

## **ECOLE POLYTECHNIQUE**

### **CONCOURS D'ADMISSION 2025**

**MARDI 15 AVRIL 2025**

**08h00 - 12h00**

**FILIERES MP-MPI - Epreuve n° 3**

**MATHEMATIQUES B (X)**

**Durée : 4 heures**

**L'utilisation des calculatrices n'est pas  
autorisée pour cette épreuve**

Si  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  d'intérieur non vide et si  $f$  est une fonction  $n$  fois dérivable de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ , on note  $f^{(n)}$  sa dérivée  $n$ -ième, avec la convention  $f^{(0)} = f$ . On dit qu'une fonction  $f$  de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  si elle est  $n$  fois dérivable pour tout entier  $n \geq 1$ .

On note  $\mathbb{R}[X]$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Si  $n \geq 0$  est un entier, on note  $\mathbb{R}_n[X]$  le sous- $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de  $\mathbb{R}[X]$  constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ . Par convention, on note  $\mathbb{R}_{-1}[X]$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}[X]$  réduit au polynôme nul. On dit qu'un polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  est unitaire s'il est non nul et si son coefficient dominant est égal à 1.

Si  $V$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire, pour tout sous- $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $W$  de  $V$  on note  $W^\perp$  l'orthogonal de  $W$  dans  $V$ .

Si  $m$  et  $n$  sont deux entiers naturels non nuls, on note  $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices à  $m$  lignes et  $n$  colonnes et à coefficients réels. Si  $m = n$ , on note  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ . Si  $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ , on note  $M^T \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$  la matrice transposée de  $M$ . Si  $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$  est une famille de nombres réels indexée par les couples  $(i, j)$  d'entiers tels que  $1 \leq i \leq m$  et  $1 \leq j \leq n$ , on note  $(a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  la matrice dont le coefficient à la ligne  $i$  et la colonne  $j$  est  $a_{i,j}$ .

Le problème comporte quatre parties. Les trois premières parties sont indépendantes entre elles. On pourra utiliser des résultats des trois premières parties dans la quatrième et dernière partie.

### Première partie

Soit  $a$  et  $b$  deux nombres réels tels que  $a < b$ . Soit  $h$  une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ . On fixe un entier  $N \geq 1$ . On dit que  $h$  s'annule à l'ordre  $N$  dans  $[a, b]$  s'il existe des nombres  $a \leq c_1 < c_2 < \dots < c_m \leq b$  et des entiers strictement positifs  $k_1, \dots, k_m$  tels que  $\sum_{i=1}^m k_i = N$  et, pour tout entier  $1 \leq i \leq m$  et tout entier  $0 \leq k < k_i$ , on a  $h^{(k)}(c_i) = 0$ .

**1a.** Soit  $N \geq 1$  un entier. Montrer que si  $h$  s'annule à l'ordre  $N + 1$  dans  $[a, b]$ , alors  $h'$  s'annule à l'ordre  $N$  dans  $[a, b]$ .

**1b.** Pour tout entier  $N \geq 1$ , montrer que si  $h$  s'annule à l'ordre  $N + 1$  dans  $[a, b]$ , il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $h^{(N)}(c) = 0$ .

On fixe, pour le reste de cette partie,  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  un polynôme non nul, scindé dans  $\mathbb{R}$  et dont toutes les racines sont dans  $]a, b[$ . On note  $a < t_1 < \dots < t_m < b$  les racines de  $P$  et, pour tout entier  $1 \leq i \leq m$ , on note  $k_i$  le plus petit entier tel que  $P^{(k_i)}(t_i) \neq 0$ .

**2a.** Montrer que si  $Q \in \mathbb{R}[X]$  est un polynôme tel que  $\deg(Q) < \deg(P)$  et, pour tout entier  $1 \leq i \leq m$  et tout entier  $0 \leq k < k_i$ ,  $Q^{(k)}(t_i) = 0$ , alors  $Q = 0$ .

**2b.** Montrer qu'il existe un unique polynôme  $H(f, P) \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $\deg(H(f, P)) < \deg(P)$  et tel que, pour tout entier  $1 \leq i \leq m$  et tout entier  $0 \leq k < k_i$ ,

$$H(f, P)^{(k)}(t_i) = f^{(k)}(t_i).$$

Pour  $t \in [a, b] \setminus \{t_1, \dots, t_m\}$ . On pose

$$Q(f, P)(t) = \frac{f(t) - H(f, P)(t)}{(t - t_1)^{k_1} \dots (t - t_m)^{k_m}}.$$

3a. On pose  $g = f - H(f, P)$ . Montrer que, pour tout entier  $1 \leq i \leq m$  et tout réel  $x \in [a, b]$ , on a

$$f(x) - H(f, P)(x) = (x - t_i)^{k_i} \int_0^1 \frac{v^{k_i-1}}{(k_i-1)!} g^{(k_i)}(t_i v + x(1-v)) dv.$$

3b. Montrer que la fonction  $Q(f, P)$  se prolonge de façon unique en une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ .

4a. Soit  $s_0 \in [a, b]$  et soit un entier  $n \geq 1$ . Montrer que

$$Q(f, (X - s_0)^n)(s_0) = \frac{f^{(n)}(s_0)}{n!}.$$

4b. Soient  $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[X]$  deux polynômes unitaires et scindés dans  $]a, b[$ . Montrer que

$$H(f, P_1 P_2) = H(f, P_1) + P_1 H(Q(f, P_1), P_2) \quad \text{et} \quad Q(f, P_1 P_2) = Q(Q(f, P_1), P_2).$$

On fixe  $t \in [a, b] \setminus \{t_1, \dots, t_m\}$ . Pour tout  $s \in [a, b]$ , on pose

$$Q_t(s) = f(s) - H(f, P)(s) - Q(f, P)(t) \prod_{i=1}^m (s - t_i)^{k_i}.$$

5a. Montrer que la fonction  $Q_t$  s'annule à l'ordre  $\deg(P) + 1$  dans l'intervalle  $[\min(t, t_1), \max(t, t_m)]$ .

5b. En déduire que si  $P$  est unitaire, il existe  $\xi \in [\min(t, t_1), \max(t, t_m)]$  tel que

$$f(t) - H(f, P)(t) = \frac{f^{(\deg(P))}(\xi)}{\deg(P)!} P(t).$$

On dit qu'une fonction  $h$  de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$  est *absolument monotone* sur un intervalle  $[a, b]$  si elle est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $[a, b]$  et si, pour tout entier  $n \geq 0$ , la fonction  $h^{(n)}$  est à valeurs positives sur  $[a, b]$ . En particulier  $h$  est à valeurs positives.

6. On suppose que  $f$  est absolument monotone sur  $[a, b]$ . Montrer que, pour tout polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  scindé dans  $]a, b[$ , la fonction  $Q(f, P)$  est absolument monotone sur  $[a, b]$ .

### Deuxième partie

Soit  $I = [-1, 1]$ . On fixe un entier  $n \geq 2$  pour toute cette partie. Soit  $f : I \rightarrow ]0, +\infty[$  une fonction continue. On rappelle que l'on définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_n[X]$  en posant, pour tous  $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ ,

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(x)Q(x)f(x) dx.$$

Soit  $D \in \mathbb{R}_n[X]$  un polynôme ayant  $n$  racines réelles distinctes  $r_1 > \dots > r_n$  dans  $I$ . On suppose de plus que  $D \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$ .

7a. Montrer qu'il existe des nombres réels  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  tels que, pour tout  $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ ,

$$\int_{-1}^1 P(x)f(x) dx = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(r_i).$$

7b. Montrer que si  $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ , on a

$$\int_{-1}^1 P(x)f(x) dx = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(r_i). \quad (1)$$

(Indication : on pourra considérer la division euclidienne de  $P$  par  $D$ .)

7c. En évaluant l'égalité (1) sur le polynôme  $\prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} (X - r_j)^2$ , montrer que  $\lambda_i > 0$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ .

Pour  $1 \leq j \leq n-1$  et  $t \in \mathbb{R}$ , on pose  $f_j(t) = \prod_{i=1}^j (r_i - t)$  ainsi que  $f_0(t) = 1$ . Si  $0 \leq j \leq n-1$  et  $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ , on pose

$$\langle P, Q \rangle_j = \langle P, Q f_j \rangle.$$

7d. Montrer que, pour tout  $0 \leq j \leq n-1$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_j$  définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_{n-j-1}[X]$ .

Dans les questions 8. à 12. ci-dessous, on fixe un entier naturel  $0 \leq j \leq n-1$ .

8a. Montrer qu'il existe une unique famille  $q_0, \dots, q_{n-j-1}$  de polynômes unitaires de  $\mathbb{R}[X]$  telle que  $\deg(q_i) = i$  pour  $0 \leq i \leq n-j-1$  et telle que pour tous  $0 \leq i \neq i' \leq n-j-1$ ,

$$\langle q_i, q_{i'} \rangle_j = 0.$$

8b. On pose  $q_{n-j} = \prod_{i=j+1}^n (X - r_i)$ . Montrer que  $q_{n-j}$  est l'unique polynôme unitaire de degré  $n-j$  vérifiant, pour tout  $0 \leq i \leq n-j-1$ ,

$$\langle q_i, q_{n-j} \rangle_j = 0.$$

8c. Soit  $2 \leq i \leq n-j$ . Montrer qu'il existe des nombres réels  $a_i$  et  $b_i$  tels que

$$q_i - Xq_{i-1} = a_i q_{i-1} + b_i q_{i-2}.$$

9b. Montrer que

$$b_i \underbrace{\langle q_{i-2}, q_{i-2} \rangle_j}_{>0} = - \underbrace{\langle Xq_{i-1}, q_{i-2} \rangle_j}_{>0?}$$

9c. Montrer que  $b_i < 0$ .

10a. Pour  $i \in \{0, 1\}$ , montrer que le polynôme  $q_i$  a exactement  $i$  racines dans  $\mathbb{R}$  (noter que l'on ne demande pas que les racines appartiennent à l'intervalle  $I$ ).

**10b.** Montrer que, pour tout  $1 \leq i \leq n - j$ , le polynôme  $q_i$  a exactement  $i$  racines réelles distinctes, que ces racines sont simples et que si  $x_1 < x_2$  sont deux racines consécutives de  $q_i$ , il existe une unique racine de  $q_{i-1}$  dans l'intervalle  $]x_1, x_2[$ .

**10c.** En déduire que, pour tout  $0 \leq i \leq n - j - 1$ , on a  $q_i(r_{j+1}) > 0$ .

Pour  $0 \leq i \leq n - j - 1$ , il existe donc un unique nombre réel  $\alpha_i$  tel que

$$q_{i+1}(r_{j+1}) + \alpha_i q_i(r_{j+1}) = 0.$$

On fixe  $0 \leq i \leq n - j - 1$  et on pose

$$p_i = \frac{q_{i+1} + \alpha_i q_i}{X - r_{j+1}}.$$

On note  $c_0, \dots, c_i \in \mathbb{R}$  les coordonnées de  $p_i$  dans la base  $(q_0, \dots, q_i)$  de  $\mathbb{R}_i[X]$ .

**11a.** Montrer que, pour  $0 \leq \ell \leq i$ ,

$$\left\langle q_{i+1} + \alpha_i q_i, \frac{q_\ell - q_\ell(r_{j+1})}{X - r_{j+1}} \right\rangle_j = 0.$$

**11b.** Montrer que, pour tout entier  $0 \leq \ell \leq i$ , il existe un réel  $\gamma_\ell > 0$  tel que  $c_\ell = \gamma_\ell c_0$  et en déduire que  $c_\ell > 0$ .

**12.** Montrer que, si  $0 \leq j \leq n - 2$ , pour tout  $0 \leq i \leq n - j - 1$ , le polynôme  $p_i$  est orthogonal à  $\mathbb{R}_{i-1}[X]$  pour le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{j+1}$ .

**13.** Soit  $\mathcal{B} = (a_0, \dots, a_n)$  l'unique base orthogonale de  $(\mathbb{R}_n[X], \langle \cdot, \cdot \rangle)$  telle que  $a_i$  est un polynôme unitaire de degré  $i$  pour tout  $0 \leq i \leq n$ . Montrer que, pour tout  $0 \leq j \leq n - 1$ , les coefficients du polynôme  $\prod_{\ell=j+1}^n (X - r_\ell)$  dans la base  $\mathcal{B}$  sont des nombres réels strictement positifs.

*Indication : on pourra noter  $(q_{j,0}, \dots, q_{j,n-j})$  la base de  $(\mathbb{R}_{n-j}[X], \langle \cdot, \cdot \rangle_j)$  obtenue dans les questions 8a et 8b et raisonner par récurrence descendante sur  $j$ .*

### Troisième partie

Soit  $\lambda$  un nombre réel strictement positif. Pour tous réels  $x$  et  $r$  tels que  $|x| < 1$  et  $|r| < 1$ , on pose

$$F_\lambda(x, r) = (1 - 2rx + r^2)^{-\lambda}.$$

**14.** Montrer que la fonction  $F_\lambda$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -1, 1[^2$ .

**15.** Montrer que pour  $x \in ] -1, 1[$ , la fonction  $r \mapsto F_\lambda(x, r)$  est développable en série entière au voisinage de 0.

Pour  $x \in ] -1, 1[$ , on note  $a_n^{(\lambda)}(x)$  le  $n$ -ième coefficient du développement de la fonction  $r \mapsto F_\lambda(x, r)$  de sorte que, pour  $r$  dans un voisinage de 0,

$$F_\lambda(x, r) = \sum_{n \geq 0} a_n^{(\lambda)}(x) r^n.$$

**16a.** Pour  $x \in ]-1, 1[$ , montrer que  $a_1^{(\lambda)}(x) = 2\lambda x a_0^{(\lambda)}(x)$  et que, pour tout entier  $n \geq 1$ ,

$$(n+1)a_{n+1}^{(\lambda)}(x) = 2(n+\lambda)xa_n^{(\lambda)}(x) - (n+2\lambda-1)a_{n-1}^{(\lambda)}(x).$$

( Indication : on pourra commencer par calculer  $(1-2xr+r^2)\frac{\partial F_\lambda}{\partial r}(x,r)$ .

**16b.** En déduire que, pour tout  $n \geq 0$ , la fonction  $a_n^{(\lambda)}$  est un polynôme de degré  $n$  dont on déterminera le coefficient dominant ainsi que la parité.

On suppose désormais que  $\lambda > \frac{1}{2}$ . Pour  $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ , on pose

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(x)Q(x)(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} dx.$$

**17a.** Montrer que, pour tout entier  $n \geq 0$  et tout  $x \in ]-1, 1[$ ,

$$a_n^{(\lambda)}(x) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n F_\lambda}{\partial r^n}(x, 0).$$

**17b.** En déduire que, pour tout entier  $n \geq 1$ , on a  $(a_n^{(\lambda)})' = 2\lambda a_{n-1}^{(\lambda)}$ .

**17c.** Montrer que  $\int_{-1}^1 (1-t^2)^{\lambda+\frac{1}{2}} dt = (2\lambda+1) \int_{-1}^1 t^2(1-t^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} dt$  et en déduire que  $\langle a_2^{(\lambda)}, 1 \rangle = 0$ .

**17d.** Montrer par récurrence sur  $n \geq 1$  que  $\langle a_n^{(\lambda)}, 1 \rangle = 0$  pour tout entier  $n \geq 1$  et  $\langle X a_n^{(\lambda)}, 1 \rangle = 0$  pour tout entier  $n \geq 2$ .

( Indication : on pourra commencer par démontrer l'égalité

$$\langle X a_n^{(\lambda)}, 1 \rangle = \frac{2\lambda}{2\lambda+1} \int_{-1}^1 a_{n-1}^{(\lambda+1)}(t)(1-t^2)^{\lambda+\frac{1}{2}} dt.$$

**17e.** En déduire que, pour tout  $n \geq 0$ , la famille  $(a_0^{(\lambda)}, \dots, a_n^{(\lambda)})$  est une base orthogonale de  $\mathbb{R}_n[X]$  muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

### Quatrième partie

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on note  $x \cdot y \in \mathbb{R}$  le produit scalaire canonique de deux vecteurs  $x$  et  $y$  de  $\mathbb{R}^n$ . On note  $\mathbb{S}^{n-1}$  la sphère unité de  $\mathbb{R}^n$ , c'est-à-dire

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \cdot x = 1\}.$$

Pour un entier  $n \geq 1$ , on note  $S_n^+$  l'ensemble des matrices symétriques  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que, pour tout  $X \in \mathbb{R}^n$ ,

$$X^T M X \geq 0.$$

Soit  $N \geq 2$  un entier et soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est de type positif en dimension  $N$  si, pour tout entier  $k \geq 1$  et tout  $k$ -uplet  $(x_1, \dots, x_k) \in (\mathbb{S}^{N-1})^k$ , on a  $(f(x_i \cdot x_j)) \in S_k^+$ .

Si  $A = (a_{i,j})$  et  $B = (b_{i,j})$  sont deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on note  $A \odot B$  la matrice  $(a_{i,j} b_{i,j})$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

~~18a.~~ Montrer que si  $U \in \mathbb{R}^n$ , alors  $UU^T \in S_n^+$ .

~~18b.~~ Montrer que si  $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on a  $A \odot (B + C) = (A \odot B) + (A \odot C)$ .

18c. Montrer que si  $M \in S_n^+$ , il existe des nombres réels positifs  $d_i \geq 0$  et des vecteurs  $U_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $1 \leq i \leq n$  tels que

$$M = \sum_{i=1}^n d_i U_i U_i^T.$$

*Indication : on pourra commencer par écrire  $M = P^T D P$  où  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est une matrice inversible et  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice diagonale à coefficients positifs.*

18d. En déduire que si  $A, B \in S_n^+$ , alors  $A \odot B \in S_n^+$ .

18e. Pour tout entier  $N \geq 2$ , montrer que le produit de deux fonctions de type positif en dimension  $N$  est de type positif en dimension  $N$ .

On rappelle que, pour tout entier  $n \geq 0$ , il existe un unique polynôme  $T_n$  de degré  $n$  tel que, pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$ .

19. Montrer que les polynômes  $T_n$  sont des fonctions de type positif en dimension 2.

*Indication : on pourra utiliser la forme exponentielle du cosinus.*

On admettra, dans la suite du problème, que pour tout entier  $n \geq 0$  et tout entier  $N \geq 4$ , le polynôme  $a_n^{(\frac{N}{2}-1)}$  est de type positif en dimension  $N$ .

Pour un entier  $N \geq 2$ , on dit qu'un polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  est  $N$ -conductif si, pour toute fonction absolument monotone  $f$  de  $[-1, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ , le polynôme  $H(f, P)$  est une fonction de type positif en dimension  $N$ .

20. Soient  $P_1$  et  $P_2$  deux polynômes  $N$ -conductifs. Montrer que si  $P_1$  est de type positif en dimension  $N$ , alors  $P_1 P_2$  est  $N$ -conductif.

On fixe un entier  $N \geq 4$  et un entier  $n \geq 2$ . On admet que le polynôme  $a_n^{(\frac{N}{2}-1)}$  possède  $n$  racines réelles simples  $r_1 > r_2 > \dots > r_n$  dans  $]-1, 1[$ . Soit  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction absolument monotone.

21. Montrer que le polynôme  $H\left(f, \prod_{i=1}^n (X - r_i)\right)$  est une fonction de type positif en dimension  $N$ .