensemble des mots finis sur Σ. On notera le mot vide par ε. On notera aussi Σ^+ l'ensemble des mots finis **non vides** sur Σ. On notera $u \cdot v$ la concaténation des mots $u, v \in \Sigma^*$. La longueur d'un mot u sera notée $|u|$.

On notera $u[1], \ldots, u[n]$ les lettres d'un mot u de longueur n. Pour tous indices $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, on notera $u[i, \ldots, j]$ le mot formé des lettres $u[i], \ldots, u[j]$. On dit qu'un mot x est un **facteur** de u s'il existe des indices i et j tels que $x = u[i, \ldots, j]$.

⚠ On notera bien que dans ce sujet, les mots sont indicés à partir de 1 et que le facteur $w[i, \ldots, j]$ d'un mot w contient la lettre $w[i]$ et la lettre $w[j]$.

Exemple 1. Sur l'alphabet $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$, le mot $u = \mathtt{aaba}$ est de longueur $|u| = 4$. Ses lettres sont $u[1] = \mathtt{a}$, $u[2] = \mathtt{a}$, $u[3] = \mathtt{b}$ et $u[4] = \mathtt{a}$. Le facteur $u[1, \ldots, 4]$ est le mot u lui-même, le facteur $u[2, \ldots, 3]$ est le mot $\mathtt{ab}$ et le facteur $u[2, \ldots, 4]$ est le mot $\mathtt{aba}$.

Lorsque du code est demandé, on écrira la solution en pseudo-code ou dans un langage de programmation au choix de la candidate ou du candidat. On pourra s'inspirer de la syntaxe suivante, donnée à titre indicatif.

Fonction PremiersFibonacci(n)

```
1 début
2     fib ← tableau de n entiers initialisés
3     fib[1] ← 1
4     fib[2] ← 1
5     pour tous les k allant de 3 à n faire
6         fib[k] ← fib[k − 2] + fib[k − 1]
7     renvoyer fib
```

Les parties I et II sont à traiter en premier. Les parties III, IV et V sont indépendantes et peuvent être traitées dans n'importe quel ordre.

Partie I. Semi-groupes

Un **semi-groupe** $(S, \cdot)$ est un magma associatif, c'est-à-dire un ensemble S muni d'une loi interne « $\cdot$ » associative : $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ pour tous $a, b, c \in S$. Un semi-groupe $(S, \cdot)$ est dit **fini** si l'ensemble S est fini. La **taille** d'un semi-groupe fini $(S, \cdot)$ est le cardinal $|S|$ de S. Dans la suite, on notera l'opération « $\cdot$ » sous forme multiplicative, c'est-à-dire $a \cdot b = ab$. Notons que tout groupe est un semi-groupe. Voici d'autres exemples de semi-groupes.

Exemple 2. L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels muni de la multiplication est un semi-groupe. Ce même ensemble $\mathbb{N}$ muni de l'addition est aussi un semi-groupe.

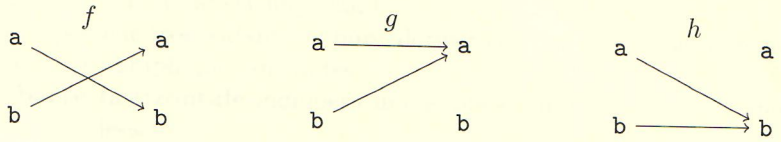
Exemple 3. Soit Σ un alphabet. L'opération de concaténation sur les mots est associative. Ainsi, $(\Sigma^*, \cdot)$ et $(\Sigma^+, \cdot)$ sont des semi-groupes. Dans la suite, ces semi-groupes seront notés Σ^* et Σ^+ respectivement.

On dit qu'un élément x d'un semi-groupe S est **neutre** (ou **identité**) si $xy = yx = y$ pour tout $y \in S$. On dit qu'un élément e d'un semi-groupe S est **idempotent** si $e^2 = e$. Tout élément identité est idempotent mais l'inverse n'est pas nécessairement vrai.

Question 1. Montrer que dans tout semi-groupe, s'il existe un élément neutre alors il est unique.

Soit X un ensemble. On note $T(X)$ le semi-groupe $(X^X, \fatsemi)$ où $\fatsemi$ est définie pour tous $f, g \in X^X$ par $f \fatsemi g = g \circ f$ (ainsi, $f \fatsemi g$ est la fonction qui à $x \in X$ associe $g(f(x)) \in X$). On prêtera attention à l'ordre de composition inversé par rapport à $\circ$. On appelle $T(X)$ le **semi-groupe de transition sur** X.

Exemple 4. Soit $X = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$. On peut remarquer que $T(X) = \{\mathrm{id}, f, g, h\}$ est un semi-groupe, où id est la fonction identité, $f(\mathtt{a}) = \mathtt{b}$ et $f(\mathtt{b}) = \mathtt{a}$, $g(\mathtt{a}) = g(\mathtt{b}) = \mathtt{a}$, et $h(\mathtt{a}) = h(\mathtt{b}) = \mathtt{b}$.



Question 2. Montrer que dans l'exemple précédent, id est neutre, et g est idempotent mais pas neutre.

On note $\mathbb{B}$ le sous-ensemble $\{\mathrm{id}, f\}$ de $T(X)$, où f et X sont définis comme dans l'exemple 4.

Question 3. Montrer que $(\mathbb{B}, \fatsemi)$ est un semi-groupe dont on donnera la table de multiplication.

Dans toute la suite, on identifiera $\mathbb{B}$ avec l'ensemble des booléens $\{0, 1\}$, en identifiant « 0 » avec id et « 1 » avec f. On remarque alors que la loi interne $\fatsemi$ est l'opérateur « OU exclusif », noté $\oplus$ et défini par $1 \oplus 0 = 0 \oplus 1 = 1$ et $0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0$.

Soient $(S, \cdot)$ et $(T, \star)$ deux semi-groupes. Un **morphisme** de semi-groupe est une application $\phi : S \to T$ qui préserve la loi interne : $\phi(x \cdot y) = \phi(x) \star \phi(y)$ pour tous $x, y \in S$.

Exemple 5. Soit $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$. La fonction $\Psi_{\mathtt{a}} : \Sigma^* \to (\mathbb{B}, \oplus)$ est définie pour tout mot $w \in \Sigma^*$ par

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathtt{a}}(\varepsilon) &= 0, \\ \Psi_{\mathtt{a}}(w\mathtt{a}) &= \Psi_{\mathtt{a}}(w) \oplus 1, \\ \Psi_{\mathtt{a}}(w\mathtt{b}) &= \Psi_{\mathtt{a}}(w). \end{aligned}$$

On admettra que $\Psi_{\mathtt{a}}$ est un morphisme de semi-groupe.

Question 4. Montrer que $\Psi_{\mathtt{a}}(w) = 0$ si, et seulement si, w contient un nombre pair de $\mathtt{a}$.

Soit $\mathcal{A} = (Q, q_0, \delta, F)$ un automate fini déterministe (AFD). On suppose sans perte de généralité que l'automate est complet, c'est-à-dire que la fonction de transition est de la forme $\delta : Q \times \Sigma \to Q$. On étend δ en une fonction $\delta^* : Q \times \Sigma^* \to Q$ définie récursivement par $\delta^*(q, \varepsilon) = q$ et $\delta^*(q, w\sigma) = \delta(\delta^*(q, w), \sigma)$ pour tous $q \in Q$, $w \in \Sigma^*$ et $\sigma \in \Sigma$. On admettra l'identité suivante : pour tous $u, v \in \Sigma^*$ et $q \in Q$,

$$\delta^*(q, uv) = \delta^*(\delta^*(q, u), v). \tag{1}$$

On note L le langage reconnu par l'automate $\mathcal{A}$. On pose

$$T(\mathcal{A}) = T(Q), \qquad F' = \{f \in Q^Q : f(q_0) \in F\}.$$

De plus, on définit une fonction $\psi : \Sigma^* \to T(\mathcal{A})$ comme suit. Étant donné un mot $w \in \Sigma^*$, on définit $\psi(w) \in T(\mathcal{A})$ comme étant la fonction de Q vers Q qui à $q \in Q$ associe $\delta^*(q, w)$. Ainsi, $\psi(w)(q) = \delta^*(q, w)$.

Question 5. Montrer que ψ est un morphisme de semi-groupe de Σ^* dans $T(\mathcal{A})$.

Question 6. Montrer que $\psi^{-1}(F') \subseteq L$.

Question 7. Montrer que $L \subseteq \psi^{-1}(F')$.

On a donc $L = \psi^{-1}(F')$. Dans toute la suite, on admettra le résultat suivant qui établit une correspondance entre langages réguliers et semi-groupes finis.

Lemme 1. Soit Σ un alphabet. Un ensemble $L \subseteq \Sigma^*$ est un langage régulier si et seulement s'il existe un semi-groupe fini $(S, \cdot)$, un ensemble $F \subseteq S$ et un morphisme de semi-groupe $\phi : \Sigma^* \to S$ tels que $\phi^{-1}(F) = L$.

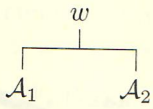
Partie II. Forêts de factorisation

Soit Σ un alphabet, $(S, \cdot)$ un semi-groupe et $\phi : \Sigma^+ \to S$ un morphisme de semi-groupe.

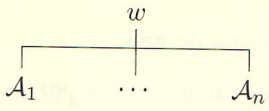
Un **arbre de factorisation** d'un mot $w \in \Sigma^+$ (pour ϕ) est un arbre étiqueté par Σ^+qui satisfait les conditions suivantes.

1. L'arbre de factorisation d'une lettre $\sigma \in \Sigma$ est constitué d'une racine sans enfants étiquetée par cette lettre σ :

2. Considérons un mot $w = w_1 w_2$, avec $w_1, w_2 \in \Sigma^+$ non vides. Soient $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ des arbres de factorisation de w_1 et w_2 respectivement. Alors l'arbre dont la racine est étiquetée par $w = w_1 w_2$ et qui possède deux enfants $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$, est un arbre de factorisation de w :



3. **Règle de l'idempotence :** Considérons un mot $w = w_1 \cdots w_n$, avec $w_1, \ldots, w_n \in \Sigma^+$ non vides et $n \geqslant 3$. On suppose que $\phi(w_1) = \cdots = \phi(w_n)$ est un élément idempotent de S. Soient $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ des arbres de factorisation de $w_1, \ldots, w_n$ respectivement. Alors l'arbre dont la racine est $w = w_1 \cdots w_n$ et qui possède n enfants $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$, est un arbre de factorisation de w :

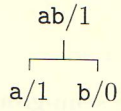


On prêtera attention à plusieurs points de cette définition :
- on ne s'intéresse qu'aux mots non vides,
- il peut exister plusieurs arbres de factorisation pour un même mot w (voir exemples plus bas),
- l'ordre des enfants d'un nœud est important,
- lorsqu'un nœud possède trois enfants ou plus (dernier cas), il doit vérifier la règle de l'idempotence.

On utilisera les conventions graphiques suivantes :
- une **double barre horizontale** indiquera une application de la règle de l'idempotence (voir cas 2 de l'exemple 6 ci-dessous) ;
- lorsque l'on écrit un nœud w dans un arbre, on écrira $w/\phi(w)$ afin de faciliter les raisonnements sur la règle de l'idempotence.

Exemple 6. Soit $\Psi_{\mathtt{a}}$ définie à l'exemple 5 page 2. On rappelle que $\Psi_{\mathtt{a}}(w) = 0$ si w contient un nombre pair de $\mathtt{a}$, et $\Psi_{\mathtt{a}}(w) = 1$ sinon. On va donner des exemples d'arbres de factorisation pour $\Psi_{\mathtt{a}}$. Regardons quelques exemples de mots :

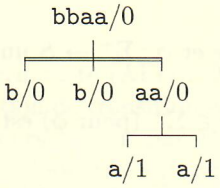
1. $u = \mathtt{ab}$: on applique le deuxième cas de la définition avec $w_1 = \mathtt{a}$ et $w_2 = \mathtt{b}$. Ainsi, w_1 et w_2 sont des lettres et $u = w_1 w_2$. En appliquant deux fois le premier cas de la définition, on obtient l'arbre de factorisation suivant pour $u = \mathtt{ab}$:



   On notera que $\Psi_{\mathtt{a}}(\mathtt{a}) = 1$, $\Psi_{\mathtt{a}}(\mathtt{b}) = 0$ et $\Psi_{\mathtt{a}}(\mathtt{ab}) = 1$.

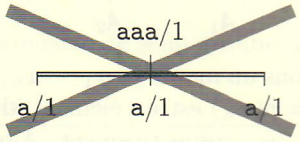
2. $w = \mathtt{bbaa}$: on peut appliquer le dernier cas de la définition avec $w_1 = \mathtt{b}$, $w_2 = \mathtt{b}$ et $w_3 = \mathtt{aa}$. Ceci est possible car $\Psi_{\mathtt{a}}(w_1) = \Psi_{\mathtt{a}}(w_2) = \Psi_{\mathtt{a}}(w_3) = 0$ est idempotent **(règle de l'idempotence)**. Pour w_3, on utilise ensuite un arbre de factorisation similaire à celui vu plus haut pour $u = \mathtt{ab}$.

On obtient alors l'arbre :



Question 8. Donner un arbre de factorisation pour $w = \texttt{bbaa}$ qui est différent de celui de l'exemple 6.

Considérons le mot aaa. Puisque $\Psi_{\texttt{a}}(\texttt{a}) = 1$ n'est pas idempotent dans le semi-groupe $\mathbb{B}$, il **n'est pas possible** d'appliquer la règle de l'idempotence. Autrement dit, l'arbre suivant n'est pas un abre de factorisation de aaa.



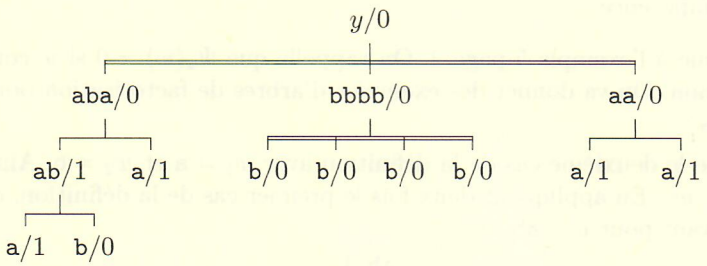
cet arbre n'est pas valide

Question 9. Donner un arbre de factorisation de aaa.

Question 10. Donner un arbre de factorisation de aaaaaa (six « a ») qui utilise la règle de l'idempotence.

On associe à un arbre de factorisation sa **hauteur**, définie de la façon suivante :
— un arbre constitué uniquement d'une racine sans enfants est de hauteur 0,
— pour tous arbres $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_k$ de hauteurs respectives $h_1, \ldots, h_k$, l'arbre formé par une racine dont les enfants sont $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_k$ est de hauteur $1 + \max(h_1, \ldots, h_k)$.

Exemple 7. Poursuivons l'exemple 6. L'arbre de factorisation de ab est de hauteur 1, celui de bbaa est de hauteur 2. Un exemple plus complexe est l'arbre de hauteur 3 donné ci-dessous pour $y = \texttt{ababbbbaa}$.



On peut vérifier que pour tout morphisme de semi-groupe $\phi : \Sigma^+ \to S$ et tout mot $w \in \Sigma^+$, on peut trouver un arbre de factorisation de hauteur au plus $\lceil \log_2 |w| \rceil$ en coupant le mot en deux à chaque étage de l'arbre. Il n'est pas clair à priori qu'il soit possible de faire mieux en général. Un résultat surprenant et fondamental est que si S est **fini**, alors il est en fait toujours possible de trouver un arbre de factorisation de hauteur constante, c'est-à-dire qui ne dépend que de S mais pas de la longueur de w.

Théorème 1. Soit Σ un alphabet, $(S, \cdot)$ un semi-groupe **fini** et $\phi : \Sigma^+ \to S$ un morphisme de semi-groupe. Alors pour tout mot non vide $w \in \Sigma^+$, il existe un arbre de factorisation $\mathcal{T}_w$ de w pour ϕ de hauteur au plus $3|S|$. De plus, il existe un algorithme qui sur tout mot $w \in \Sigma^+$ calcule $\mathcal{T}_w$ en temps $A|w|$, où A est une constante qui ne dépend que de S.

Partie III. Cas des groupes

Nous allons démontrer un cas particulier du Théorème 1. Pour tout entier $k \geqslant 1$, on identifie $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ avec l'ensemble $\{0, \ldots, k-1\}$. On rappelle que $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, +)$ est un groupe où « $+$ » est l'addition modulo k. L'inverse d'un élément $x \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ sera noté « $-x$ ». On admettra que 0 est l'unique élément idempotent de $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, +)$. On remarque que l'addition modulo 2 se comporte comme le « OU » exclusif $\oplus$. On pourra ainsi identifier $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ avec $\mathbb{B}$ (voir page 2).

Dans cette partie, Σ est un alphabet fixé et $k \geqslant 2$ un entier fixé. On pose $S = (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, +)$ et on se donne un morphisme de semi-groupe $\phi : \Sigma^+ \to S$ quelconque. Pour chaque mot $w \in \Sigma^+$,

$$P(w) = \{\phi(w[1, \ldots, j]) : 1 \leqslant j \leqslant |w| - 1\}$$

est l'ensemble des valeurs par ϕ des **préfixes stricts** de w (c'est-à-dire des préfixes non vides de w qui ne sont pas égaux à w). On notera bien que ε et w ne sont pas des préfixes stricts de w.

Exemple 8. En identifiant $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{B}$, la fonction $\Psi_{\mathtt{a}}$ définie à l'exemple 5 (page 2) peut être vue comme une fonction $\Psi_{\mathtt{a}} : \Sigma^* \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Prenons $w = \mathtt{bbaa}$. Alors

$$P(w) = \{\Psi_{\mathtt{a}}(\mathtt{b}), \Psi_{\mathtt{a}}(\mathtt{bb}), \Psi_{\mathtt{a}}(\mathtt{bba})\} = \{0, 0, 1\} = \{0, 1\}.$$

Question 11. On se place dans le contexte de l'exemple 8. Soit $w = \mathtt{b}^{10}\mathtt{a}$ (dix « b » suivis d'un « a »). Donner $P(w)$. On justifiera la réponse.

On revient au cas général d'un morphisme de semigroupe $\phi\colon \Sigma^+ \to S$ où $S = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ avec $k \geqslant 2$, et où Σ est un alphabet quelconque.

Question 12. Montrer que pour tous mots $x, y \in \Sigma^+$, on a $\phi(y) = \phi(xy) - \phi(x)$.

Pour $p = 0, \ldots, k$, on note $H(p)$ la proposition suivante :

« Pour tout mot $w \in \Sigma^+$ tel que $|P(w)| \leqslant p$, il existe un arbre de factorisation de hauteur au plus $3p$. »

Question 13. Montrer que $H(0)$ est vraie.

Prenons $p \in \{1, \ldots, k\}$ et supposons que $H(p-1)$ est vraie. Soit $t \in P(w)$ et notons $j_1 < \cdots < j_\ell$ les indices tels que $\phi(w[1, \ldots, j_i]) = t$ pour $i = 1, \ldots, \ell$. On a ainsi $\{j : \phi(w[1, \ldots, j]) = t\} = \{j_1, \ldots, j_\ell\}$. On notera bien que $\ell > 0$ puisque $t \in P(w)$. Écrivons alors

$$w = \underbrace{w[1, \ldots, j_1]}_{x}\underbrace{w[j_1 + 1, \ldots, j_2]}_{v_1} \cdots \underbrace{w[j_{\ell-1} + 1, \ldots, j_\ell]}_{v_{\ell-1}}\underbrace{w[j_\ell + 1, \ldots, |w|]}_{y}.$$

Notons que dans l'écriture ci-dessus, il est possible que $\ell = 1$ et donc que $w = xy$.

Question 14. Montrer que pour tout $i = 1, \ldots, \ell - 1$, on a $\phi(v_i) = 0$.

Question 15. Montrer que $|P(x)| < |P(w)|$.

Question 16. Soit $i = 1, \ldots, \ell - 1$. Montrer que $|P(v_i)| < |P(w)|$.

On admettra que $|P(y)| < |P(w)|$ par un raisonnement similaire à celui de la question 16.

Question 17. Montrer que $H(p)$ est vraie.

Question 18. En déduire que pour tout mot $w \in \Sigma^+$, il existe un arbre de factorisation de w pour ϕ de hauteur au plus $3|S|$.

Partie IV. Semi-groupe de Brandt

Nous nous intéressons à un autre cas particulier du Théorème 1. On fixe un entier naturel $n \geqslant 1$ et on définit le **semi-groupe de Brant** $(\mathcal{B}_n, \cdot)$ par

$$\mathcal{B}_n = \{0_n\} \cup \{M_{i,j} : i,j \in \{1,\dots,n\}\}$$

où « $\cdot$ » est la multiplication de matrices, 0_n est la matrice identiquement zéro de taille $n \times n$, et $M_{i,j}$ est la matrice de taille $n \times n$ dont l'entrée (i,j) vaut 1, et dont toutes les autres entrées sont nulles (l'entrée (i,j) est ligne i et colonne j). Par exemple

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

On admettra l'identité suivante pour tous $i,j,k,\ell \in \{1,\dots,n\}$:

$$M_{i,j} \cdot M_{k,\ell} = \begin{cases} M_{i,\ell} & \text{si } j = k, \\ 0_n & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2}$$

Ainsi $\mathcal{B}_n$ est bien un semi-groupe.

Question 19. Montrer que $x \in \mathcal{B}_n$ est idempotent si, et seulement si, $x = 0$ ou $x \in \{M_{i,i} : i = 1,\dots,n\}$.

Question 20. Soient $\Sigma = \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}$ et $\phi : \Sigma^+ \to \mathcal{B}_2$ définie par $\phi(\mathtt{a}) = M_{1,2}$ et $\phi(\mathtt{b}) = M_{2,1}$. Montrer que pour tout mot $w \in \Sigma^+$, on a $\phi(w) = M_{1,1}$ si et seulement si $w \in (\mathtt{ab})^+$.

Question 21. Soient Σ et ϕ définis comme à la question 20. Montrer que tout mot de $(\mathtt{ab})^+$ admet un arbre de factorisation pour ϕ de hauteur au plus 2.

Question 22. Soit $n \geqslant 1$. Montrer que pour tous $A,B,x \in \mathcal{B}_n$, on a $AB, AxB \in \{0_n, M_{A,B}\}$ où $M_{A,B} \in \mathcal{B}_n$ est une matrice qui ne dépend que de A et B (et pas de x) dont on explicitera la valeur. Montrer que si de plus $BA \neq 0_n$, alors $M_{A,B}$ est idempotent.

Prenons $\phi : \Sigma^+ \to \mathcal{B}_n$ un morphisme de semi-groupe et un mot $w \in \Sigma^+$ de longueur $|w| \geqslant 2$. On suppose que $\phi(w) \neq 0_n$ et on décompose w de la façon suivante :

$$w = \mathtt{ab}u_1\mathtt{ab}u_2 \cdots \mathtt{ab}u_{k+1} \tag{3}$$

où $\mathtt{a},\mathtt{b} \in \Sigma$ sont des lettres, $k \geqslant 0$ et où les mots $u_1,\dots,u_{k+1} \in \Sigma^*$ ne contiennent pas le facteur $\mathtt{ab}$. On prêtera attention au fait que les mots u_i peuvent être vides et qu'on peut avoir $\mathtt{a} = \mathtt{b}$.

Exemple 9. Soit $\Sigma = \{\mathtt{a},\mathtt{b},\mathtt{c}\}$. Le mot $w = \mathtt{ababcaaabc}$ se décompose comme en (3) en écrivant

$$w = \underbrace{\mathtt{ab}}_{\mathtt{ab}}\underbrace{\varepsilon}_{u_1}\underbrace{\mathtt{ab}}_{\mathtt{ab}}\underbrace{\mathtt{caa}}_{u_2}\underbrace{\mathtt{ab}}_{\mathtt{ab}}\underbrace{\mathtt{c}}_{u_3}.$$

On revient au cas général d'une décomposition comme en (3) d'un mot $w \in \Sigma^+$ de longueur $|w| \geqslant 2$ et tel que $\phi(w) \neq 0_n$.

Question 23. Soit $1 \leqslant i \leqslant k$. Montrer que $\phi(\mathtt{b}u_i\mathtt{a})$ est un élément idempotent dont la valeur ne dépend pas de u_i.

Supposons que $k > 0$ et que tous les u_i sont non vides. Soient $\mathcal{A}_1,\dots,\mathcal{A}_{k+1}$ des arbres de factorisation de $u_1,\dots,u_{k+1}$ respectivement.

Question 24. Donner un arbre de factorisation de w de hauteur au plus $5 + \max(h_1,\dots,h_{k+1})$, où h_i désigne la hauteur de $\mathcal{A}_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant k+1$. On justifiera qu'il s'agit bien d'un arbre de factorisation.

Les autres cas ($k = 0$, un ou plusieurs u_i sont vides) peuvent être traités de manière similaire. On admettra que l'on peut obtenir un arbre de factorisation de w de hauteur au plus

$$5 + \max(h_1, \ldots, h_{k+1}) \qquad \text{où } h_i = \begin{cases} \text{hauteur de } \mathcal{A}_i & \text{si } u_i \neq \varepsilon, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Afin d'obtenir les arbres $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_{k+1}$, on voit que l'on peut procéder récursivement de la même manière puisque $\phi(u_i) \neq 0_n$ en tant que facteur de w. Cette récurrence est bien fondée car $|u_i| < |w|$.

Question 25. Montrer qu'il existe une constante C ne dépendant que de Σ et telle que tout mot $w \in \Sigma^+$ avec $\phi(w) \neq 0_n$ admet un arbre de factorisation de hauteur au plus C.

Partie V. Recherche infixe

Dans cette partie, on fixe un alphabet Σ et langage régulier $L \subseteq \Sigma^+$. On rappelle que l'on numérote les lettres à partir de l'indice 1 et que pour tout $w \in \Sigma^+$, et indices $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant |w|$, on note $w[i, \dots, j]$ le facteur $w[i] \cdots w[j]$. Dans cette partie, on admettra le Théorème 1.

Considérons le problème suivant :
- Entrée : un mot $w \in \Sigma^+$ et une paire d'indice (i, j) tels que $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant |w|$.
- Sortie : « OUI » si le facteur $w[i, \dots, j]$ appartient à L, « NON » sinon.

Exemple 10. Prenons $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ et le langage $L = \{w \in \Sigma^+ : w \text{ contient un nombre pair de } \mathtt{a}\}$. Considérons les cas suivants :
- entrée $w = \mathtt{aababb}$ et $(i, j) = (1, 2)$: la sortie est OUI car $w[1, \dots, 2] = \mathtt{aa} \in L$,
- entrée $w = \mathtt{aababb}$ et $(i, j) = (3, 5)$: la sortie est NON car $w[3, \dots, 5] = \mathtt{bab} \notin L$,
- entrée $w = \mathtt{abba}$ et $(i, j) = (1, 4)$: la sortie est OUI car $w[1, \dots, 4] = \mathtt{abba} \in L$.

Le problème qui nous intéresse est le suivant, que l'on appellera $\texttt{RECHERCHE-INFIXE}_L$:
- Entrée : un mot $w \in \Sigma^+$ et une **liste** de paires d'indices $I = [(i_1, j_1); \dots; (i_n, j_n)]$ tels que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on a $1 \leqslant i_k \leqslant j_k \leqslant |w|$.
- Sortie : une liste $(b_1, \dots, b_n)$ où $b_k = \text{OUI}$ si le facteur $w[i_k, \dots, j_k]$ appartient à L, sinon $b_k = \text{NON}$.

Exemple 11. Prenons $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ et le langage $L = \{w \in \Sigma^+ : w \text{ contient un nombre pair de } \mathtt{a}\}$. On considère l'entrée donnée par le mot $w = \mathtt{aababb}$ et la liste $[(1, 2), (3, 5), (1, 4), (2, 6)]$ (de longueur $n = 4$). La sortie attendue est donc (OUI, NON, NON, OUI) car :
- $w[1, \dots, 2] = \mathtt{aa}$, qui appartient bien à L,
- $w[3, \dots, 5] = \mathtt{bab}$, qui n'appartient pas à L,
- $w[1, \dots, 4] = \mathtt{aaba}$, qui n'appartient pas à L,
- $w[2, \dots, 6] = \mathtt{ababb}$, qui appartient bien à L.

On cherche d'abord à donner une solution simple mais peu efficace à ce problème. Pour ce faire, prenons un AFD $\mathcal{A} = (Q, q_0, \delta, F)$ qui reconnaît le langage L. Comme L est fixé, $\mathcal{A}$ est aussi fixé. En particulier, $|Q|$ est une constante du problème. On supposera dans la suite que l'on peut calculer $\delta(q, \sigma)$ en temps constant pour tout $q \in Q$ et toute **lettre** $\sigma \in \Sigma$.

Soit $w \in \Sigma^*$ un mot. Le tableau T_w est défini pour tous $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant |w|$ et pour tout $q \in Q$ par

$$T_w[q, i, j] = \delta^*(q, w[i, \dots, j]).$$

Question 26. Donner un algorithme qui calcule T_w en temps $O(|Q| \cdot |w|^2)$.

Question 27. Donner un algorithme qui résout toute instance (w, I) de $\texttt{RECHERCHE-INFIXE}_L$ en temps $O(|Q| \cdot |w|^2 + n)$, où n est la longueur de la liste I. On justifiera la correction de l'algorithme.

On cherche maintenant à donner une solution efficace à ce problème grâce aux forêts de factorisation.

Prenons le semi-groupe fini $(S, \cdot)$ donné par le Lemme 1 (page 3) appliqué à L. Ainsi, il existe un ensemble $F \subseteq S$ et un morphisme de semi-groupe $\phi : \Sigma^+ \to S$ tel que $\phi^{-1}(F) = L$. Puisque S est fini et ne dépend que de L qui est fixé, on suppose dans la suite que l'on peut multiplier deux éléments de S avec « $\cdot$ » en temps constant. Par le Théorème 1, pour chaque mot $w \in \Sigma^+$, il existe un arbre de factorisation $\mathcal{T}_w$ de w pour ϕ. De plus, $\mathcal{T}_w$ est de hauteur au plus $3|S|$ et il existe un algorithme qui calcule $\mathcal{T}_w$ en temps $O(|w|)$.

Dans toute la suite on suppose que l'on dispose des fonctions `Racine`, `Indices`, `Enfant`, `Val` et `EnfantIndice` décrites ci-dessous.

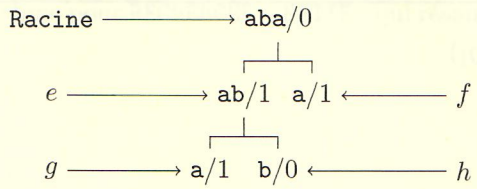
— `Racine(`w`)` renvoie, pour tout $w \in \Sigma^+$, un arbre de factorization $\mathcal{T}_w$ de w pour ϕ.

Soit $w \in \Sigma^+$ un mot et $\mathcal{T}_w$ l'arbre de factorisation renvoyé par `Racine(`w`)`. Si un nœud n de $\mathcal{T}_w$ correspond au facteur $w[i, \dots, j]$ de w et possède N enfants alors

— `Indices(`n`)` renvoie la paire (i, j),
— `Enfant(`n, ℓ`)` renvoie, pour tout rang $1 \leqslant \ell \leqslant N$, le ℓ-ième enfant de n,
— `Val(`n`)` renvoie $\phi(w[i, \dots, j])$,
— `EnfantIndice(`n, k`)` renvoie, pour tout indice $i \leqslant k \leqslant j$, le rang ℓ de l'unique enfant de n qui contient l'indice k, c'est-à-dire l'unique ℓ tel que `Indices(Enfant(`n, ℓ`))` $= (i', j')$ avec $i' \leqslant k \leqslant j'$. Si n n'a aucun énfant alors cette fonction provoque une erreur.

On suppose que toutes ces fonction s'exécutent en temps constant.

Exemple 12. Avec le morphisme $\Psi_{\mathtt{a}}$ de l'exemple 5 (page 2), un arbre de factorisation du mot $w =$ `aba` est le suivant, où l'on a annoté les nœuds de l'arbre avec des flèches pour leur donner des noms :



Faisons quelques remarques sur cet arbre :

— Puisque la racine a deux enfants e et f, on a `Enfant(Racine,` $1) = e$ et `Enfant(Racine,` $2) = f$.
— La racine correspond au mot entier, c'est-à-dire à $w = w[1, \dots, 3]$ donc `Indices(Racine)` $= (1, 3)$.
— La valeur de la racine est $\Psi_{\mathtt{a}}(\mathtt{aba}) = 0$ donc `Val(Racine)` $= 0$.
— L'enfant gauche e correspond au facteur $w[1, \dots, 2] =$ `ab` donc `Indices(`e`)` $= (1, 2)$.
— L'enfant droit f correspond au facteur $w[3, \dots, 3] =$ `a` donc `Indices(`f`)` $= (3, 3)$.
— Enfin, `EnfantIndice(Racine,` $1) =$ `EnfantIndice(Racine,` $2) = 1$ puisque le premier enfant de la racine (e) correspond à la plage d'indices $(1, 2)$. D'autre part, `EnfantIndice(Racine,` $3) = 2$ puisque le deuxième enfant correspond à la plage d'indices $(3, 3)$.

Question 28. Donner les valeurs de `Val(`e`)`, `Val(`f`)`, `Indices(`g`)`, `Indices(`h`)`, `EnfantIndice(`$e, 1$`)` et `EnfantIndice(`$e, 2$`)`.

Soit $w \in \Sigma^+$ un mot et $\mathcal{T}_w$ l'arbre de factorisation renvoyé par `Racine(`w`)`. La figure 1 page 11 présente l'algorithme `CalculePhi`(n, i, j) où n est un nœud de $\mathcal{T}_w$ tel que `Indices(`n`)` $= (I, J)$ avec $I \leqslant i \leqslant j \leqslant J$. On se propose de montrer que `CalculePhi`(n, i, j) renvoie $\phi(w[i, \dots, j])$. À cette fin, étant donné un nœud n de $\mathcal{T}_w$, on considère la proposition

$\mathrm{HR}_w(n)$:« Pour tous indices (i, j) tels que $I \leqslant i \leqslant j \leqslant J$, avec $(I, J) =$ `Indices(`n`)`, on a `CalculePhi`$(n, i, j) = \phi(w[i, \dots, j])$. »

Question 29. Montrer que $\mathrm{HR}_w(n)$ est vraie pour tout mot $w \in \Sigma^+$ et pour toute feuille n de $\mathcal{T}_w$.

Fixons un mot w. On montre $\mathrm{HR}_w(n)$ par induction sur la hauteur du nœud n dans l'arbre $\mathcal{T}_w$. Considérons un nœud n qui n'est pas une feuille et supposons que $\mathrm{HR}_w(f)$ est vraie pour tout enfant f de n. On cherche à montrer que $\mathrm{HR}_w(n)$ est vraie. Pour cela, prenons (i, j) tels que $I \leqslant i \leqslant j \leqslant J$, avec $(I, J) =$ `Indices(`n`)`.

Question 30. Montrer que si l'algorithme atteint la ligne 13, alors $v_f = \phi(w[i, \dots, p])$.

```
Fonction CalculePhi(n,i,j)
  Entrées : nœud n, indices i ⩽ j
  Sorties : la valeur de φ(w[i,...,j])
1 début
2   (I, J) ← Indices(n)
3   si i = I et j = J alors
4     renvoyer Val(n)
5   ℓ ← EnfantIndice(n, i)
6   r ← EnfantIndice(n, j)
7   si ℓ = r alors
      // w[i,...,j] est contenu dans le ℓ-ième enfant de n
8     renvoyer CalculePhi(Enfant(n,ℓ),i,j)
9   f ← Enfant(n, ℓ)
10  g ← Enfant(n, r)
11  (_, p) ← Indices(f) // on ignore l'indice de gauche
12  (q, _) ← Indices(g) // on ignore l'indice de droite
13  v_f ← CalculePhi(f,i,p)
14  v_g ← CalculePhi(g,q,j)
15  si ℓ + 1 = r alors
      // w[i,...,j] est contenu dans les ℓ-ième et (ℓ+1)-ième enfants de n
16    renvoyer v_f · v_g
17  sinon
      // w[i,...,j] est contenu dans les enfants des indices ℓ à r
18    renvoyer v_f · Val(Enfant(n, ℓ + 1)) · v_g
```

FIGURE 1 – L'algorithme `CalculePhi`.

On admettra qu'un raisonnement similaire permet de montrer que sous les mêmes hypothèses, on a $v_d = \phi(w[q, \ldots, j])$ à la ligne 14. Nous allons seulement nous intéresser à un cas possible, qui est le plus difficile. Il s'agit du cas où les conditions aux lignes 3, 7 et 15 ne sont pas satisfaites. Dans ce cas, l'algorithme va renvoyer une valeur à la ligne 18.

Question 31. Montrer que si l'algorithme atteint la ligne 18 alors il renvoie $\phi(w[i, \ldots, j])$.

On admet que les autres cas de la preuve se traitent de façon similaire et que $\mathrm{HR}_w(n)$ est donc vraie.

Question 32. Montrer que pour tous $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant |w|$, `CalculePhi(Racine(`$w$`),`$i, j$`)` s'exécute en temps $O(2^h)$ où h est la hauteur $\mathcal{T}_w$.

Question 33. En déduire qu'il existe une constante A, qui ne dépend que de L, telle que pour chaque $w \in \Sigma^+$, si l'arbre $\mathcal{T}_w$ est donné alors on peut calculer $\phi(w[i, \ldots, j])$ en temps A pour tous i et j.

Question 34. Donner un algorithme pour $\texttt{RECHERCHE-INFIXE}_L$ qui résout toute instance (w, I) en temps $O(|w| + |I|)$.