

**ECOLE NORMALES SUPERIEURES
ECOLE POLYTECHNIQUE**

CONCOURS D'ADMISSION 2025

VENDREDI 18 AVRIL 2025

08h00 - 13h00

FILIERE PSI - Epreuve n° 8

MODELISATION (XUSR)

Durée : 5 heures

***L'utilisation des calculatrices n'est pas
autorisée pour cette épreuve***

Il est recommandé aux candidats:

- de respecter l'ensemble des notations alphabétiques et numériques du sujet ;*
- de préciser ses propres notations lorsque cela s'avère nécessaire ;*
- de justifier ses hypothèses et rédiger clairement ses réponses ;*
- de numérotter soigneusement les pages de sa copie.*

Modélisation d'un stockage de chaleur haute température dans un réseau multi-énergies

1 Introduction

La production d'électricité et de chaleur est responsable de plus de 70 % des émissions de gaz à effet de serre dans le monde. En France, 75 % des besoins énergétiques des particuliers sont destinés à la production de chaleur (chauffage domestique et eau chaude sanitaire). Au niveau mondial et dans le secteur industriel, 50 % des besoins énergétiques sont destinés à la production de chaleur pour le chauffage et les procédés industriels (par exemple les traitements thermiques ou thermochimiques). Cette production s'appuie encore principalement sur des énergies non renouvelables. Or, afin de décarboner le système énergétique, il est nécessaire de tendre vers une pénétration massive de toutes formes d'énergies renouvelables disponibles (éolienne, photovoltaïque, bioénergie, géothermique, etc.). Le principal inconvénient des énergies renouvelables est leur nature intermittente, de surcroît rarement en phase avec les pics de demande.

Pour réaliser les objectifs de 50 % d'énergies renouvelables dans le mix énergétique français en 2050, une des solutions envisagées est l'approche des réseaux multi-énergies, qui consiste à coupler différents réseaux (électriques, gaz et chaleur), constitués de convertisseurs d'énergie d'un type vers un autre et de systèmes de stockage multi-technologiques. Les réseaux multi-énergies habituellement proposés incluent des technologies matures et commercialisées (cogénération, stockage d'eau chaude, batteries lithium, photovoltaïque, pompes à chaleur, etc.). L'approche multi-énergie est illustrée par la cogénération, c'est-à-dire produire et exploiter simultanément l'électricité et la chaleur venant d'une même énergie primaire. D'autres procédés industriels dont l'objectif premier n'est pas la production d'énergie rejettent également de la chaleur. Appelée chaleur fatale, elle n'est aujourd'hui que rarement récupérée et pourrait être intégrée à des réseaux multi-énergies. En effet la chaleur fatale est une ressource énergétique existante et valorisable avec un potentiel global qui s'élève à plus de 68 000 TWh/an dans le monde. En France, l'agence de la transition écologique (ADEME) a estimé le gisement de chaleur fatale dans l'industrie à plus de 100 TWh/an, dont plus de 50 % à moins de 100 °C.

1.1 Stockage de la chaleur

Le stockage thermique est un élément essentiel pour la récupération de chaleurs fatales, notamment les chaleurs à haute température issues de procédés industriels, par essence intermittents. Il est possible de stocker la chaleur sous trois formes : sensible, latente et thermochimique. Le stockage de chaleur sensible consiste à échauffer puis refroidir un matériau et se traduit par un changement de température sans qu'il n'y ait ni changement d'état ni modification chimique. La densité de stockage dépend directement de l'écart de température.

Le stockage de la chaleur latente consiste à modifier l'état physique du matériau de stockage. Du fait de sa faible variation de volume, la transition liquide/solide est la plus communément utilisée. Ce type de stockage offre une densité relativement élevée et permet une restitution d'énergie à température constante. En revanche, il nécessite le plus souvent des échangeurs adaptés, car la résistance de conduction dans le matériau à l'état solide pénalise l'échange de chaleur.

Le stockage thermochimique exploite des réactions chimiques exothermiques et endothermiques réversibles. Cette solution permet d'atteindre des densités de stockage potentiellement très élevées, de restituer la chaleur à température contrôlée et de stocker l'énergie sur de longues durées. Elle

nécessite toutefois un échangeur-réacteur capable de gérer les réactifs et les produits et de maintenir les conditions propices aux réactions chimiques.

Malgré leurs atouts évidents, les stockages de chaleur latente ou thermochimique ne sont pas assez technologiquement matures pour les applications à grandes échelles (stockage de plusieurs centaines de MW·h). Seul le stockage massif de chaleur sensible semble aujourd'hui technologiquement mature, et est donc retenu pour l'étude suivante.

1.2 Stockage thermique de type thermocline

Parmi les solutions de stockage thermique sensible à haute température, le stockage thermique de type thermocline a un grand intérêt dans un réseau multi-énergies grâce à son faible coût économique ($\sim 15 \text{ €/kWh}$) et environnemental ($\sim 1 \text{ gCO}_2/\text{kWh}$). Ce stockage est basé sur le transfert d'un fluide caloporteur (liquide ou gaz) qui circule à travers un lit fixe de particules solides appelé garnissage. On distingue généralement deux phases de fonctionnement :

- une phase de charge, au cours de laquelle le fluide chaud est injecté d'un côté de la cuve et le fluide froid est extrait de l'autre. Une zone chaude quasi-isotherme se crée alors en entrée de cuve puis se déplace progressivement à mesure que la chaleur est injectée. Un gradient thermique séparant la zone chaude de la zone froide apparaît, définissant la thermocline dont l'épaisseur dépend à la fois de la vitesse du fluide et de la diffusion de la chaleur dans le matériau ;
- une phase de décharge, où le sens de circulation du fluide est inversé pour récupérer de la chaleur.

Le mot thermocline fait référence au gradient de température dans le stockage thermique. On retrouve ce mot par exemple dans les sciences océaniques, également pour désigner une variation spatiale de température.

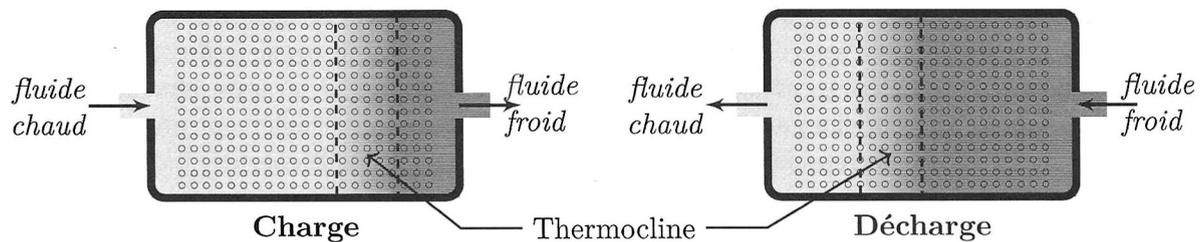


FIGURE 1 – Schéma simplifié du fonctionnement du stockage thermique thermocline pendant la phase de charge et de décharge.

Le gradient thermique visible dans la zone thermocline est dû à la diffusion thermique et à des phénomènes liés à l'advection, qui apparaissent au sein des solides de garnissage. La taille des particules est choisie de façon à limiter les pertes de charges lors de la circulation du fluide et donc la puissance consommée, tout en assurant la meilleure capacité thermique possible.

1.3 Solution étudiée

La société Eco-Tech CERAM a développé une solution innovante de stockage d'énergie thermique de type thermocline à haute température. Le stockage est composé d'un conteneur qui encapsule une partie des tuyaux où l'air circule dans et depuis le milieu de stockage pendant la charge et la décharge. En outre, le conteneur comprend un milieu solide granulaire¹, à travers lequel l'air chaud est soufflé, pour le stockage de la chaleur. Il contient également des couches d'isolants pour limiter les pertes de chaleur à travers les parois. Cette technologie est développée par module capable de stocker la chaleur à une température pouvant aller théoriquement jusqu'à 900 °C .

Dans la partie 2 de ce sujet, on aborde l'étude du stockage thermique par thermocline d'un point de vue énergétique. Dans la partie 3, on étudiera la conversion chaleur vers électricité qui peut être adjointe au stockage. La solution étudiée associera une machine thermodynamique à cycle de Stirling avec une génératrice linéaire.

1. Un matériau granulaire est un matériau constitué d'un grand nombre de particules solides distinctes.

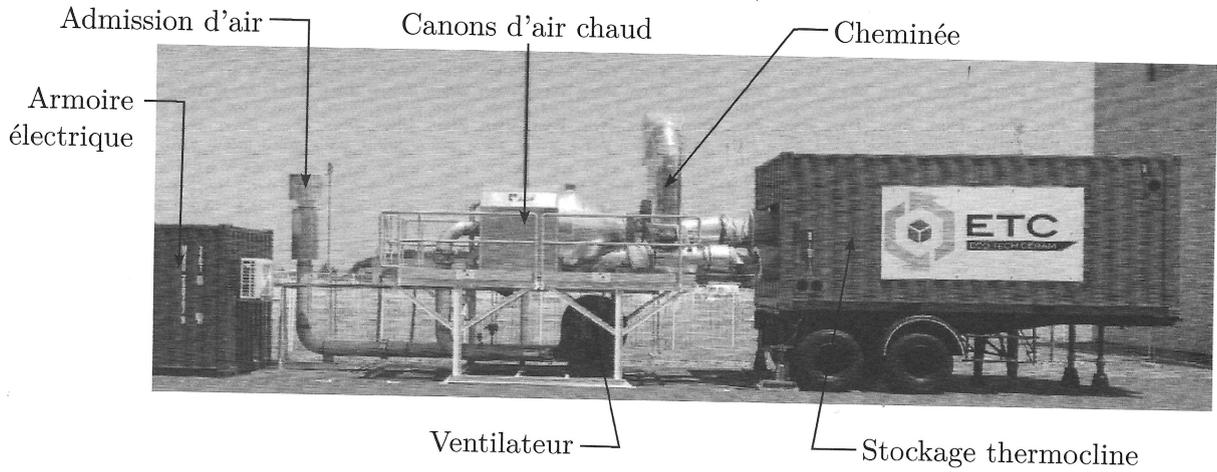


FIGURE 2 – Stockage thermocline Eco-Stock® développé par Eco-Tech CERAM.

Même s'il est conseillé de traiter les parties dans l'ordre du sujet (pour comprendre la logique d'enchaînement des questions et les différentes notations), le candidat pourra, s'il le souhaite, tirer profit de l'indépendance des parties.

2 Étude énergétique du stockage thermique par thermocline

Cette partie vise à valider le fonctionnement général et les principales caractéristiques énergétiques de cette solution de stockage thermique par thermocline.

2.1 Évaluation de l'autodécharge

On cherche à évaluer le temps d'autodécharge du stockage. C'est-à-dire à quelle vitesse celui-ci perdra-t-il son énergie stockée lorsqu'il est laissé au repos pendant une longue durée ? On considère dans cette sous-partie que l'autodécharge est provoquée uniquement par des pertes par conduction thermique au travers des parois extérieures du stockage. La température du stockage est notée T . Elle est considérée uniforme dans tout le stockage pour cette sous-partie. On considère que le stockage est constitué de briques réfractaires, qu'il est initialement complètement chargé à sa température maximale $T = T_1 = 750\text{ °C}$.

Les dimensions du stockage sont : hauteur $H = 1,7\text{ m}$; longueur $L = 3\text{ m}$; profondeur $B = 1,7\text{ m}$. On considérera que sa section transversale $S = HB$ est d'environ 3 m^2 . On notera V son volume. L'isolant garnissant toutes les parois extérieures a une épaisseur $e = 10\text{ cm}$ et une conductivité thermique $\lambda_i = 0,03\text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$. La température ambiante extérieure T_{amb} est considérée à 20 °C . La capacité thermique massique des roches composant le stockage est $c_s = 1\,200\text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ et leur masse volumique est $\rho_s = 3\,000\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

- Q1. Exprimer et calculer la résistance thermique R_{th} des parois isolantes.
- Q2. Exprimer le flux thermique sortant ϕ en fonction de R_{th} , de la température du stockage T et de la température ambiante T_{amb} . En déduire la valeur de la puissance des pertes via les parois lorsque le stockage est à sa température maximum T_1 .
- Q3. À partir du premier principe de la thermodynamique, établir l'équation différentielle régissant l'autodécharge. Évaluer la constante de temps de cette équation différentielle. En déduire la durée au bout de laquelle la température du stockage atteindra 50 % de la température initiale. (On pourra considérer $\ln(2) \approx 0,7$.) Faire l'application numérique.
- Q4. Conclure quant à la capacité d'un stockage thermique à conserver de l'énergie sur une longue période. Sur quels paramètres jouer pour améliorer la durée de stockage ?

2.2 Modélisation et simulation du transfert thermique

On cherche à établir un modèle du stockage thermique sensible de type thermocline afin d'estimer la répartition spatiale de la température au sein du stockage.

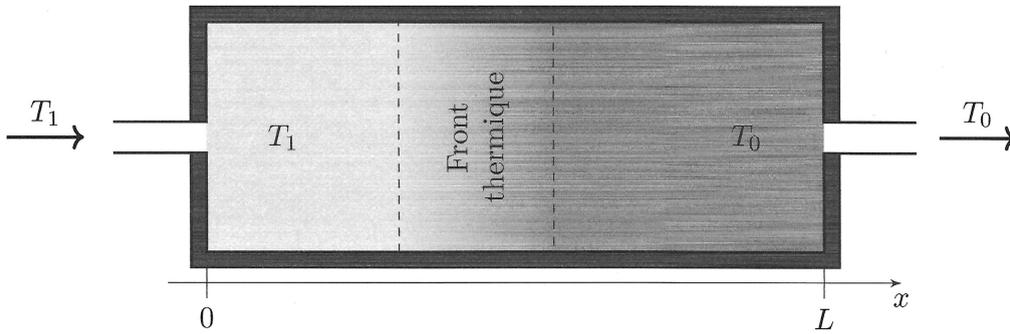


FIGURE 3 – Principe de la charge du milieu granulaire.

L'unité de stockage, initialement à la température uniforme T_0 , est alimentée en air chaud (fluide f) à T_1 sur la paroi en $x = 0$ m et réchauffe progressivement le solide s . Une zone de transition existe, se traduisant par une variation progressive de T_1 à T_0 . Cette zone est appelée « front thermique ».

L'unité de stockage est constituée par un milieu poreux qui permet à l'air de traverser un lit de particules de roches (solides) et ainsi échanger de la chaleur. On note $T_f(x, t)$ la température de l'air, $T_s(x, t)$ celle des roches et h le coefficient conducto-convectif entre ces deux milieux tel que la densité de courant thermique sortant du solide à l'interface air-solide soit définie par $j_C(x, t) = h(T_s(x, t) - T_f(x, t))$.

On note $\varepsilon = (1 - V_s/V)$ la porosité où V_s est le volume des particules solides et V le volume total, c'est-à-dire le rapport entre le volume occupé par l'air et le volume total de l'unité de stockage. Les propriétés thermiques de l'air et des roches sont supposées homogènes et isotropes. On note λ_f et λ_s les conductivités thermiques, c_f et c_s les capacités thermiques massiques respectivement de l'air et des roches. Toutes ces grandeurs sont supposées constantes. On note aussi :

- S la section transversale du lit ;
- L la longueur du lit ;
- \dot{m}_f le débit massique d'air forcé.

Q5. Par une étude des échanges thermiques de l'épaisseur dx prise à l'intérieur de l'unité de stockage, établir le système de deux équations couplées vérifiées par la température de l'air $T_f(x, t)$ et des roches $T_s(x, t)$ et montrer qu'il est de la forme :

$$C_1 \frac{\partial T_s}{\partial t}(x, t) = C_2 \frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2}(x, t) - h(T_s(x, t) - T_f(x, t))$$

$$C_3 \left(\frac{\partial T_f}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial T_f}{\partial x}(x, t) \right) = C_4 \frac{\partial^2 T_f}{\partial x^2}(x, t) + h(T_s(x, t) - T_f(x, t))$$

Donner les expressions des constantes $(C_i)_{1 \leq i \leq 4}$ en fonctions des données et caractéristiques du problème.

Q6. Montrer que l'on peut poser $\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\dot{m}_f L}{m_f} = C_5$ où m_f est la masse d'air dans le lit.

Dans ce qui suit, on souhaite simuler ce système d'équations afin de déterminer l'évolution de la répartition spatiale de la température au sein du stockage en fonction du temps. Pour ce faire, on construit une discrétisation de l'espace et du temps et on note $U_{i,j} = T_s(x_i, t_j)$ et $V_{i,j} = T_f(x_i, t_j)$ respectivement la température des roches et de l'air à la position $x_i \in [0, L]$ à l'instant $t_j \geq 0$. On initialise de plus le code suivant :

```
import numpy as np
T0 = 150 ; T1 = 525 ; L = 3 ; h = 30
C1 = 1352250.000 ; C2 = 0.020 ; C3 = 480.000 ; C4 = 3.800 ; C5 = 0.173
```

```

nx = 1001 ; X = np.linspace(0, L, nx) ; dx = X[1]-X[0]
dt = 0.01 ; T = np.arange(0, 36000, dt) ; nt = len(T) # 10 h, par pas de 10 ms
U,V = np.zeros((nx,nt)), np.zeros((nx,nt)) # tableaux de flottants nuls

```

- Q7. Décrire les conditions initiales et aux limites. Donner les instructions en Python.
- Q8. En utilisant le schéma d'Euler explicite, déterminer une relation de récurrence permettant de simuler ce système d'équations.
- Q9. Écrire le code Python permettant de réaliser la simulation sur une durée de 10h. Préciser s'il y a des effets de bord.
- Q10. Préciser quels sont les paramètres qui peuvent influencer sur la qualité de l'approximation. En considérant des flottants sur 64 bits, estimer la place mémoire nécessaire et conclure quant à la faisabilité d'une telle simulation.

2.3 Énergie stockable et puissance injectée

On cherche à présent à estimer l'énergie stockable dans ce stockage thermique, ainsi que la puissance qu'il reçoit par le flux d'air qui y est injecté. L'air constitue ici le fluide de transfert de chaleur. On supposera à nouveau pour cette sous-partie une température homogène dans tout le stockage. La température ambiante extérieure T_{amb} est considérée à 20°C . La température de l'air injecté sera supposée égale à la température maximum du stockage $T_1 = 750^\circ\text{C}$. Le débit d'air volumique D sera considéré à $0,5\text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$. La masse volumique de l'air sera considérée comme $\rho_f = 1,2\text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et sa capacité thermique massique $c_f = 1\,000\text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

- Q11. Évaluer l'énergie stockable E en fonction de la capacité calorifique, des dimensions du stockage et de la température moyenne du matériau. Faire l'application numérique pour la température maximale $T = T_1$.
- Q12. Évaluer la puissance P d'un flux d'air de débit D et de température T_1 .

2.4 Interprétation physique

La figure 4a représente un profil de température au long du stockage lors d'une phase de charge : de l'air à T_1 est injecté par la gauche du stockage (en $x = 0\text{ m}$). La figure 4b représente également l'évolution du profil de température dans le stockage, mais lors d'une décharge. Le flux d'air est alors inversé, de l'air à $T_0 = 150^\circ\text{C}$ est injecté par la droite du stockage (en $x = 3\text{ m}$) et ressort par la gauche. Les relevés expérimentaux sont indiqués par des points. Les traits pleins correspondent à l'évolution prédite par modélisation.

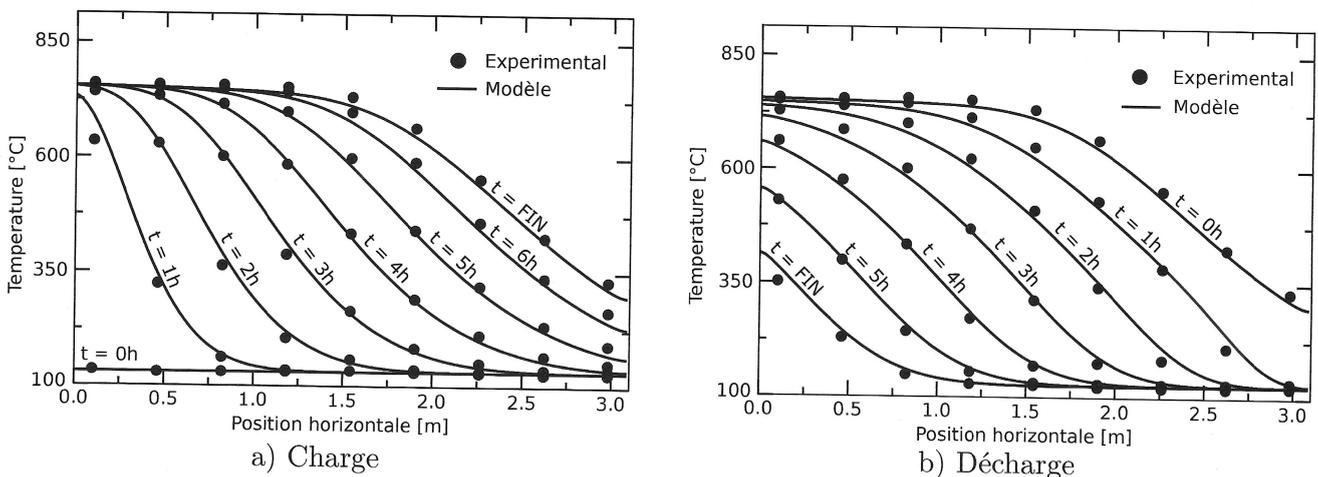


FIGURE 4 – Évolution de la température dans le stockage thermique lors d'une phase de charge (a) et lors d'une phase de décharge (b).

On fait ici l'hypothèse que l'air et le matériau sont à la même température en tout point du stockage.

- Q20.** Quel est le sens physique de A_0 . En l'absence de pertes, justifier pourquoi il est ici considéré constant au cours du temps.
- Q21.** En utilisant l'équation de la chaleur précédente, évaluée en $x = 0$, déduire l'équation différentielle régissant l'évolution temporelle de A_1 .
- Q22.** Résoudre cette équation et représenter graphiquement l'évolution temporelle de $A_1(t)$.

On considère à présent une solution de la forme :

$$T(x, t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n(t) \cos(n\omega_0 x) .$$

- Q23.** Commenter la forme proposée. Justifier qu'une telle expression permettra de modéliser la température aussi bien temporellement que spatialement. Exprimer l'équation de la chaleur à l'aide de l'expression proposée pour $T(x, t)$.

On cherche à présent à déterminer une équation différentielle régissant chaque coefficient A_n indépendamment. Pour cela, on introduit le produit scalaire entre deux signaux s_1 et s_2 ci-dessous :

$$\langle s_1, s_2 \rangle = \int_0^L s_1(x) \cdot s_2(x) dx .$$

- Q24.** Au sens de ce produit scalaire, vérifier que deux harmoniques $\cos(n\omega_0 x)$ et $\cos(m\omega_0 x)$, $n \neq m$, sont orthogonales. Que se passe-t-il dans le cas $n = m$? En déduire l'équation différentielle régissant individuellement chaque terme $A_n(t)$, $n \geq 1$. Résoudre ces équations.

Le profil de température initial est à présent décrit comme constant par morceaux avec une thermocline d'épaisseur nulle. La température initiale vaut donc T_1 pour $x \in [0 ; L/2]$ et T_0 pour $x \in [L/2 ; L]$. On supposera que ce profil sur l'intervalle $[0 ; L]$ est une portion d'un signal périodique. Un développement en série de Fourier est donc possible. On rappelle qu'un signal périodique $s(x)$ de période Λ admet une décomposition en série de Fourier de la forme

$$s(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega_0 x) + B_n \sin(n\omega_0 x)$$

où $\omega_0 = \frac{2\pi}{\Lambda}$ et les coefficients A_n et B_n sont obtenus par

$$A_0 = \frac{1}{\Lambda} \int_0^L s(x) dx \quad ; \quad A_n = \frac{2}{\Lambda} \int_0^L s(x) \cos(n\omega_0 x) dx \quad ; \quad B_n = \frac{2}{\Lambda} \int_0^L s(x) \sin(n\omega_0 x) dx .$$

- Q25.** Quel est le profil de température final ? Déterminer les valeurs initiales des coefficients $A_n(0)$, pour $n \in \mathbb{N}$. Justifier l'absence des coefficients B_n dans l'expression proposée pour la température.
- Q26.** Représenter graphiquement l'évolution temporelle de A_1, A_2, A_3, A_4 et A_5 .
- Q27.** Combien de temps serait nécessaire avant que la température soit uniforme, à 1 % près ? (On pourra considérer $\ln(100) \approx 4,6$). Comparée aux ordres de grandeurs temporels calculés auparavant, la constante de temps de diffusion interne semble-t-elle problématique ?

2.7 Rendement sur cycle

La figure 5a, page 10, représente le profil de température de sortie en fonction du temps lors d'une phase de charge à puissance constante. L'énergie stockée est également représentée. La figure 5b représente les mêmes grandeurs lors d'une phase de décharge.

- Q28.** Expliquer l'évolution de l'énergie stockée et de la température de sortie lors de la phase de charge.

- Q20.** Quel est le sens physique de A_0 . En l'absence de pertes, justifier pourquoi il est ici considéré constant au cours du temps.
- Q21.** En utilisant l'équation de la chaleur précédente, évaluée en $x = 0$, déduire l'équation différentielle régissant l'évolution temporelle de A_1 .
- Q22.** Résoudre cette équation et représenter graphiquement l'évolution temporelle de $A_1(t)$.

On considère à présent une solution de la forme :

$$T(x, t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n(t) \cos(n\omega_0 x) .$$

- Q23.** Commenter la forme proposée. Justifier qu'une telle expression permettra de modéliser la température aussi bien temporellement que spatialement. Exprimer l'équation de la chaleur à l'aide de l'expression proposée pour $T(x, t)$.

On cherche à présent à déterminer une équation différentielle régissant chaque coefficient A_n indépendamment. Pour cela, on introduit le produit scalaire entre deux signaux s_1 et s_2 ci-dessous :

$$\langle s_1, s_2 \rangle = \int_0^L s_1(x) \cdot s_2(x) dx .$$

- Q24.** Au sens de ce produit scalaire, vérifier que deux harmoniques $\cos(n\omega_0 x)$ et $\cos(m\omega_0 x)$, $n \neq m$, sont orthogonales. Que se passe-t-il dans le cas $n = m$? En déduire l'équation différentielle régissant individuellement chaque terme $A_n(t)$, $n \geq 1$. Résoudre ces équations.

Le profil de température initial est à présent décrit comme constant par morceaux avec une thermocline d'épaisseur nulle. La température initiale vaut donc T_1 pour $x \in [0 ; L/2]$ et T_0 pour $x \in [L/2 ; L]$. On supposera que ce profil sur l'intervalle $[0 ; L]$ est une portion d'un signal périodique. Un développement en série de Fourier est donc possible. On rappelle qu'un signal périodique $s(x)$ de période Λ admet une décomposition en série de Fourier de la forme

$$s(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega_0 x) + B_n \sin(n\omega_0 x)$$

où $\omega_0 = \frac{2\pi}{\Lambda}$ et les coefficients A_n et B_n sont obtenus par

$$A_0 = \frac{1}{\Lambda} \int_0^L s(x) dx \quad ; \quad A_n = \frac{2}{\Lambda} \int_0^L s(x) \cos(n\omega_0 x) dx \quad ; \quad B_n = \frac{2}{\Lambda} \int_0^L s(x) \sin(n\omega_0 x) dx .$$

- Q25.** Quel est le profil de température final ? Déterminer les valeurs initiales des coefficients $A_n(0)$, pour $n \in \mathbb{N}$. Justifier l'absence des coefficients B_n dans l'expression proposée pour la température.
- Q26.** Représenter graphiquement l'évolution temporelle de A_1, A_2, A_3, A_4 et A_5 .
- Q27.** Combien de temps serait nécessaire avant que la température soit uniforme, à 1 % près ? (On pourra considérer $\ln(100) \approx 4,6$). Comparée aux ordres de grandeurs temporels calculés auparavant, la constante de temps de diffusion interne semble-t-elle problématique ?

2.7 Rendement sur cycle

La figure 5a, page 10, représente le profil de température de sortie en fonction du temps lors d'une phase de charge à puissance constante. L'énergie stockée est également représentée. La figure 5b représente les mêmes grandeurs lors d'une phase de décharge.

- Q28.** Expliquer l'évolution de l'énergie stockée et de la température de sortie lors de la phase de charge.

Le système de conversion étudié est constitué d'un moteur Stirling double-effet associé à une génératrice linéaire tubulaire à aimants permanents. Le moteur est constitué de deux moteurs Stirling identiques (de type β), partageant le même piston, et disposés de manière symétrique par rapport à l'axe central de façon à travailler en opposition de phase thermodynamique (figure 6).

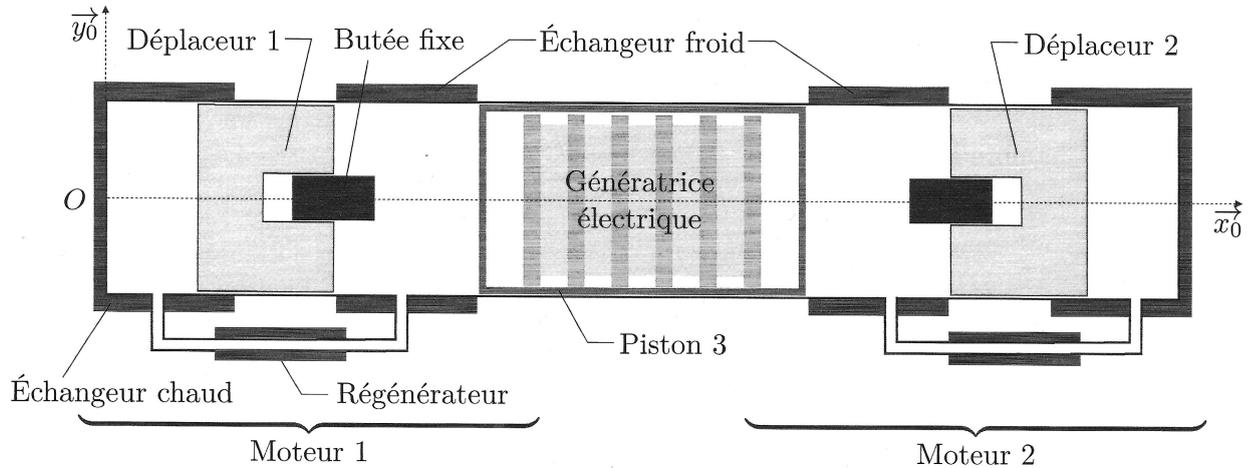


FIGURE 6 – Structure du moteur Stirling « double-effet ».

Chaque moteur est constitué d'un déplaceur dont le mouvement est induit par les échanges thermiques et les transferts de gaz entre les chambres froides et chaudes. Les variations de pression dans chaque moteur permettent de mettre en mouvement le piston 3 qui, avec une génératrice linéaire, transforme cette énergie mécanique en énergie électrique. Afin d'optimiser le rendement, il est important de faire fonctionner les deux moteurs en opposition de phase et donc de contrôler le déplacement du piston 3.

Le cycle théorique de Stirling comprend quatre transformations thermodynamiques : une compression isotherme où le maintien en température est assuré par l'échangeur froid, un chauffage isochore, une détente isotherme où le maintien en température est assuré par l'échangeur chaud, un refroidissement isochore. Le gaz de travail circule entre le volume de détente et le volume de compression poussé par le déplaceur et au travers d'un régénérateur (supposé parfait). Le régénérateur permet de stocker la chaleur du gaz de travail pour le déplacement entre le volume de détente et le volume de compression et de la restituer au gaz de travail en sens inverse.

De part sa structure et son nombre très limité de liaisons, le moteur Stirling double-effet permet de limiter les pertes mécaniques. De par sa compacité, il permet aussi de limiter les pertes thermiques. Cependant, cette structure en opposition de phase thermodynamique est difficile à maîtriser car la position du piston 3, commandée par l'intermédiaire de la force électromagnétique de la génératrice électrique, dépend aussi de la position des deux déplaceurs, par un couplage thermo-mécanique non-linéaire.

3.1 Modélisation de la chaîne thermo-mécanique

Le moteur Stirling « double-effet » comporte trois éléments mobiles et peut donc être modélisé par un système oscillant du type masse-ressort-amortisseur à trois degrés de liberté. Pour établir ce modèle, nous ne considérons tout d'abord que le moteur 1 (figure 7, page 12). On associe au bâti le repère $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ et on considère que le moteur 1 est constitué des deux pièces mobiles :

- le déplaceur, de masse m_1 , de section S , de section interne S_{int} et de centre d'inertie G_1 , tel que $\overrightarrow{OG_1}(t) = (\ell_1 + x_1(t)) \vec{x}_0$ où ℓ_1 est la position d'équilibre moyenne du déplaceur et où $x_1(t)$ caractérise son déplacement autour de cette position ;
- le piston 3, de masse m_3 , de section S et de centre d'inertie G_3 , tel que $\overrightarrow{OG_3} = (\ell_3 + x_3(t)) \vec{x}_0$ où ℓ_3 est la position d'équilibre moyenne du piston et où $x_3(t)$ caractérise son déplacement autour de cette position.

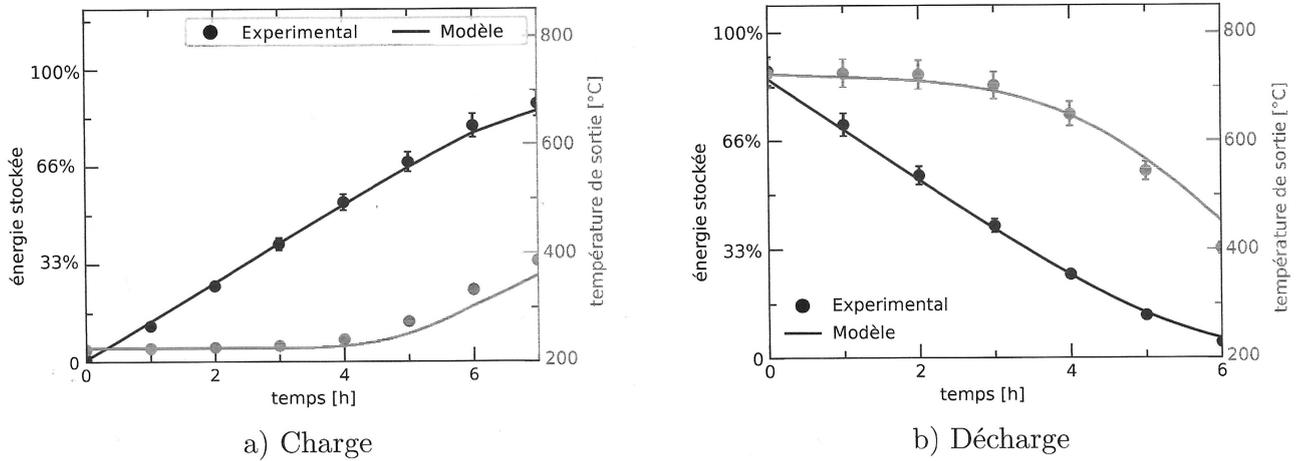


FIGURE 5 – Évolution de la température de sortie et de l'énergie stockée au cours d'une phase de charge (a) et d'une phase de décharge (b). L'énergie stockée est exprimée en pourcentage de l'énergie stockable maximale.

À partir de la figure 5, on approximera le profil temporel de l'énergie stockée E et celui de la température de sortie T_0 respectivement par :

$$E(t) = \hat{E} \left[1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \right] \quad \text{et} \quad T_0(t) = T_{\text{amb}} + (\hat{T} - T_{\text{amb}}) \exp\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

où τ , \hat{T} et \hat{E} désignent des constantes identifiées selon ces relevés expérimentaux.

Q29. Exprimer la température de sortie en fonction de l'énergie stockée. En vous appuyant sur la question 2, en déduire l'expression des pertes en fonction de l'énergie stockée. Quels paramètres de dimensionnement du stockage permettraient de diminuer les pertes ?

On considère une charge d'une durée t_c , pendant laquelle le stockage passe de $E(t = 0) = 0$ à $E(t = t_c) = E_c$.

Q30. Exprimer l'énergie des pertes E_{pertes} au cours de cette charge, en fonction de t_c , puis de E_c .

On définit le rendement d'un cycle de charge-décharge par le ratio entre l'énergie récupérée et l'énergie initialement injectée dans le stockage. On suppose que les pertes sont similaires entre la phase de charge et celle de décharge. Seules les pertes par le flux d'air sortant sont ici considérées. L'énergie injectée E_{inj} se décompose entre les pertes E_{pertes} et l'énergie stockée E_c . L'énergie récupérée sera quant à elle égale à l'énergie stockée E_c moins les pertes E_{pertes} . Le rendement sur cycle est alors défini comme :

$$\eta = \frac{E_{\text{inj}} - 2E_{\text{pertes}}}{E_{\text{inj}}}$$

Q31. Exprimer le rendement au cours d'un cycle en fonction de E_c . Indiquer les limites de ce rendement sur cycle lorsque E_c tend vers 0, puis vers \hat{E} . Critiquer les hypothèses de modélisation. Sur quels paramètres peut-on jouer pour améliorer le rendement sur cycle ?

3 Conversion thermo-mécano-électrique

Le système de stockage de chaleur est un élément fondamental pour les réseaux multi-énergies, qui peut être utilisé de multiples façons. Il peut permettre de faire correspondre les moments d'utilisation de la chaleur – par exemple par des réseaux de chaleur urbains – avec les moments de production, par des chaleurs fatales ou bien par cogénération. L'efficacité énergétique de la cogénération peut alors atteindre plus de 85 % de rendement global entre la quantité d'énergie utile et celle d'énergie primaire consommée. Par ailleurs, il est également possible d'utiliser la chaleur stockée pour générer de l'électricité. Un système de conversion thermo-électrique doit alors être associé au stockage.

Le système de conversion étudié est constitué d'un moteur Stirling double-effet associé à une génératrice linéaire tubulaire à aimants permanents. Le moteur est constitué de deux moteurs Stirling identiques (de type β), partageant le même piston, et disposés de manière symétrique par rapport à l'axe central de façon à travailler en opposition de phase thermodynamique (figure 6).

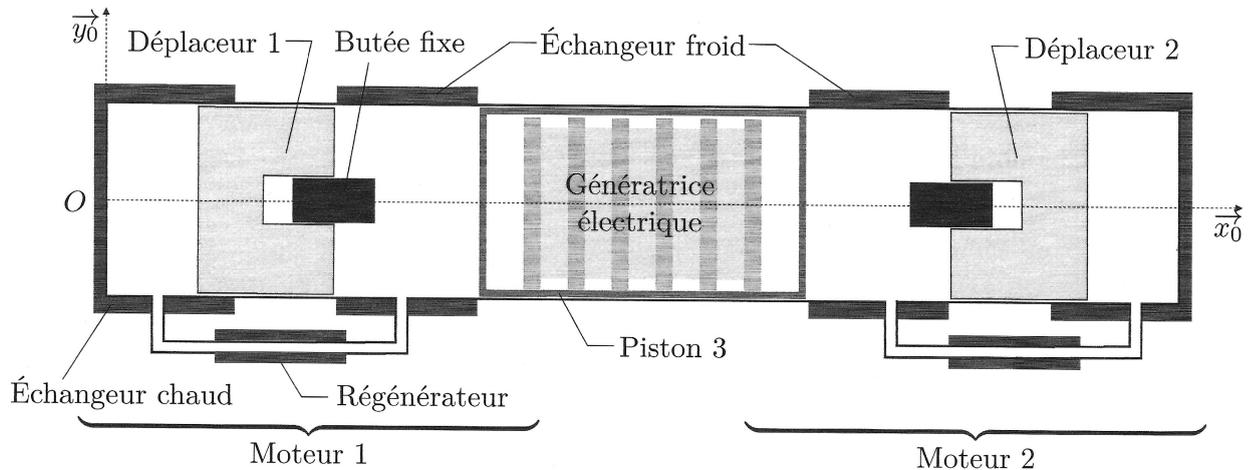


FIGURE 6 – Structure du moteur Stirling « double-effet ».

Chaque moteur est constitué d'un déplaceur dont le mouvement est induit par les échanges thermiques et les transferts de gaz entre les chambres froides et chaudes. Les variations de pression dans chaque moteur permettent de mettre en mouvement le piston 3 qui, avec une génératrice linéaire, transforme cette énergie mécanique en énergie électrique. Afin d'optimiser le rendement, il est important de faire fonctionner les deux moteurs en opposition de phase et donc de contrôler le déplacement du piston 3.

Le cycle théorique de Stirling comprend quatre transformations thermodynamiques : une compression isotherme où le maintien en température est assuré par l'échangeur froid, un chauffage isochore, une détente isotherme où le maintien en température est assuré par l'échangeur chaud, un refroidissement isochore. Le gaz de travail circule entre le volume de détente et le volume de compression poussé par le déplaceur et au travers d'un régénérateur (supposé parfait). Le régénérateur permet de stocker la chaleur du gaz de travail pour le déplacement entre le volume de détente et le volume de compression et de la restituer au gaz de travail en sens inverse.

De part sa structure et son nombre très limité de liaisons, le moteur Stirling double-effet permet de limiter les pertes mécaniques. De par sa compacité, il permet aussi de limiter les pertes thermiques. Cependant, cette structure en opposition de phase thermodynamique est difficile à maîtriser car la position du piston 3, commandée par l'intermédiaire de la force électromagnétique de la génératrice électrique, dépend aussi de la position des deux déplaceurs, par un couplage thermo-mécanique non-linéaire.

3.1 Modélisation de la chaîne thermo-mécanique

Le moteur Stirling « double-effet » comporte trois éléments mobiles et peut donc être modélisé par un système oscillant du type masse-ressort-amortisseur à trois degrés de liberté. Pour établir ce modèle, nous ne considérons tout d'abord que le moteur 1 (figure 7, page 12). On associe au bâti le repère $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ et on considère que le moteur 1 est constitué des deux pièces mobiles :

- le déplaceur, de masse m_1 , de section S , de section interne S_{int} et de centre d'inertie G_1 , tel que $\overrightarrow{OG_1}(t) = (\ell_1 + x_1(t)) \vec{x}_0$ où ℓ_1 est la position d'équilibre moyenne du déplaceur et où $x_1(t)$ caractérise son déplacement autour de cette position ;
- le piston 3, de masse m_3 , de section S et de centre d'inertie G_3 , tel que $\overrightarrow{OG_3} = (\ell_3 + x_3(t)) \vec{x}_0$ où ℓ_3 est la position d'équilibre moyenne du piston et où $x_3(t)$ caractérise son déplacement autour de cette position.

3.1.2 Modèle thermodynamique des chambres M et B

On suppose que la quantité de gaz à l'intérieur des chambres M et B est fixe et que ces deux chambres sont adiabatiques. On note γ l'indice adiabatique du gaz et :

- p_{b0} et V_{b0} respectivement la pression et le volume de référence de la chambre B pour $x_1 = 0$ m ;
- p_{m0} et V_{m0} respectivement la pression et le volume de référence de la chambre M pour $x_3 = 0$ m.

En pratique ces deux chambres jouent le rôle de « ressorts gazeux ».

Q38. Montrer que, au voisinage de $x_1 = 0$ m, on a :

$$p_b(t) \approx p_{b0} (1 + B_1 x_1(t)) .$$

Préciser l'expression de B_1 . En déduire une expression de p_m au voisinage de $x_3 = 0$ m.

3.1.3 Modèle complet du moteur Stirling double-effet

En tenant compte des pertes de charges induites par la circulation du gaz ainsi que du frottement des pièces mécaniques, il vient que le fonctionnement du moteur 1 peut être décrit par le système d'équations :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1(t) = K_{11}x_1(t) + K_{13}x_3(t) + D_{11}\dot{x}_1(t) + D_{13}\dot{x}_3(t) \\ m_3 \ddot{x}_3(t) = K_{31}x_1(t) + K_{33}x_3(t) + D_{33}\dot{x}_3(t) + F_{gen}(t) \end{cases}$$

Q39. Justifier que le modèle complet du moteur Stirling double-effet puisse s'écrire :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1(t) = K_{11}x_1(t) + K_{13}x_3(t) + D_{11}\dot{x}_1(t) + D_{13}\dot{x}_3(t) \\ m_3 \ddot{x}_3(t) = 2K_{31}x_1(t) + K_{33}x_3(t) + D_{33}\dot{x}_3(t) + F_{gen}(t) \end{cases}$$

Q40. Après traduction dans le domaine de Laplace, montrer que la fonction de transfert du moteur Stirling double-effet est de la forme :

$$H_{stir}(p) = \frac{X_3(p)}{F_{gen}(p)} = K_{stir} \frac{1 + a_1p + a_2p^2}{1 + b_1p + b_2p^2 + b_3p^3 + b_4p^4} .$$

Donner les expressions du gain K_{stir} et des coefficients $(a_i)_{1 \leq i \leq 2}$ et $(b_i)_{1 \leq i \leq 4}$.

On représente sur la figure 8, les pôles et les zéros de la fonction de transfert $H_{stir}(p)$ et on donne $K_{stir} = 4,76 \times 10^{-6} \text{ m} \cdot \text{N}^{-1}$.

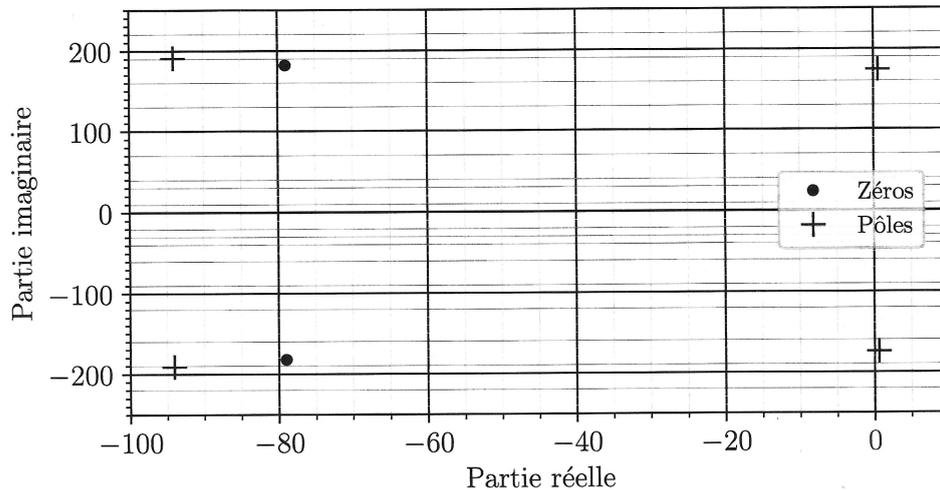
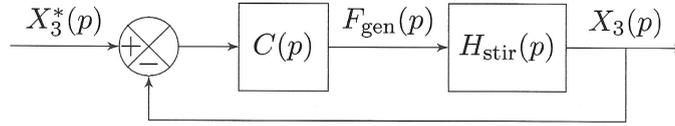


FIGURE 8 – Pôles et les zéros de $H_{stir}(p)$.

Q41. Préciser si le système est stable puis proposer une solution pour maximiser la conversion d'énergie thermique en énergie électrique.

Afin de réaliser une conversion électromécanique, on souhaite que le mouvement du mobile soit une oscillation autoentretenue. Une telle oscillation peut être obtenue en mettant le système en résonance. À cet effet, on se propose de mettre en place une régulation selon le schéma de principe suivant.



Les diagrammes de Bode de la fonction de transfert H_{stir} sont fournis figure 9.

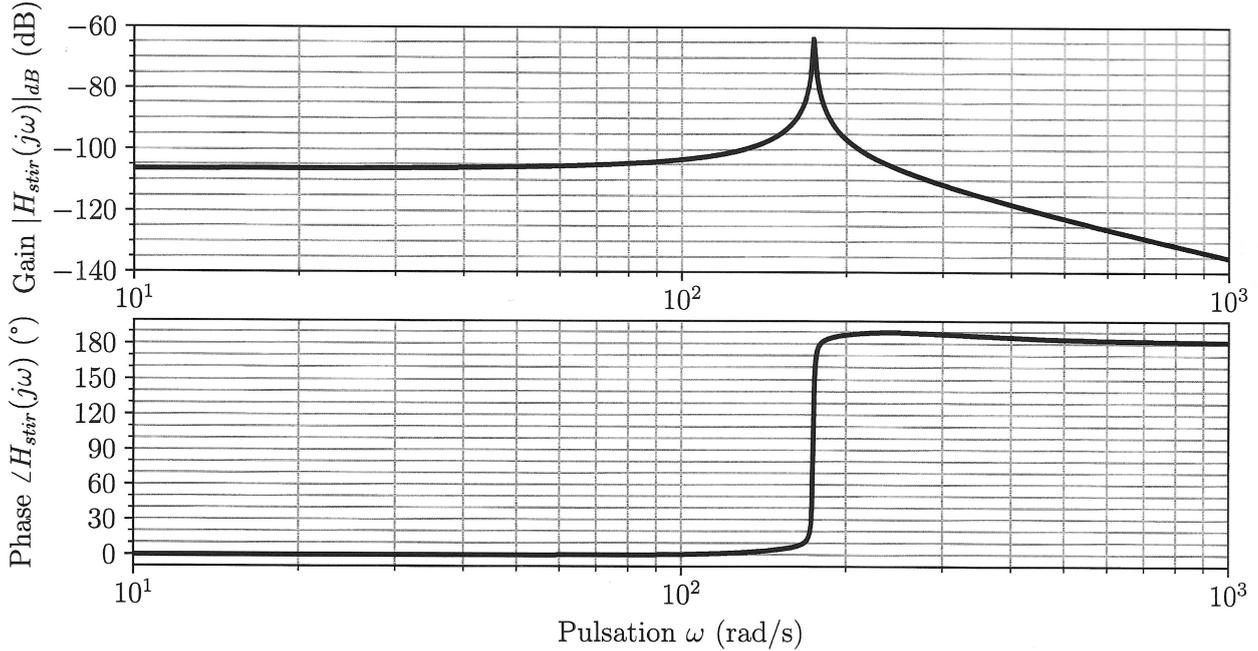


FIGURE 9 – Diagrammes de Bode de la fonction de transfert H_{stir} .

Q42. Comment faut-il régler le système $C \cdot H_{stir}$ pour obtenir le fonctionnement d'oscillation attendu en boucle fermée ? Les conditions de stabilité d'un système bouclé pourront être utilisées pour justifier l'argumentation.

On considère d'utiliser un correcteur de la forme suivante :

$$C(p) = \beta p .$$

Q43. De quel type de correcteur s'agit-il et quel est le sens physique dans le contexte de cette application ? Proposer un réglage de ce correcteur permettant d'obtenir le fonctionnement souhaité. Tracer les diagrammes de Bode alors obtenus.

Avec cette valeur de β , on obtient la réponse à un essai impulsionnel tracée sur la figure 10.

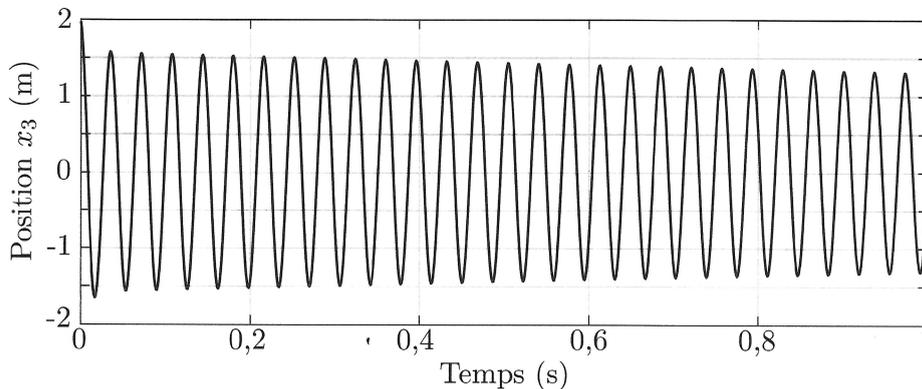


FIGURE 10 – Essai impulsionnel sur le système asservi.

Q44. Commenter la réponse temporelle obtenue.

3.2 Modélisation de la conversion électro-mécanique

Cette partie du sujet s'intéresse à la modélisation de la machine électrique qui réalise la conversion de puissance depuis le mouvement généré par la machine Stirling. Il s'agit d'une machine synchrone à aimants, dont le mouvement est linéaire. On adopte les hypothèses de modélisation suivantes.

- Le piston 3 est constitué d'une succession d'aimants de largeur a . Leur orientation est radiale. Ils imposent dans l'entrefer un champ magnétique tel que décrit sur la figure 11.

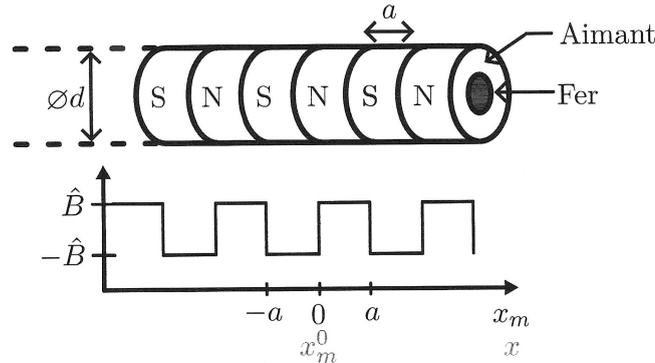


FIGURE 11 – Constitution du rotor et champ dans l'entrefer. L'échelle horizontale indique la position selon le repère mobile x_m et selon le repère fixe x . Dans ce dernier, la position du centre du mobile est notée x_m^0 .

- On suppose de plus que l'entrefer est suffisamment étroit pour que les lignes de champ ne s'y évassent pas.
- On suppose un mouvement du piston 3 à vitesse constante.
- La machine est supposée infiniment longue par rapport aux déplacements.
- Les effets de bords de la machine sont négligés. On suppose que l'on se tient toujours loin des extrémités de la machine.

Afin de simplifier la visualisation en 3 dimensions, on peut également représenter cette machine non pas en cylindre telle qu'en réalité, mais déroulée comme une machine plane. La figure 12 illustre ce passage à une machine plane.

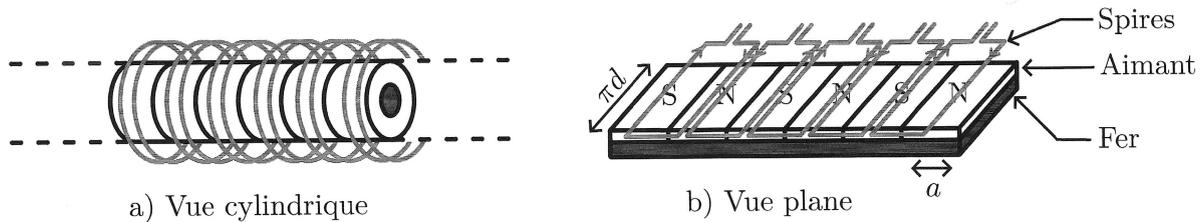


FIGURE 12 – Représentation de la machine (a) dans sa configuration réelle avec des spires cylindriques. (b) Représentation plane de la machine indiquant le sens des courants dans chaque spire.

Le bobinage du stator est placé autour du piston 3 de la machine cylindrique. Représenté à plat, il est disposé tel qu'indiqué sur la figure 12b. Chaque boucle représente une bobine constituée de N spires. K bobines sont placées en série de manière à respecter le sens des courants indiqués. Ces connections ne sont pas représentées ici. Ces bobines constituent la phase 1 de la machine triphasée. Les deux autres phases sont décalés de $a/3$ et $2a/3$. Elles sont supposées parfaitement identiques à la phase 1.

3.2.1 Calcul des forces électromagnétiques

On considère tout d'abord une seule spire. Une vue en coupe est indiquée figure 13, page 16.

- Q45.** Quel est le flux ϕ embrassé par la spire pour les positions $x_m^0 \in \left\{-\frac{a}{2}, 0, \frac{a}{2}\right\}$ du piston 3 ? Représenter les variations de $\phi(x_m^0)$ sur l'intervalle $x_m^0 \in [-2a; 2a]$.

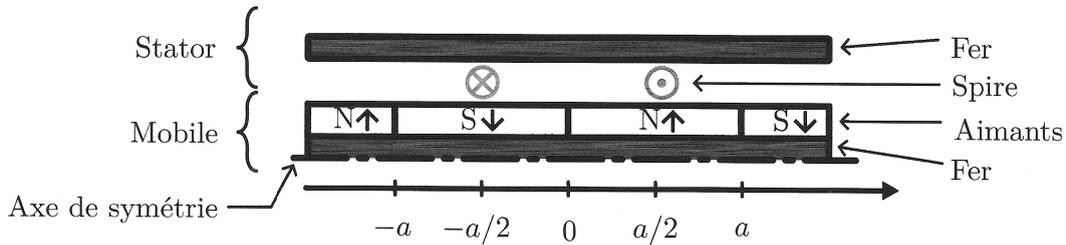


FIGURE 13 – Coupe de la machine. L'orientation du flux des aimants est indiquée par une flèche.

On approximera l'allure précédente par une sinusoïde. Il s'agit d'une modélisation dite *au premier harmonique*. On cherche donc à calculer le coefficient du fondamental de la série de Fourier associée à $\phi(x)$. Pour cela, on utilisera le lien entre les coefficients A_n, B_n de la série de Fourier associée à un signal $s(x)$ et ceux associés à sa dérivée $\frac{ds}{dx}$, notés α_n, β_n :

$$s(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 x) + B_n \sin(n\omega_0 x) \quad ; \quad \frac{ds}{dx}(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(n\omega_0 x) + \beta_n \sin(n\omega_0 x) .$$

Ce lien est justifié par l'unicité de la décomposition en série de Fourier.

Q46. En dérivant le signal $s(x)$, déduire les expressions de α_n et β_n en fonction de A_n et B_n .

Q47. Dans le cas de $\phi(x)$, représenter graphiquement $\frac{d\phi}{dx}$. Exprimer les coefficients de sa série de Fourier. En déduire que l'amplitude du fondamental de $\phi(x)$ est

$$b_1 = -\frac{8\hat{\phi}}{\pi^2} .$$

Dans la suite, on considérera que le flux s'écrit $\phi(x_m^0) = \frac{8\hat{\phi}}{\pi^2} \sin\left(\frac{\pi}{a}x_m^0\right)$. On suppose que le piston 3 se déplace longitudinalement à une vitesse v constante, soit $x_m^0 = v \cdot t$, avec t le temps.

Q48. Exprimer le flux Φ_1 embrassé par toute la phase 1, composé de K bobines de N spires chacune, en fonction de ϕ . Déduire la tension apparaissant aux bornes de la phase 1 en fonction du temps. On appellera force électromotrice (fem) cette tension, notée e_1 . Par analogie, en déduire e_2 et e_3 .

3.2.2 Calcul de la puissance transmise et de la force appliquée

Le système étant excité à une pulsation $\frac{\pi v}{a}$, les courants dans les phases 1, 2 et 3 sont de la forme :

$$i_1 = \hat{I} \cos\left(\frac{\pi}{a}vt + \psi\right) , \quad i_2 = \hat{I} \cos\left(\frac{\pi}{a}vt + \psi - \frac{a}{3}\right) \quad \text{et} \quad i_3 = \hat{I} \cos\left(\frac{\pi}{a}vt + \psi - \frac{2a}{3}\right) .$$

On ne prendra en compte que la phase 1 dans un premier temps. On note ψ le déphasage entre le courant i_1 et la fem e_1 . La puissance électromagnétique instantanée de cette phase est :

$$P_{\text{em}}^1(t) = e_1(t) \cdot i_1(t) .$$

Les pertes magnétiques des matériaux étant négligées, cette puissance électromagnétique est égale à la puissance mécanique du piston 3.

Q49. Exprimer la puissance mécanique P_m en fonction de e_1 et i_1 , puis la force F_1 exercée sur le piston 3 par la phase 1. En déduire la force moyenne au cours du déplacement selon x_m^0 . Quelle condition permet de maximiser cette force ?

Q50. Adapter le raisonnement précédent pour exprimer la force exercée sur le piston 3 par les trois phases simultanément. En déduire la valeur moyenne de la force lors du mouvement du piston 3. Quelle est la caractéristique remarquable de la force instantanée lorsque les trois phases sont prises en compte ?

3.2.3 Schéma monophasé équivalent

On adopte le schéma monophasé équivalent de la figure 14 pour modéliser le comportement de la génératrice linéaire.

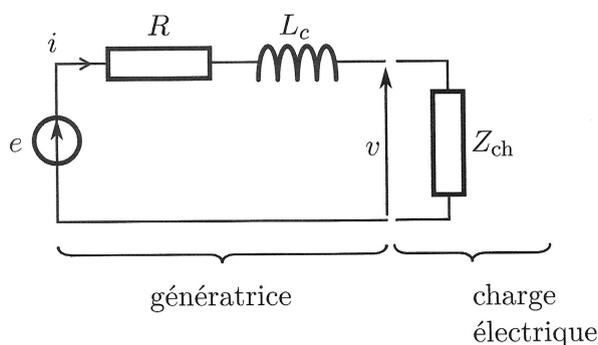


FIGURE 14 – Schéma monophasé équivalent de la génératrice.

Q51. Expliquer les différents éléments du schéma.

On rappelle que ψ désigne le déphasage entre e et i et que cet angle a un impact sur la force exercée sur le piston 3.

Q52. Comment choisir $Z_{ch} = R_{ch} + jX_{ch}$ afin de respecter la condition de force maximale selon ψ ?

Q53. Dans ce cas, simplifier l'équation de la force exercée sur le piston 3 obtenue à la question 50. La mettre sous la forme $F = \beta v$. Relier cette expression avec celle introduite à la question 43.

— Fin de l'énoncé —

5/0 Bellevue