Première partie

Énergie électrostatique

On étudie dans cette partie l'énergie de systèmes électrostatiques à l'équilibre, ou en déplacements quasi-statiques. On négligera donc tout effet lié aux champs magnétiques. Sauf mention contraire, on n'étudiera que des systèmes d'extension spatiale finie. Par convention, on considérera que l'énergie d'interaction électrostatique entre deux systèmes d'extension spatiale finie tend vers zéro quand la distance entre ceux-ci tend vers l'infini.

1.1 Énergie d'un système de charges ponctuelles

On rappelle que la force de Coulomb d'une charge q_1 sur une charge q_2 s'écrit

$$\overrightarrow{F_{1\to 2}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{r_{12}}}{{r_{12}}^3}, \tag{8}$$

où $\overrightarrow{r_{12}}$ est le vecteur repérant la position de q_2 par rapport à celle de q_1.

1 - On considère un système de deux charges q_1 et q_2. La charge q_1 étant fixe, on déplace q_2 de façon quasi-statique à partir de l'infini jusqu'à une distance r_{12}. Calculer l'énergie potentielle d'interaction électrostatique U_{12} associée au travail de q_1 sur q_2, que l'on exprimera en fonction de q_1, q_2, r_{12} et ε_0.

2 - On considère à présent la charge q_2 fixe, et on déplace q_1. Déterminer la force $\overrightarrow{F_{2\to 1}}$ dérivant de l'énergie potentielle obtenue précédemment. Cette énergie potentielle décrit-elle complètement l'interaction électrostatique entre les deux charges ?

3 - En déduire le facteur a tel que l'énergie électrostatique U_q d'un système $S_q = \{q_i\}_{1\leq i\leq N}$ de N charges s'écrive

$$U_q = a\sum_{i\neq j} q_j V_{i\to j}, \tag{9}$$

$U_q = a\,(q_2 V_{1\to 2} + q_1 V_{2\to 1})$

où la somme est prise sur toutes les paires possibles d'indices i et j entre 1 et N telles que $i \neq j$, et où l'on définira $V_{i\to j}$. Quel signe peut avoir cette énergie ?

Par la suite, on parlera de l'énergie électrostatique propre U d'un système S, ou simplement de son énergie électrostatique, pour décrire l'énergie électrostatique totale de ce système. On parlera également de l'énergie d'interaction électrostatique $U^{1\leftrightarrow 2}$ entre deux systèmes S_1 et S_2 pour décrire les interactions électrostatiques entre les constituants de ces systèmes.

4 - On prend un système de quatre charges $S_q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ que l'on décompose en deux sous-systèmes $S_q^\alpha = \{q_1, q_2\}$ et $S_q^\beta = \{q_3, q_4\}$. Décomposer l'énergie électrostatique U_q du système S_q en l'énergie propre U_q^α et U_q^β de chaque sous-système et l'énergie d'interaction $U_q^{\alpha\leftrightarrow\beta}$ entre les deux sous-systèmes. On exprimera ces énergies en fonction des charges q_i et des potentiels $V_{i\to j}$ définis à la question précédente.

13 14 23 24

5 - On généralise à présent au cas de deux systèmes S_q^α et S_q^β contenant respectivement N_α et N_β charges $\{q_i\}_{1\leq i\leq N_\alpha}$ et $\{q_j\}_{1\leq j\leq N_\beta}$. En vous appuyant sur la question précédente, montrer que l'on peut écrire l'énergie d'interaction $U_q^{\alpha\leftrightarrow\beta}$ entre S_q^α et S_q^β sous la forme

$$U_q^{\alpha\leftrightarrow\beta} = b\sum_{j\in S_q^\beta} q_j V_{\alpha\to j} \tag{10}$$

12 - On considère un système de deux charges ponctuelles q_1 et q_2 aux positions $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ par rapport à une origine O. En utilisant l'équation (13), décomposer l'énergie électrostatique totale U_{es} de ce système de charges en des termes d'énergie propre et d'énergie d'interaction. Calculer la ou les intégrales non-divergentes, pour obtenir un résultat que l'on mettra sous la forme la plus simple possible, et qui dépendra de q_1, q_2, ε_0 et $r_{12} = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$. Commenter.

1.3 Énergie électrostatique et grandeurs nivelées

Pour éviter d'avoir des divergences, et pour permettre une modélisation continue, on décrit généralement les distributions de charges avec des grandeurs nivelées. Partant d'une distribution de N charges ponctuelles $\{q_i\}_{1\leq i\leq N}$ situées aux positions $\{\vec{r}_i\}_{1\leq i\leq N}$, la distribution de charges nivelées est définie à l'aide d'une fonction fenêtre $f(\vec{r})$:

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} q_i\, f(\vec{r} - \vec{r}_i). \tag{14}$$

Par la suite, on suppose que $f(\vec{r})$ est positive et vérifie :

$$\iiint f(\vec{r})\, \mathrm{d}\tau_{\vec{r}} = 1, \tag{15}$$

où l'intégrale est prise sur tout l'espace. On supposera également que $f(\vec{r})$ est à symétrie sphérique, et qu'elle ne prend des valeurs non-nulles que jusqu'à une distance R de son centre.

13 - Représenter graphiquement le passage d'une distribution de charges ponctuelles à une distribution de charges nivelées. Quelle est la charge totale contenue dans ρ ?

14 - Écrire explicitement la fonction $f(\vec{r})$ pour une charge nivelée de manière homogène sur une boule de rayon R.

Par la suite, on notera ρ_{q_i} la distribution de charge nivelée associée à une charge q_i, que l'on repérera par la position $\vec{r}_i$ de son centre.

15* - Montrer que le potentiel électrique créé par une distribution de charges d'extension spatiale finie, et telle qu'il existe ρ_M vérifiant $|\rho(\vec{r})| < \rho_M$ pour tout $\vec{r}$, est de valeur finie en tout point.

16 - En déduire que l'énergie électrostatique d'une distribution contenant une quantité finie de charges nivelées ne diverge pas.

L'utilisation de grandeurs nivelées permet donc d'éviter les divergences apparaissant avec des charges ponctuelles. Dans les questions suivantes, on étudie comment l'énergie électrostatique est modifiée en travaillant avec de telles grandeurs plutôt qu'avec des charges ponctuelles.

17 - Calculer l'énergie électrostatique propre U_{B_R} d'une charge ponctuelle q nivelée, pour une fenêtre $f(\vec{r})$ qui correspond à une boule homogène de rayon R. On exprimera cette énergie en fonction de q, ε_0 et R.

18 - En relativité, on associe une énergie à toute masse, par la formule $E = mc^2$. En modélisant l'électron comme une boule homogène, et en supposant que toute la masse d'un électron est due à son énergie électrostatique, quel serait son rayon r_e ? On tiendra compte pour cela du champ électrique à l'intérieur comme à l'extérieur de l'électron. On entend généralement que la description classique d'un électron n'est plus valide en dessous de ce rayon. À cette échelle, a-t-on déjà atteint d'autres limitations de la physique classique ?

avec b un facteur numérique à déterminer et $V_{\alpha\to j}$ un potentiel que l'on définira. Obtenir un résultat similaire écrit uniquement à partir d'un potentiel $V_{\beta\to i}$, que l'on définira.

1.2 Formulations intégrales de l'énergie électrostatique

Pour un système S_ρ composé d'une distribution continue de charges $\rho(\vec{r})$, on propose la formulation intégrale suivante de l'énergie électrostatique propre :

$$U_\rho = \frac{1}{2}\iiint \rho(\vec{r})V_\rho(\vec{r})\,\mathrm{d}\tau_{\vec{r}}, \tag{11}$$

où $V_\rho(\vec{r})$ est le potentiel créé en $\vec{r}$ par la distribution S_ρ. Cette intégrale s'étend sur le support de la distribution de ρ, mais peut être de façon équivalente considérée sur tout l'espace.

6 - Pour un système S_ρ composé de deux sous-systèmes S_ρ^α et S_ρ^β, de distributions de charges $\rho_\alpha(\vec{r})$ et $\rho_\beta(\vec{r})$, et créant respectivement des potentiels $V_\alpha(\vec{r})$ et $V_\beta(\vec{r})$, décomposer l'énergie électrostatique U_ρ du système S_ρ en l'énergie propre U_ρ^α et U_ρ^β de chaque sous-système et l'énergie d'interaction $U_\rho^{\alpha\leftrightarrow\beta}$ entre les deux sous-systèmes.

Dans la suite, on admettra que l'énergie d'interaction électrostatique entre deux systèmes S_ρ^α et S_ρ^β peut aussi s'écrire :

$$U_\rho^{\alpha\leftrightarrow\beta} = \iiint \rho_\alpha(\vec{r})V_\beta(\vec{r})\,\mathrm{d}\tau_{\vec{r}} = \iiint \rho_\beta(\vec{r})V_\alpha(\vec{r})\,\mathrm{d}\tau_{\vec{r}}. \tag{12}$$

L'égalité entre ces termes est parfois appelé le théorème de réciprocité en électrostatique.

7 - Voyez-vous une différence entre les formulations U_q et $U_q^{\alpha\leftrightarrow\beta}$ obtenues pour des systèmes de charges ponctuelles, et celles U_ρ et $U_\rho^{\alpha\leftrightarrow\beta}$ obtenues pour des distributions continues de charges ?

8 - Déterminer et commenter les modifications de U_ρ et $U_\rho^{\alpha\leftrightarrow\beta}$ si le potentiel électrostatique est redéfini à une constante ΔV près. On pourra introduire les charges totales Q, Q_α et Q_β contenues dans les systèmes S_ρ, S_ρ^α et S_ρ^β.

9 - À partir de l'équation (11), que l'on écrira comme une intégrale sur tout l'espace, montrer que l'on peut écrire l'énergie électrostatique de tout système S_ρ d'extension spatiale finie sous la forme

$$U_{\mathrm{es}} = \iiint \frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2(\vec{r})\,\mathrm{d}\tau_{\vec{r}}, \tag{13}$$

où $\vec{E}(\vec{r})$ est le champ électrostatique créé par ce système, et où l'intégrale est prise sur tout l'espace.

? 10 - Commenter le signe de cette énergie. Comment expliquer la différence avec le résultat obtenu pour des charges ponctuelles ? Le signe de cette énergie permet-il d'avoir une interaction attractive entre systèmes électrostatiques ?

? 11 - Calculer l'énergie électrostatique U_{es} d'un système composé d'une unique charge ponctuelle q. Commenter sur la possibilité d'utiliser les formulations des équations (11) et (13) pour décrire un système de charges ponctuelles.