ECOLE POLYTECHNIQUE - ESPCI
ECOLES NORMALES SUPERIEURES

CONCOURS D'ADMISSION 2025

LUNDI 14 AVRIL 2025
08h00 - 12h00

FILIERE PC - Epreuve n° 1

MATHEMATIQUES (XEULS)

Durée : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

Le but de ce sujet est d'étudier les perturbations de rang 1 de matrices.

Notations

Dans l'ensemble du sujet, m, n désignent des entiers strictement positifs. On note $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$, et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles carrées de taille $n \times n$. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathbb{I}_n$ la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice transposée d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est notée A^T.

Les coefficients d'un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ sont notés $x_1, \cdots, x_n$. Dans ce sujet, les vecteurs sont notés en **gras**, et sont identifiés à des matrices colonnes $\mathbf{x} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, par exemple

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{de transposée} \quad \mathbf{x}^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}.$$

Pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, la matrice $\mathbf{x}^T\mathbf{y} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ est identifiée au nombre réel $\sum_{i=1}^n x_i y_i$; l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire et de sa norme usuels, notés respectivement

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T\mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \qquad \text{et} \quad \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Les deux premières parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre. Les parties 4 et 5 sont indépendantes entre elles, et s'appuient sur des résultats des parties précédentes.

À tout moment il est possible d'admettre le résultat d'une question et de l'utiliser ultérieurement, à condition de l'indiquer clairement.

Première partie

1. Soient $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$. On pose $M = \mathbf{u}\mathbf{v}^T$. Monter que M est une matrice carrée de taille $n \times n$, de rang 1.

2. Calculer avec justification le rang de la matrice $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suivante :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Réciproquement, soit $K \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée de rang 1. Montrer qu'il existe $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ tels que $K = \mathbf{u}\mathbf{v}^T$.

4. Soient $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$. Montrer que $\mathbf{u}\mathbf{v}^T = \mathbf{x}\mathbf{y}^T$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tel que

$$\mathbf{u} = \lambda \mathbf{x}, \quad \text{et} \quad \mathbf{v} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{y}.$$

5. Soit $K \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1, et soient $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tels que $K = \mathbf{u}\mathbf{v}^T$.

(a) Montrer que $\mathrm{Tr}(K) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.

(b) Montrer que $K^2 = \mathrm{Tr}(K)K$.

(c) En déduire que K est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Tr}(K) \neq 0$.

6. Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que P est un projecteur orthogonal de rang 1 si et seulement si il existe $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ avec $\|\mathbf{y}\| = 1$ tels que $P = \mathbf{y}\mathbf{y}^T$.

Deuxième partie

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible, et soient $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

7. Calculer le produit matriciel par blocs

$$\begin{pmatrix} \mathbb{I}_n & 0 \\ \mathbf{v}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{I}_n + \mathbf{u}\mathbf{v}^T & \mathbf{u} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{I}_n & 0 \\ -\mathbf{v}^T & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Montrer que

$$\det\left(\mathbb{I}_n + \mathbf{u}\mathbf{v}^T\right) = 1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle.$$

9. Montrer plus généralement que

$$\det\left(A + \mathbf{u}\mathbf{v}^T\right) = \det(A)\left(1 + \langle \mathbf{v}, A^{-1}\mathbf{u} \rangle\right).$$

10. Montrer que $A + \mathbf{u}\mathbf{v}^T$ est inversible si et seulement si $\langle \mathbf{v}, A^{-1}\mathbf{u} \rangle \neq -1$.

11. On suppose que $A + \mathbf{u}\mathbf{v}^T$ est inversible. Montrer que

$$\left(A + \mathbf{u}\mathbf{v}^T\right)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T A^{-1}}{1 + \langle \mathbf{v}, A^{-1}\mathbf{u} \rangle}.$$

12. Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $\det(C) = 0$. A-t-on toujours $\det(C + \mathbf{u}\mathbf{v}^T) = 0$? Justifiez votre réponse.

Troisième partie

On s'intéresse maintenant au cas où $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est symétrique. Soit $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|\mathbf{u}\| = 1$. On pose

$$B = A + \mathbf{u}\mathbf{u}^T.$$

13. Montrer que $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et soit $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ une base orthonormale quelconque de $\mathbb{R}^n$. On rappelle que $M = N$ si et seulement si $M\mathbf{v}_k = N\mathbf{v}_k$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$.

14. Soit $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ une base orthonormale quelconque de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\mathbb{I}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T.$$

15. On s'intéresse maintenant à la matrice symétrique A. En vertu du théorème spectral, on note $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de A, et $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres correspondante.

(a) Montrer que

$$A = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T.$$

(b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, on a

$$(x\mathbb{I}_n - A)^{-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - \lambda_k} \mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T.$$

16. Soit λ une valeur propre de A de multiplicité $m \geqslant 2$. On pose $E = \operatorname{Ker}(A - \lambda \mathbb{I}_n)$.

(a) Montrer que $\dim \left(E \cap \{\mathbf{u}\}^{\perp}\right) \geqslant m - 1$.

(b) En déduire que λ est une valeur propre de B de multiplicité au moins $m - 1$.

17. On note $\chi_A(x) = \det(x\mathbb{I}_n - A)$ le polynôme caractéristique de A, et $\chi_B(x) = \det(x\mathbb{I}_n - B)$ celui de B. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, on a

$$\chi_B(x) = \chi_A(x) \left(1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{\langle \mathbf{w}_k, \mathbf{u} \rangle^2}{x - \lambda_k} \right).$$

18. Soit $J = \{k \in \{1, 2, \ldots, n\},\ \langle \mathbf{w}_k, \mathbf{u} \rangle \neq 0\}$ l'ensemble des indices k tels que $\langle \mathbf{w}_k, \mathbf{u} \rangle \neq 0$.

(a) Montrer que $J \neq \varnothing$.

(b) Soit $\ell \notin J$. Montrer que λ_ℓ est une valeur propre de B.

(c) On suppose que $J = \{j\}$ pour un $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Montrer que les valeurs propres de B sont

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{j-1}, \lambda_j + 1, \lambda_{j+1}, \ldots, \lambda_n).$$

19. On suppose dans cette question que $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$, et que $J = \{1, 2, \ldots, n\}$. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ on pose

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\langle \mathbf{w}_k, \mathbf{u} \rangle^2}{x - \lambda_k}.$$

(a) Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, et calculer sa dérivée $f'(x)$.

(b) Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution dans chaque intervalle $]\lambda_\ell, \lambda_{\ell+1}[$ pour tout $\ell \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, et dans $]\lambda_n, +\infty[$.

(c) On note $\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \cdots \leqslant \mu_n$ les valeurs propres de B. Montrer que

$$\lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < \cdots < \lambda_n < \mu_n.$$

Quatrième partie

Dans cette quatrième partie, $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique dont les valeurs propres sont notées $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on note $\chi_A(x) = \det(x\mathbb{I}_n - A)$. On considère une base orthonormée $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ quelconque. Soit $\mathbf{U}$ une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans l'ensemble fini $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$, et qui suit la loi uniforme sur cet ensemble. On note $\mathbb{P}(A)$ la probabilité d'un événement $A \in \mathcal{A}$ et $\mathbb{E}[X]$ l'espérance d'une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs réelles.

On considère la variable aléatoire B, à valeurs dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, définie par

$$B = A + \mathbf{U}\mathbf{U}^T.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $\chi_B(x) = \det(x\mathbb{I}_n - B)$, qui est une variable aléatoire à valeurs réelles.

20. Montrer que pour tout $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, on a $\mathbb{E}\left[\langle \mathbf{U}, \mathbf{w}\rangle^2\right] = \frac{1}{n}\|\mathbf{w}\|^2$.

21. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Montrer que la variable aléatoire $\chi_B(x)$ a une espérance finie, et que, en notant χ_A' la dérivée du polynôme χ_A, on a

$$\mathbb{E}\left[\chi_B(x)\right] = \chi_A(x) - \frac{1}{n}\chi_A'(x).$$

22. Montrer que pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on a

$$\mathbb{E}\left[\chi_B(\lambda_k)\right] = -\frac{1}{n}\chi_A'(\lambda_k).$$

23. Démontrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{E}\left[\chi_B(x)\right] \neq 0$.

Cinquième partie

Comme dans la troisième partie, on suppose que

$$B = A + \mathbf{u}\mathbf{u}^T$$

avec $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, et $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur tel que $\|\mathbf{u}\| = 1$. On note $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de A et $\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \cdots \leqslant \mu_n$ celles de B. On admet que

$$\lambda_1 \leqslant \mu_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \mu_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n \leqslant \mu_n.$$

On suppose de plus qu'il existe un entier $m \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ tel que les valeurs propres de A vérifient

$$0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m < \lambda_{m+1} \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n.$$

Soit $\varepsilon \in]0, \lambda_{m+1}[$.

24. Justifier que $(A - \varepsilon\mathbb{I}_n)$ est inversible.

On suppose dans la suite que $\langle \mathbf{u}, (A - \varepsilon\mathbb{I}_n)^{-1}\mathbf{u}\rangle < -1$.

25. Montrer que $(B - \varepsilon\mathbb{I}_n)$ est inversible.

26. Montrer que $\operatorname{Tr}\left((B - \varepsilon\mathbb{I}_n)^{-1}\right) > \operatorname{Tr}\left((A - \varepsilon\mathbb{I}_n)^{-1}\right)$.

27. Montrer que $\mu_m > \varepsilon$.