CONCOURS X-ENS

CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES A (XULSR)

Session 2025 - Filières MP - MPI

m.laamoum2@gmail.com [1]

I- Questions préliminaires

1 ▷ Restriction d'un endomorphisme diagonalisable à un sous-espace stable

C'est une question de cours:
Comme h est diagonalisable, son polynôme minimal $\pi_h \in \mathbb{C}[X]$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.
Par définition du polynôme minimal, $\pi_h(h)(x) = 0$, $\forall x \in V$, en particulier pour tout $v \in W$, $\pi_h(h_W)(v) = \pi_h(h)(v) = 0$, donc $\pi_h(h_W) = 0$.

Ainsi h_W admet un polynôme annulateur scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, donc il est diagonalisable.

2 ▷ Un invariant matriciel

Pour une matrice carrée M et un entier naturel k non nul, on note

$$\delta_k(M) = -\dim\left(\ker M^{k-1}\right) + 2\dim\left(\ker M^k\right) - \dim\left(\ker M^{k+1}\right).$$

(2a) Soient M et M' deux matrices carrées semblables. Il existe donc une matrice inversible P telle que $M' = PMP^{-1}$.
Pour tout entier $j \geq 0$, on a $(M')^j = (PMP^{-1})^j = PM^jP^{-1}$.
On a

$$\begin{aligned} x &\in \ker((M')^j) \Leftrightarrow (M')^j x = 0 \\ &\Leftrightarrow PM^jP^{-1}x = 0. \\ &\Leftrightarrow M^jP^{-1}x = 0 \quad \text{(car } P \text{ est inversible)} \\ &\Leftrightarrow P^{-1}x \in \ker(M^j) \end{aligned}$$

On en déduit que l'application linéaire $\varphi : \ker((M')^j) \to \ker(M^j)$ définie par $\varphi(x) = P^{-1}x$ est un isomorphisme, dont l'isomorphisme réciproque est $\psi : \ker(M^j) \to \ker((M')^j)$ définie par $\psi(y) = Py$.
Par conséquent, $\dim(\ker((M')^j)) = \dim(\ker(M^j))$ pour tout entier $j \geq 0$.
Appliquons cela à la définition de δ_k:

$$\begin{aligned} \delta_k(M') &= -\dim(\ker(M')^{k-1}) + 2\dim(\ker(M')^k) - \dim(\ker(M')^{k+1}) \\ &= -\dim(\ker M^{k-1}) + 2\dim(\ker M^k) - \dim(\ker M^{k+1}) \\ &= \delta_k(M) \end{aligned}$$

Donc, $\boxed{\delta_k(M) = \delta_k(M') \text{ pour tout } k \geq 1}$.

(2b) Soit r un entier naturel non nul. On note $(e_1, \ldots, e_r)$ la base canonique de $\mathbb{C}^r$. On a

$$J_r e_i = \begin{cases} e_{i+1} & \text{si } i \in [\![1, r-1]\!] \\ 0 & \text{si } i = r \end{cases}$$

ce qui donne pour $k \in [\![1, r-1]\!]$

$$J_r^k e_i = \begin{cases} e_{i+k} & \text{si } i \in [\![1, r-k]\!] \\ 0 & \text{si } i \in [\![r-k+1, r]\!] \end{cases}$$

[1] Mes corrigés sont ici `https://tinyurl.com/2qyzzrbd`

18-04-2025

et $J_r^r = 0$. Ainsi

$$\ker(J_r^k) = \begin{cases} \text{vect}(e_{r-k+1}, \dots, e_r) & \text{si } 1 \le k < r \\ \mathbb{C}^r & \text{si } k \ge r \end{cases}$$

Ce qui donne $\boxed{d_k = \dim(\ker J_r^k) = \min(k, r) \text{ si } k \ge 0.}$ (En particulier, $d_0 = 0$).
Calculons $\delta_k(J_r) = -d_{k-1} + 2d_k - d_{k+1}$.

► Si $1 \le k \le r - 1$.
On a $d_{k-1} = k - 1$, $d_k = k$ et $d_{k+1} = k + 1$ donc

$$\delta_k(J_r) = -(k-1) + 2k - (k+1) = 0.$$

► Si $k = r$.
On a $d_{r-1} = r - 1$, et $d_r = d_{r+1} = r$ donc

$$\delta_r(J_r) = -(r-1) + 2r - r = 1.$$

► Si $k > r$.
On a $d_{k-1} = d_k = d_{k+1} = r$, donc

$$\delta_k(J_r) = -r + 2r - r = 0.$$

En résumé, $\boxed{\delta_k(J_r) \text{ vaut } 1 \text{ si } k = r \text{ et } 0 \text{ sinon.}}$

(2c) Soient $M_1 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et $M_2 \in \mathcal{M}_q(\mathbb{C})$ et $M = \text{diag}(M_1, M_2) \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{C})$.
Un vecteur $x \in \mathbb{C}^{p+q}$ peut s'écrire $x = \left[\begin{array}{c} x_1 \\ \hline x_2 \end{array}\right]$ où $x_1 \in \mathbb{C}^p$ et $x_2 \in \mathbb{C}^q$. Alors

$$M.x = \left[\begin{array}{c|c} M_1 & 0 \\ \hline 0 & M_2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_1 \\ \hline x_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} M_1 x_1 \\ \hline M_2 x_2 \end{array}\right],$$

donc

$$x \in \ker M \Leftrightarrow Mx = 0 \Leftrightarrow M_1 x_1 = 0 \text{ et } M_2 x_2 = 0 \Leftrightarrow (x_1, x_2) \in \ker M_1 \times \ker M_2.$$

Ainsi , l'application $x = \left[\begin{array}{c} x_1 \\ \hline x_2 \end{array}\right] \mapsto (x_1, x_2)$ est un isomorphisme de $\ker M$ sur $\ker M_1 \times \ker M_2$, par conséquent,

$$\dim(\ker M) = \dim(\ker M_1 \times \ker M_2) = \dim(\ker M_1) + \dim(\ker M_2).$$

Pour tout entier $j \ge 0$, $M^j = \text{diag}(M_1^j, M_2^j)$ donc $\dim(\ker M^j) = \dim(\ker M_1^j) + \dim(\ker M_2^j)$.
Maintenant, calculons $\delta_k(M)$ pour $k \ge 1$:

$$\begin{aligned}
\delta_k(M) &= -\dim(\ker M^{k-1}) + 2\dim(\ker M^k) - \dim(\ker M^{k+1}) \\
&= -(\dim(\ker M_1^{k-1}) + \dim(\ker M_2^{k-1})) + 2(\dim(\ker M_1^k) + \dim(\ker M_2^k)) - (\dim(\ker M_1^{k+1}) + \dim(\ker M_2^{k+1})) \\
&= (-\dim(\ker M_1^{k-1}) + 2\dim(\ker M_1^k) - \dim(\ker M_1^{k+1})) + (-\dim(\ker M_2^{k-1}) + 2\dim(\ker M_2^k) - \dim(\ker M_2^{k+1})) \\
&= \delta_k(M_1) + \delta_k(M_2)
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\delta_k(M) = \delta_k(M_1) + \delta_k(M_2) \text{ pour tout } k \ge 1}$.

Par récurrence immédiate, on a aussi $\boxed{\delta_k(\text{diag}(M_1, \dots, M_s)) = \delta_k(M_1) + \dots + \delta_k(M_s) \text{ pour tout } k \ge 1}$.

II- Algèbre linéaire sur les polynômes de Laurent

On note $\mathcal{D} = \text{vect}(X^{-j} \mid j \in \mathbb{N}^*)$.

3 ▷ L'application linéaire $\hat{\xi}$ et l'endomorphisme ξ

(3a) Soit $F \in \mathbb{C}[X^{\pm 1}]$. On peut décomposer F de manière unique en $F = P + \mathcal{D}_F$, où $P \in \mathbb{C}[X]$ et $\mathcal{D}_F = \Pi(F) \in \mathcal{D}$. On a

$$\hat{\xi}(F) = \Pi(XF) = \Pi(X(P + \mathcal{D}_F)) = \Pi(XP + X\mathcal{D}_F).$$

Comme Π est linéaire alors

$$\hat{\xi}(F) = \Pi(XP) + \Pi(X\mathcal{D}_F).$$

► Calculons $\hat{\xi}(\Pi(F))$:
Puisque $\mathcal{D}_F \in \mathcal{D}$ alors

$$\hat{\xi}(\mathcal{D}_F) = \xi(\mathcal{D}_F) = \Pi(X\mathcal{D}_F).$$

► Calculons $\Pi(XP)$.
Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{q} p_k X^k \in \mathbb{C}[X]$. Alors

$$XP(X) = \sum_{k=0}^{q} p_k X^{k+1} = \sum_{j=1}^{q+1} p_{j-1} X^j.$$

Par définition de Π, le noyau de Π est $\mathbb{C}[X]$. Donc $\Pi(XP) = 0$. Ainsi,

$$\hat{\xi}(F) = 0 + \Pi(X\mathcal{D}_F) = \Pi(X\mathcal{D}_F) = \hat{\xi}(\mathcal{D}_F) = \hat{\xi}(\Pi(F)).$$

On a bien démontré que $\boxed{\hat{\xi}(\Pi(F)) = \hat{\xi}(F).}$

(3b) On fait une preuve en deux étapes.

► Montrons le pour les éléments de la base canonique .
Soit $F \in \mathcal{D}$ et $P_k = X^k$ pour un entier $k \geq 0$.
Montrons que $P_k(\xi)(F) = \Pi(P_k F)$ par récurrence sur k.

• Si $k = 0$, alors $P_0(\xi) = \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$, $P_0(\xi)(F) = F$ et $\Pi(P_0 F) = \Pi(F)$. Puisque $F \in \mathcal{D}$, $\Pi(F) = F$. Donc $P_0(\xi)(F) = F = \Pi(P_0 F)$.
L'égalité est vérifiée.

• Supposons que $P_k(\xi)(F) = \Pi(P_k F)$ pour un entier $k \geq 0$.
Posons $G = P_k(\xi)(F)$, donc on a

$$G = P_k(\xi)(F) = \Pi(X^k F) \in \mathcal{D}$$

et

$$\xi^{k+1}(F) = \xi(\xi^k(F)) = \xi(\Pi(X^k F))$$

En utilisant le résultat de (3a) avec $H = X^k F$, donc

$$\xi(\Pi(X^k F)) = \hat{\xi}(\Pi(X^k F)) = \hat{\xi}(X^k F) = \Pi(X(X^k F)) = \Pi(X^{k+1} F).$$

Donc $\xi^{k+1}(F) = \Pi(X^{k+1} F)$, ce qui prouve la relation pour $k + 1$.
Par récurrence on a $\boxed{\xi^k(F) = \Pi(X^k F) \text{ pour tout } k \geq 0}$.

► Maintenant, soit $P(X)=\sum_{k=0}^{d} p_k X^k$. Par linéarité de $P(\xi)$ et de Π on a :

$$\begin{aligned}
P(\xi)(F) &= \sum_{k=0}^{d} p_k \xi^k(F)\\
&= \sum_{k=0}^{d} p_k \Pi(X^k F)\\
&= \Pi\left(\sum_{k=0}^{d} p_k X^k F\right)\\
&= \Pi\left(\left(\sum_{k=0}^{d} p_k X^k\right) F\right)\\
&= \Pi(P(X)F).
\end{aligned}$$

Ainsi on a $\boxed{P(\xi)(F)=\Pi(PF)\ .}$

4 ▷ **Image et noyau des puissances de ξ**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminons l'image et le noyau de ξ^n. L'espace $\mathcal{D}$ a pour base $\mathcal{B}_{\mathcal{D}}=\{X^{-j} \mid j \in \mathbb{N}^*\}$.

► Image :

Calculons l'action de ξ sur les vecteurs de la base base:

On a $\xi(X^{-j})=\Pi(X \cdot X^{-j})=\Pi(X^{-j+1})$.

- Si $j=1$, $\xi(X^{-1})=\Pi(X^0)=\Pi(1)=0$, car $1 \in \mathbb{C}[X]=\ker \Pi$.
- Si $j>1$, $-j+1<0$, donc $X^{-j+1} \in \mathcal{D}$. Ainsi, $\Pi(X^{-j+1})=X^{-j+1}$. Donc, $\xi(X^{-j})=\begin{cases} 0 & \text{si } j=1 \\ X^{-(j-1)} & \text{si } j \geq 2 \end{cases}$.

Calculons l'action de ξ^n sur les vecteurs de base:

On a :

- Si $1 \leq j \leq n$ alors

$$\xi^{j-1}(\xi(X^{-j}))=\xi^{j-1}(X^{-(j-1)})=\cdots=\xi(X^{-2})=X^{-1},$$

donc $\xi^j(X^{-j})=\xi(X^{-1})=0$, ce qui donne

$$\xi^n(X^{-j})=\xi^{n-j}\left(\xi^j(X^{-j})\right)=\xi^{n-j}(0)=0.$$

- Si $j>n$ alors

$$\xi(X^{-j})=X^{-j+1},\ \xi^2(X^{-j})=X^{-j+2},...,\ \xi^n(X^{-j})=X^{-j+n}.$$

Ainsi pour tout $k \geq 1$, $\xi^n(X^{-k-n})=X^{-k}$, donc $\operatorname{Im}(\xi^n)=\mathcal{D}$ par suite ξ^n est surjective sur $\mathcal{D}$.

► Noyau de ξ^n:

Les vecteurs de base annulés par ξ^n sont $X^{-1}, X^{-2}, \ldots, X^{-n}$. Ils forment une famille libre. Les autres vecteurs de la base , X^{-k} pour $k>n$, n'annulent pas ξ^n ($\xi^n(X^{-k})=X^{-k+n} \neq 0$) ainsi que toute combinaison linéaire de ces vecteurs, on en déduit que $\boxed{\ker(\xi^n)=\operatorname{vect}(X^{-1}, X^{-2}, \ldots, X^{-n}).}$

5 ▷ **Sous-espaces cycliques**

► Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Soit W un sous-espace stable par ξ et contenant X^{-r}.

Il doit contenir $\xi^k(X^{-r})$ pour tout $k \geq 0$. Les images successives de X^{-r} sont:

$$\xi^0(X^{-r})=X^{-r}, \xi^1(X^{-r})=X^{-r+1}, \ldots, \xi^{r-1}(X^{-r})=X^{-1} \text{ et } \xi^k(X^{-r})=0 \text{ pour } k \geq r.$$

Donc $W_0=\operatorname{vect}\{X^{-r}, X^{-r+1}, \ldots, X^{-1}\} \subset W$.

On sait que $\xi(X^{-1})=0$ et $\xi(X^{-j})=X^{-j+1}$ si $2 \leq j \leq r$, donc le sous-espace W_0 est stable par ξ.

Puisque tout sous-espace stable contenant X^{-r} contient forcément W_0, donc W_0 est le plus petit tel sous-espace.

Ainsi $\mathcal{D}_r=W_0=\operatorname{vect}\{X^{-1}, X^{-2}, \ldots, X^{-r}\}$.

► La famille $\mathcal{C}=(X^{-r}, X^{-r+1}, \ldots, X^{-1})$ est une base de $\mathcal{D}_r$, car elle est libre , et elle engendre $\mathcal{D}_r$.

Écrivons la matrice de l'endomorphisme $\xi_{\mathcal{D}_r}$ induit par ξ sur $\mathcal{D}_r$ dans la base $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_r)$ où $w_k = X^{-r+k-1}$.
On a :

- Si $k = r$, $w_r = X^{-1}$. $\xi(w_r) = \xi(X^{-1}) = 0$.
- Si $1 \leq k < r$, $w_k = X^{-r+k-1}$. Comme $k < r$ alors $j = r - k + 1 > 1$ et $\xi(w_k) = \xi(X^{-r+k-1}) = X^{-(r-k+1)+1} = X^{-r+k} = w_{k+1}$.

La matrice de $\xi_{\mathcal{D}_r}$ dans la base $\mathcal{C}$ est donc:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

C'est le bloc de Jordan J_r .

III- Prolongements compatibles

6 ▷ **Prolongement compatible avec u donné par un vecteur**
On suppose W strictement inclus dans V et on fixe $v \in V \setminus W$.

(6a) Vérifions que l'ensemble $\mathcal{J} = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid P(u)(v) \in W\}$ est un idéal de $\mathbb{C}[X]$.

▶ $0 \in \mathbb{C}[X]$. $0(u)(v) = 0 \in W$ car W est un sous-espace vectoriel. Donc $0 \in \mathcal{J}$, qui est non vide.

▶ Soient $P, Q \in \mathcal{J}$. Alors $P(u)(v) \in W$ et $Q(u)(v) \in W$. Comme W est un sous-espace vectoriel,

$$(P - Q)(u)(v) = P(u)(v) - Q(u)(v) \in W.$$

Donc $P - Q \in \mathcal{J}$.
$\mathcal{J}$ est donc un sous-groupe additif de $\mathbb{C}[X]$.

▶ Soit $P \in \mathcal{J}$ et $S \in \mathbb{C}[X]$. Puisque W est stable par u, il est stable par $S(u)$. On a $P(u)(v) \in W$ donc

$$S(u)(P(u)(v)) = (SP)(u)(v) \in W,$$

d'où $SP \in \mathcal{J}$.
Ainsi $\mathcal{J}$ est un idéal de $\mathbb{C}[X]$.

(6b) Generateur de $\mathcal{J}$.

▶ Comme u est nilpotent, il existe un entier n tel que $u^n = 0$. On a $P(X) = X^n \in \mathbb{C}[X]$ et $P(u)(v) = u^n(v) = 0 \in W$ donc $X^n \in \mathcal{J}$.

▶ L'idéal $\mathcal{J}$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

On sait que les idéaux de $\mathbb{C}[X]$ sont (*principaux*) de la forme $Q\mathbb{C}[X]$ avec $Q \in \mathbb{C}[X]$ ($\mathbb{C}[X]$ *est un anneau principal*), donc il existe un unique polynôme P_0 unitaire tel que $\mathcal{J} = P_0\mathbb{C}[X]$.
Puisque $X^n \in \mathcal{J}$, P_0 doit diviser X^n donc P_0 est de la forme X^r pour $0 \leq r \leq n$.
Si $r = 0$, $P_0 = X^0 = 1$, alors $\mathcal{J} = \mathbb{C}[X]$. Cela signifie que $1 \in \mathcal{J}$, donc $1(u)(v) = v \in W$, ce qui est absurde car on a supposé $v \notin W$.
Donc il existe $r \in [\![1, n]\!]$ tel que $\boxed{\mathcal{J} = X^r\mathbb{C}[X].}$

(6c) Soit $W' = \{P(u)(v) + w \mid P \in \mathbb{C}[X], w \in W\}$. Vérifions que W' contient W et v.

▶ Soit $x \in W$, on peut écrire $x = 0(u)(v) + x$. Avec $P = 0$ et $w = x$, on voit que $x \in W'$. Donc $W \subset W'$.
Pour v, on peut écrire $v = 1(u)(v) + 0$. Avec $P = X^0 = 1$ et $w = 0 \in W$, on voit que $v \in W'$.

▶ Vérifions que W' est stable par u.
Soit $x = P(u)(v) + w \in W'$, on a

$$u(x) = u(P(u)(v) + w) = u(P(u)(v)) + u(w) = (XP)(u)(v) + u(w)$$

Comme W est stable par u alors $u(w) \in W$ et $XP \in \mathbb{C}[X]$, par suite $u(x)$ est bien un élément de W' .
Donc W' est stable par u.

(6d) $G_v = \varphi(u^r(v))$. Comme $P_0(X) = X^r \in \mathcal{J}$, par définition de $\mathcal{J}$, $P_0(u)(v) = u^r(v) \in W$.
L'application φ est définie sur W, donc $G_v = \varphi(u^r(v))$ est bien défini et est un élément de $\mathcal{D}$.
D'après la question (4), l'application $\xi^r : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ est surjective , donc il existe un élément $F_v \in \mathcal{D}$ tel que $\xi^r(F_v) = G_v$.

(6e) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et $w \in W$. Supposons $P(u)(v) + w = 0$.
On a $P(u)(v) \in W$, donc $P \in \mathcal{J} = X^r\mathbb{C}[X]$. Ceci signifie que P s'écrit $P(X) = S(X)X^r$ avec $S \in \mathbb{C}[X]$.
On a $w = P(u)(v) = (S(u)u^r)(v)$ et $\varphi(w) = \varphi(S(u)(u^r(v)))$.
W est stable par u soit u_W est l'endomorphisme induit.
On a $S(u)(u^r(v)) = S(u_W)(u^r(v))$ car $u^r(v) \in W$.
Par compatibilité de φ sur W, on a $\varphi \circ u_W = \xi \circ \varphi$, donc $\varphi \circ S(u_W) = S(\xi) \circ \varphi$ (par récurrence sur le degré de S) et

$$\varphi(w) = \varphi(S(u_W)(u^r(v))) = S(\xi)(\varphi(u^r(v))).$$

Par définition, $G_v = \varphi(u^r(v))$, donc $\varphi(w) = S(\xi)(G_v)$.
Par (6d), $G_v = \xi^r(F_v)$, donc $\varphi(w) = S(\xi)(\xi^r(F_v))$.
Comme $P(X) = S(X)X^r$, $P(\xi) = S(\xi) \circ \xi^r$, donc $\boxed{\varphi(w) = P(\xi)(F_v).}$

(6f) Soit $x \in W'$. On a $w \in W, P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $x = P(u)(v) + w$. On définit $\varphi'(x) = P(\xi)(F_v) + \varphi(w)$, qui est linéaire (admis).

► Vérifions que $\varphi'(x)$ ne dépend pas du choix de P et w.

Soit $P_1, P_2 \in \mathbb{C}[X]$ et $w_1, w_2 \in W$, supposons que

$$x = P_1(u)(v) + w_1 = P_2(u)(v) + w_2.$$

Alors $(P_1 - P_2)(u)(v) = w_2 - w_1$. Notons $P = P_1 - P_2$ et $w' = w_2 - w_1$, donc $P(u)(v) = w'$.
Comme $w_1, w_2 \in W$, $w' \in W$ alors $P(u)(v) \in W$, d'après (6e), $\varphi(w') = P(\xi)(F_v)$, c'est-à -dire

$$\varphi(w_2 - w_1) = (P_1 - P_2)(\xi)(F_v).$$

Par linéarité de φ et de $P \mapsto P(\xi)(F_v)$, on a

$$\varphi(w_2) - \varphi(w_1) = P_1(\xi)(F_v) - P_2(\xi)(F_v).$$

Par suite,

$$P_1(\xi)(F_v) + \varphi(w_1) = P_2(\xi)(F_v) + \varphi(w_2).$$

Ceci montre que la définition de $\varphi'(x)$ est indépendante de la représentation choisie pour x. Ainsi φ' est bien définie.

► Vérifions que φ' est un prolongement de φ.

Soit $x \in W$. On peut écrire $x = 0(u)(v) + x$. Ici $P = 0$ et $w = x$, donc

$$\varphi'(x) = 0(\xi)(F_v) + \varphi(x) = 0 + \varphi(x) = \varphi(x).$$

Ainsi $\boxed{\varphi'|_W = \varphi.}$

► Vérifions la compatibilité de φ' avec u. On doit montrer $\xi \circ \varphi' = \varphi' \circ u_{W'}$.

Soit $x = P(u)(v) + w \in W'$.

$$u_{W'}(x) = u(P(u)(v) + w) = uP(u)(v) + u(w) = (XP)(u)(v) + u(w).$$

Soit $P_1(X) = XP(X)$ et $w_1 = u(w) \in W$, donc $u_{W'}(x) = P_1(u)(v) + w_1$.
Par définition de φ',

$$\varphi'(u_{W'}(x)) = P_1(\xi)(F_v) + \varphi(w_1).$$

Comme $P_1(\xi) = (XP)(\xi) = \xi \circ P(\xi)$, on a

$$\varphi'(u_{W'}(x)) = \xi \circ P(\xi)(F_v) + \varphi(w_1).$$

Par compatibilité de φ sur W, on a

$$\varphi(w_1) = \varphi(u(w)) = \varphi(u_W(w)) = \xi(\varphi(w)).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\varphi'(u_{W'}(x)) &= (XP)(\xi)(F_v) + \varphi(u(w)) \\ &= \xi(P(\xi)(F_v)) + \xi(\varphi(w)) \\ &= \xi(P(\xi)(F_v) + \varphi(w)) \\ &= \xi(\varphi'(x))\end{aligned}$$

La condition de compatibilité $\xi \circ \varphi' = \varphi' \circ u_{W'}$ est vérifiée.

7 ▷ **Prolongement à V compatible avec u**

Soit une application linéaire $\varphi : W \to \mathcal{D}$, compatible avec u (c'est-à-dire $\xi \circ \varphi = \varphi \circ u_W$). Nous savons par la question (6) que si W est strictement inclus dans V, on peut étendre φ à un sous-espace W' strictement plus grand que W tout en préservant la compatibilité.

Nous allons utiliser une récurrence sur la dimension finie .

► Soit $W_0 = W$ et $\varphi_0 = \varphi$.

- Si $W_0 = V$, alors φ_0 est déjà définie sur V, et le prolongement est φ_0 elle-même. L'objectif est atteint.
- Supposons que $W_0 \neq V$. Alors il existe un vecteur $v_1 \in V \setminus W_0$.

D'après la question 6 (en appliquant ses résultats à W_0, φ_0 et v_1), il existe un sous-espace W_1 défini par

$$W_1 = \{P(u)(v_1) + w \mid P \in \mathbb{C}[X], w \in W_0\}$$

qui vérifie $W_1 = W_0 + \text{vect}(v_1, u(v_1), \ldots, u^{r-1}(v_1))$, ou r est défini en (6b) pour v_1 d'après (6c) on a :
$W_0 \subset W_1$, $W_0 \neq W_1$ et W_1 est stable par u .
D'après la question (6f) on a l'existence d'une application linéaire $\varphi_1 : W_1 \to \mathcal{D}$ qui est un prolongement de φ_0 sur W_0 (c'est-à-dire $\varphi_1|_{W_0} = \varphi_0$) et qui est compatible avec u sur W_1 (c'est-à-dire $\xi \circ \varphi_1 = \varphi_1 \circ u_{W_1}$).

► Par ce processus on peut construire une suite de sous-espaces $(W_k)_{k\geq 0}$ et une suite d'applications linéaires $(\varphi_k)_{k\geq 0}$ vérifiant :

- $W_0 = W$, $\varphi_0 = \varphi$.
- Étape k vers $k+1$:

Si $W_k \neq V$, on choisit un vecteur $v_{k+1} \in V \setminus W_k$ et construit $W_{k+1} = \{P(u)(v_{k+1}) + w \mid P \in \mathbb{C}[X], w \in W_k\}$ et une application linéaire $\varphi_{k+1} : W_{k+1} \to \mathcal{D}$ telle que: $W_k \subsetneq W_{k+1}$,W_{k+1} est stable par u, $\varphi_{k+1}|_{W_k} = \varphi_k$ et $\xi \circ \varphi_{k+1} = \varphi_{k+1} \circ u_{W_{k+1}}$.

► On obtient ainsi une suite strictement croissante de sous-espaces vectoriels de V :

$$W_0 \subsetneq W_1 \subsetneq W_2 \subsetneq \cdots \subsetneq W_k \subseteq V$$

Comme V est de dimension finie, et $\dim(W_k) + 1 \leq \dim(W_{k+1}) \leq \dim(V)$, alors la suite $(\dim(W_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est stationnaire (*elle est strictement croissante tant que* $W_k \neq V$). Par conséquent, il existe un entier N tel que $W_N = V$.
L'application $\tilde{\varphi} = \varphi_N : W_N \to \mathcal{D}$ (c'est-à-dire de $V \to \mathcal{D}$) est alors le prolongement recherché.

IV- Théorème de décomposition pour les endomorphismes nilpotents

Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$ et u un endomorphisme de V nilpotent d'indice n ($u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$).

8 ▷ **Scindage d'un sous-espace cyclique maximal**

On choisit un vecteur v_0 tel que $u^{n-1}(v_0) \neq 0$.

(8a) ► Vérifions que la famille $\mathcal{B} = (v_0, u(v_0), \dots, u^{n-1}(v_0))$ est libre.

Supposons que $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k(v_0) = 0$. Appliquons u^{n-1} à cette égalité. Comme $u^j = 0$ pour $j \geq n$, on a :

$$\begin{aligned} u^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k(v_0)\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^{n-1+k}(v_0) \\ &= \alpha_0 u^{n-1}(v_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k u^{n-1+k}(v_0) \\ &= \alpha_0 u^{n-1}(v_0) + 0 = 0. \end{aligned}$$

Puisque $u^{n-1}(v_0) \neq 0$, on doit avoir $\alpha_0 = 0$.

En continuant ainsi par une récurrence finie (*en appliquant* u^{n-1-j} *pour montrer* $\alpha_j = 0$), on montre que tous les coefficients α_k sont nuls.

La famille $\mathcal{B}$ est donc libre.

► Soit $W = \text{vect}(\mathcal{B})$. W contient $v_0 = u^0(v_0)$. Montrons que W est stable par u.

Soit $w = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k(v_0) \in W$.

$$\begin{aligned} u(w) &= u\left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k(v_0)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^{k+1}(v_0) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_{j-1} u^j(v_0) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{j-1} u^j(v_0) + \lambda_{n-1} u^n(v_0) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{j-1} u^j(v_0) + 0. \end{aligned}$$

donc $u(w) \in W$ et W est stable par u.

► Notons $w_k = u^k(v_0)$ pour $k = 0, \dots, n-1$. La base est $\mathcal{B} = (w_0, \dots, w_{n-1})$ et on a

$$u_W(w_{n-1}) = u^n(v_0) = 0 \text{ et } u_W(w_k) = u^{k+1}(v_0) = w_{k+1} \text{ pour } 0 \leq k \leq n-2.$$

La matrice de l'endomorphisme induit u_W dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$Mat_{\mathcal{B}}(u_W) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} = J_n$$

C'est bloc de Jordan de taille n .

(8b) D'après la question (5), l'endomorphisme ξ restreint à $\mathcal{D}_n = \text{vect}(X^{-n}, \dots, X^{-1})$ a pour matrice J_n dans la base $\mathcal{C} = (X^{-n}, \dots, X^{-1})$.

► Définissons l'application linéaire $\varphi : W \to \mathcal{D}_n \subset \mathcal{D}$ en posant $\varphi(w_k) = y_k = X^{-n+k}$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.

φ est bien définie par linéarité.

▶ Vérifions la condition de compatibilité $\xi \circ \varphi = \varphi \circ u_W$.

• Pour $0 \leq k \leq n-2$:

$$\varphi(u_W(w_k)) = \varphi(w_{k+1}) = y_{k+1} = X^{-n+(k+1)}.$$

et

$$\xi(\varphi(w_k)) = \xi(y_k) = \xi(X^{-n+k}).$$

D'après la question (4), $\xi(X^{-j}) = X^{-j+1}$ pour $j \geq 2$. On a $n-k \geq 2$ donc $\xi(X^{-n+k}) = X^{-n+k+1} = y_{k+1}$. Ainsi l'égalité est vérifiée pour $k \leq n-2$.

• Pour $k = n-1$:

On a $\varphi(u_W(w_{n-1})) = \varphi(0) = 0$ donc

$$\xi(\varphi(w_{n-1})) = \xi(y_{n-1}) = \xi(X^{-n+(n-1)}) = \xi(X^{-1}).$$

D'après la question (4), $\xi(X^{-1}) = 0$. L'égalité est vérifiée pour $k = n-1$.

Donc $\xi \circ \varphi = \varphi \circ u_W$.

▶ L'application φ est injective car elle envoie la base $\mathcal{B}$ de W sur la famille $\mathcal{C}' = (X^{-n}, X^{-n+1}, \ldots, X^{-1})$ qui est une famille libre de $\mathcal{D}$ (elle est formée de vecteurs de la base canonique de $\mathcal{D}$).

(8c) Vérifions que $\mathrm{Im}(\psi) \subseteq \ker(\xi^n)$.

La relation de compatibilité $\xi \circ \psi = \psi \circ u$ implique par récurrence que $\xi^k \circ \psi = \psi \circ u^k$ pour tout $k \geq 0$.

Pour $k = n$, on a $\xi^n \circ \psi = \psi \circ u^n$. Soit $y \in \mathrm{Im}(\psi)$, il existe $x \in V$ tel que $y = \psi(x)$, donc

$$\xi^n(y) = \xi^n(\psi(x)) = (\xi^n \circ \psi)(x) = (\psi \circ u^n)(x).$$

Comme u est nilpotent d'indice n, $u^n = 0$, alors

$$\xi^n(y) = \psi(u^n(x)) = \psi(0) = 0.$$

Ainsi $y \in \ker(\xi^n)$ et on a bien $\boxed{\mathrm{Im}(\psi) \subseteq \ker(\xi^n).}$

(8d) Démontrons que $\ker(\psi)$ est un supplémentaire de W stable par u.

▶ Stabilité :

Soit $x \in \ker(\psi)$. On a $\psi(x) = 0$ et par compatibilité, $\psi \circ u = \xi \circ \psi$:

$$\psi(u(x)) = (\psi \circ u)(x) = (\xi \circ \psi)(x) = \xi(\psi(x)) = \xi(0) = 0$$

Donc $u(x) \in \ker(\psi)$. Le noyau $\ker(\psi)$ est stable par u.

▶ Montrons $V = W \oplus \ker(\psi)$.

• Intersection :

Soit $x \in W \cap \ker(\psi)$. Alors $x \in W$, donc $\psi(x) = \varphi(x)$ et $x \in \ker(\psi)$, par suite $\psi(x) = \varphi(x) = 0$.

Comme φ est injective (8b), alors $x = 0$. Ce qui donne $W \cap \ker(\psi) = \{0\}$

• Somme :

D'après le théorème du rang appliqué à $\psi : V \to \mathcal{D}$,

$$\dim V = \dim(\ker \psi) + \dim(\mathrm{Im}\, \psi)$$

On a $\dim W = \mathrm{Card}(\mathcal{B}) = n$. Puisque $\varphi = \psi|_W$ est injective alors $\dim(\psi(W)) = \dim W = n$.

Par suite $\dim(\mathrm{Im}\, \psi) \geq \dim(\psi(W)) = n$.

D'après (8c), $\mathrm{Im}(\psi) \subseteq \ker(\xi^n)$ et d'après la question (4), $\dim(\ker \xi^n) = n$, donc $\dim(\mathrm{Im}\, \psi) \leq n$. On conclut que $\dim(\mathrm{Im}\, \psi) = n$.

Alors

$$\dim V = \dim(\ker \psi) + n = \dim(\ker \psi) + \dim W.$$

Puisque $W \cap \ker(\psi) = \{0\}$, on a la somme $W + \ker \psi$ est directe et

$$\dim(W \oplus \ker \psi) = \dim W + \dim(\ker \psi) = \dim V.$$

Comme $W \oplus \ker \psi$ est un sous-espace de V et $\dim(W \oplus \ker \psi) = \dim V$, alors on a $\boxed{V = W \oplus \ker(\psi)}$.

9 ▷ **Théorème de décomposition : existence**

Démontrons par récurrence sur $d = \dim V$ qu'il existe une base de V dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, avec des blocs de Jordan J_{r_i} sur la diagonale, et $r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_s > 0$.

▶ Si $\dim V = 1$, u est nilpotent, donc $u = 0$. Sa matrice est $J_1 = (0)$ avec $s = 1, r_1 = 1$.

Supposons le théorème vrai pour tout espace de dimension strictement inférieure à $d = \dim V$.

▶ Soit u nilpotent sur V .

Si $u = 0$, sa matrice (*dans n'importe quelle base*) est nulle, qui est $\mathrm{diag}(J_1, \ldots, J_1)$ (d fois), on peut prendre $s = d = 1$ et $r_1 = \cdots = r_s = 1$.

Si $u \neq 0$, soit $n \geq 1$ son indice de nilpotence. $n \geq 2$ car $u \neq 0$.

D'après la question (8), on peut décomposer $V = W \oplus W'$, où W est un sous-espace cyclique de dimension n (*associé à* v_0 *tel que* $u^{n-1}(v_0) \neq 0$), et $W' = \ker(\psi)$ est stable par u. Dans la base $\mathcal{B}_W = (v_0, \ldots, u^{n-1}(v_0))$ de W, la matrice de $u_W = u|_W$ est J_n .

Soit $u' = u|_{W'}$ l'endomorphisme induit sur W'. Comme u est nilpotent, u' est aussi nilpotent et

$$\dim W' = \dim V - \dim W = \dim V - n < \dim V$$

Par hypothèse de récurrence, il existe une base $\mathcal{B}'$ de W' et des entiers $r'_1 \geq \cdots \geq r'_{s'} > 0$ tels que la matrice de u' dans la base $\mathcal{B}'$ est $M' = \mathrm{diag}(J_{r'_1}, \ldots, J_{r'_{s'}})$.

Soit $\mathcal{B} = \mathcal{B}_W \cup \mathcal{B}'$. C'est une base de V car $V = W \oplus W'$. Dans la base $\mathcal{B}$, la matrice de u est de la forme :

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \left[\begin{array}{c|c} Mat_{\mathcal{B}_W}(u_W) & 0 \\ \hline 0 & Mat_{\mathcal{B}'}(u') \end{array}\right] = \mathrm{diag}(J_n, M') = \mathrm{diag}(J_n, J_{r'_1}, \ldots, J_{r'_{s'}})$$

Soit $r_1 = n$ et $(r_2, \ldots, r_{s'+1}) = (r'_1, \ldots, r'_{s'})$ et $s = s' + 1$. Par construction les r'_i sont des indices de nilpotence d'une restriction de u à un certain sous espace (*stable inclus dans* $W\prime$) , donc $r'_i \leq n$. On a donc obtenu la forme $\mathrm{diag}(J_{r_1}, \ldots, J_{r_s})$ avec $r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_s > 0$.

10 ▷ **Théorème de décomposition : unicité de la taille des blocs**

Démontrons que le nombre s et les tailles des blocs $r_1, \ldots, r_s$ ne dépendent que de u et non de la base .

Soit M la matrice de u dans une base où elle est sous la forme de Jordan $M = \mathrm{diag}(J_{r_1}, \ldots, J_{r_s})$.

D'après (2c) , on a $\delta_k(M) = \sum\limits_{i=1}^{s} \delta_k(J_{r_i})$. Avec $\delta_k(J_r) = \Delta_{k,r}$ (*Symbole de Kronecker; pour éviter la confusion avec* δ_k), donc $\delta_k(M) = \sum\limits_{i=1}^{s} \Delta_{k,r_i}$.

Cette somme compte le nombre de blocs J_{r_i} dont la taille est exactement k pour chaque $k \in [\![1, n]\!]$. Notons $n_k = \delta_k(M)$.

Si M' est une autre décomposition sous la forme de Jordan de u dans une autre base, M' est semblable à M.

D'après (2a), $\delta_k(M') = \delta_k(M) = n_k$, donc M et M' contiennent le même nombre de blocs de taille k.

La liste des tailles $(r_1, \ldots, r_s)$, une fois ordonnée de manière décroissante, est donc unique.

Le nombre total de blocs $s = \sum\limits_{k \geq 1} n_k = \sum\limits_{k \geq 1} \delta_k(M)$ est aussi uniquement déterminé par u.

V- Version ‹‹graduée›› du théorème de décomposition

On se donne V un espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme nilpotent de V, $N \in \mathbb{N}^*$, $\zeta = \exp(2i\pi/N)$, et h un endomorphisme inversible de V tel que $h^N = \mathrm{id}_V$ et $h \circ u \circ h^{-1} = \zeta u$.

11 ▷ **Propriétés de h**

(11a) L'endomorphisme h est annulé par le polynôme $P(X) = X^N - 1$, qui est scindé à racines simples (les ζ^j, $j \in [\![0, N-1]\!]$) sur $\mathbb{C}$, donc, h est diagonalisable.

(11b) Soit j un entier. On note $V_j = \ker(h - \zeta^j \mathrm{id}_V)$.

Soit $x \in V_j$ on a $h(x) = \zeta^j x$. De $h \circ u = \zeta u \circ h$, on tire $h(u(x)) = \zeta u(h(x))$. Par suite

$$h(u(x)) = \zeta u(h(x)) = \zeta u(\zeta^j x) = \zeta^{j+1} u(x)$$

donc $u(x) \in \ker(h - \zeta^{j+1}\mathrm{id}_V) = V_{j+1}$. Ainsi $\boxed{u(V_j) \subseteq V_{j+1}}$ pour tout $j \in [\![0, N-1]\!]$.

(11c) Calculons $h^k \circ u \circ h^{-k}$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

► Pour $k \geq 1$:

Si $k = 1$, $h \circ u \circ h^{-1} = \zeta u$.

Supposons que $h^k \circ u \circ h^{-k} = \zeta^k u$ pour un $k \geq 0$.

Alors

$$\begin{aligned} h^{k+1} \circ u \circ h^{-(k+1)} &= h \circ (h^k \circ u \circ h^{-k}) \circ h^{-1} \\ &= h \circ (\zeta^k u) \circ h^{-1} \\ &= \zeta^k (h \circ u \circ h^{-1}) \\ &= \zeta^k (\zeta u) \\ &= \zeta^{k+1} u. \end{aligned}$$

Donc la formule est vraie pour $k+1$, par suite elle est vraie pour tout $k \geq 0$.

► Pour $k < 0$, soit $k = -m$ avec $m > 0$.

Du cas précédent on a $h^m \circ u \circ h^{-m} = \zeta^m u$. En isolant u, $u = \zeta^{-m} h^m \circ u \circ h^{-m}$.

Composons par h^{-m} à gauche et par h^m à droite :

$$\begin{aligned} h^{-m} \circ u \circ h^m &= h^{-m} \circ (\zeta^{-m} h^m \circ u \circ h^{-m}) \circ h^m \\ &= \zeta^{-m} (h^{-m} h^m) \circ u \circ (h^{-m} h^m) \\ &= \zeta^{-m} u \end{aligned}$$

donc $h^k \circ u \circ h^{-k} = \zeta^k u$.

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\boxed{h^k \circ u \circ h^{-k} = \zeta^k u.}$

Soit $\ell \in \mathbb{N}$, on a

$$h \circ u^\ell \circ h^{-1} = (huh^{-1})^\ell = (\zeta u)^\ell = \zeta^\ell u^\ell$$

12 ▷ **Recherche d'un supplémentaire stable**

Soit W un sous-espace de V stable par u et h. On suppose que W admet un supplémentaire W' stable par u. Soit p le projecteur sur W parallèlement à W'. On note $\bar{p} = \frac{1}{N} \sum\limits_{k=0}^{N-1} h^k \circ p \circ h^{-k}$.

(12a) Vérifions que u et p commutent.

Soit $v \in V$, on peut décomposer $v = w + w'$ avec $w \in W$ et $w' \in W'$.

Donc $p(v) = w$ et $u(p(v)) = u(w)$. De plus $u(v) = u(w + w') = u(w) + u(w')$. Comme W et W' sont stables par u alors $u(w) \in W$ et $u(w') \in W'$. Donc

$$p(u(v)) = p(u(w) + u(w')) = p(u(w)) + p(u(w')) = u(w) + 0 = u(w).$$

Ce qui donne $u(p(v)) = p(u(v))$ pour tout $v \in V$. Ainsi, $\boxed{u \circ p = p \circ u.}$

(12b) Montrons que $\mathrm{Im}(\bar{p}) \subseteq W$ et pour tout $w \in W$, $\bar{p}(w) = w$.

► On a $\mathrm{Im}(p) = W$ et h bijective donc pour tout k,

$$\mathrm{Im}\left(h^k \circ p \circ h^{-k}\right) = h^k(\mathrm{Im}(p \circ h^{-k})) \subseteq h^k(\mathrm{Im}(p)) = h^k(W).$$

Comme W est stable par h, alors $h^k(W) = W$. Donc $\mathrm{Im}\left(h^k \circ p \circ h^{-k}\right) \subseteq W$, par suite,

$$\mathrm{Im}(\bar{p}) \subseteq \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{Im}\left(h^k \circ p \circ h^{-k}\right) \subseteq W. \quad \textit{(Somme d'espaces)}$$

► Soit $w \in W$. Comme W est stable par h et h^{-1} ($h^{-1} = h^{N-1}$), on a $h^{-k}(w) \in W$.

Puisque p est le projecteur sur W, $p(h^{-k}(w)) = h^{-k}(w)$. Alors on a

$$h^k \circ p \circ h^{-k}(w) = h^k(h^{-k}(w)) = w.$$

par suite

$$\bar{p}(w)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}(h^k\circ p\circ h^{-k})(w)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}w=\frac{1}{N}(Nw)=w.$$

Ainsi pour tout $w\in W$, $\bar{p}(w)=w$.

(12c) Montrons que $\bar{p}$ est un projecteur et $\mathrm{Im}(\bar{p})=W$.

► Soit $v\in V$. D'après (12b) on a $\bar{p}(v)\in\mathrm{Im}(\bar{p})\subseteq W$. Posons $w=\bar{p}(v)$. On a $\bar{p}(w)=w$, donc $\bar{p}(\bar{p}(v))=\bar{p}(w)=w=\bar{p}(v)$.

Ce qui donne $\bar{p}^2=\bar{p}$ et $\bar{p}$ est un projecteur.

► Son image est W.

En effet, $\mathrm{Im}(\bar{p})\subseteq W$ et pour tout $w\in W$, $\bar{p}(w)=w$, donc $w\in\mathrm{Im}(\bar{p})$, ainsi $W\subseteq\mathrm{Im}(\bar{p})$.

D'où $\boxed{\mathrm{Im}(\bar{p})=W}$.

(12d) Montrons que $\bar{p}$ commute avec h et avec u.

► On a

$$\begin{aligned}h\circ\bar{p}\circ h^{-1}&=h\circ\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}h^k\circ p\circ h^{-k}\right)\circ h^{-1}\\&=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}h\circ(h^k\circ p\circ h^{-k})\circ h^{-1}\\&=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}h^{k+1}\circ p\circ h^{-(k+1)}.\end{aligned}$$

Par le changement d'indice $j=k+1$, on a

$$h\circ\bar{p}\circ h^{-1}=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}h^j\circ p\circ h^{-j}.$$

Comme $h^N=\mathrm{id}_V$, $h^Nph^{-N}=p=h^0ph^{-0}$, donc

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}h^j\circ p\circ h^{-j}=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}h^j\circ p\circ h^{-j}=\bar{p}.$$

Ainsi $h\circ\bar{p}\circ h^{-1}=\bar{p}$, ce qui signifie que $\boxed{h\circ\bar{p}=\bar{p}\circ h}$.

► On a

$$\begin{aligned}\bar{p}\circ u&=\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}h^k\circ p\circ h^{-k}\right)\circ u\\&=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}h^k\circ p\circ\left(h^{-k}\circ u\right)\end{aligned}$$

On a $h^k\circ u\circ h^{-k}=\zeta^k u$ donc $u\circ h^{-k}=\zeta^k h^{-k}\circ u$ et

$$\begin{aligned}\bar{p}\circ u&=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}h^k\circ p\circ(\zeta^{-k}u\circ h^{-k})\\&=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\zeta^{-k}h^k\circ p\circ u\circ h^{-k}\end{aligned}$$

p et u commutent et $h^k\circ u=\zeta^k u\circ h^k$ donc

$$\begin{aligned}\bar{p}\circ u&=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\zeta^{-k}\left(h^k\circ u\right)\circ p\circ h^{-k}\\&=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}u\circ h^k\circ p\circ h^{-k}\\&=u\circ\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}h^k\circ p\circ h^{-k}\right)\end{aligned}$$

Ainsi on a $\boxed{u \circ \bar{p} = \bar{p} \circ u.}$

(12e) Comme $\bar{p}$ est un projecteur alors $V = \mathrm{Im}(\bar{p}) \oplus \ker(\bar{p})$.
On a $\mathrm{Im}(\bar{p}) = W$ donc $V = W \oplus \ker(\bar{p})$.
Comme $\bar{p}$ commute avec u et h (d'aprés 12d), alors $\ker(\bar{p})$ est stable par u et par h.

13 ▷ Version ‹‹graduée›› du théorème de décomposition

(13a) Soit n l'indice de nilpotence de u donc $u^{n-1} \neq 0, u^n = 0$. Il existe $x \in V$ tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$. Comme h est diagonalisable (11a), alors

$$V = \bigoplus_{j=0}^{N-1} V_j \quad \text{où } V_j = \ker(h - \zeta^j \mathrm{id}_V).$$

Décomposons $x = \sum_{j=0}^{N-1} x_j$ avec $x_j \in V_j$. Alors $u^{n-1}(x) = \sum_{j=0}^{N-1} u^{n-1}(x_j)$.
Puisque $u^{n-1}(x) \neq 0$, il existe au moins un indice $k \in [\![0, N-1]\!]$ tel que $u^{n-1}(x_k) \neq 0$. Posons $v = x_k$. On a $v \in V_k$, ce qui signifie que v est un vecteur propre de h (pour la valeur propre ζ^k), et $u^{n-1}(v) \neq 0$.

(13b) On cherche à démontrer le résultat par récurrence sur la dimension de V .

► Si $\dim V = 0$, le résultat est trivial.

► Si $u = 0$, alors h est diagonalisable. V se décompose en somme directe de $V_j = \ker(h - \zeta^j \mathrm{id})$. Une base de V est une réunion de bases des V_j. Dans cette base, u est nulle (matrice nulle, somme de blocs $J_1 = (0)$), et h est diagonale (somme de blocs $D_{1,j} = (\zeta^j)$). C'est bien de la forme annoncée avec $r_i = 1$.

► Supposons $\dim V > 0$, $u \neq 0$ et le résultat vrai pour tout espace vectoriel de dimension strictement inférieure à $\dim V$.
Soit $n \geq 1$ l'indice de nilpotence de u ($u^{n-1} \neq 0, u^n = 0$). D'après la question 13a, il existe un vecteur $v \in V$ et un entier $a \in [\![0, N-1]\!]$ tels que $h(v) = \zeta^a v$ et $u^{n-1}(v) \neq 0$. Considérons le sous-espace u-cyclique engendré par v :

$$W = \mathrm{vect}(v, u(v), \ldots, u^{n-1}(v))$$

La famille $\mathcal{B}_W = (v, u(v), \ldots, u^{n-1}(v))$ est une base de W (car $u^{n-1}(v) \neq 0$ et $u^n(v) = 0$). La dimension de W est n.
D'après la question (8a) , W est stable par u .
Stabilité par h : Calculons l'action de h sur les vecteurs de base $w_k = u^k(v)$. D'après (11c), $h \circ u^k = \zeta^k u^k \circ h$. donc

$$h(w_k) = h(u^k(v)) = (h \circ u^k)(v) = (\zeta^k u^k \circ h)(v) = \zeta^k u^k(h(v))$$

Comme $h(v) = \zeta^a v$, on a :

$$h(w_k) = \zeta^k u^k(\zeta^a v) = \zeta^{a+k} u^k(v) = \zeta^{a+k} w_k$$

Chaque vecteur w_k de la base $\mathcal{B}_W$ est un vecteur propre de h (pour la valeur propre ζ^{a+k}), donc $h(W) \subseteq W$ (W est stable par h)
Dans la base $\mathcal{B}_W = (w_0, ..., w_{b-1})$, la matrice de l'endomorphisme $u_W = u|_W$ est le bloc de Jordan J_n . La matrice de l'endomorphisme $h_W = h|_W$ est la matrice diagonale $D_{n,a} = \mathrm{diag}(\zeta^a, \zeta^{a+1}, \ldots, \zeta^{a+n-1})$. Le couple (u_W, h_W) est représenté par les matrices $(J_n, D_{n,a})$.
Nous avons trouvé un sous-espace W de V, stable par u et par h. D'après la question (12e) il existe un supplémentaire W' ($\ker \bar{p}$) de W qui est stable par u et par h. Nous avons la décomposition $V = W \oplus W'$, où W et W' sont stables par u et h. Soient $u' = u|_{W'}$ et $h' = h|_{W'}$ les endomorphismes induits sur W'.

- u' est nilpotent car u l'est.
- $h'^N = (h|_{W'})^N = h^N|_{W'} = \mathrm{id}_{W'}$.
- La stabilité de W' par u et h donne : $h' \circ u' \circ h'^{-1} = \zeta u'$.

Le couple (W', u', h') satisfait les hypothèses de de la propriété à démontre . Comme $\dim W = n \geq 1$ (car $u \neq 0$), on a $\dim W' = \dim V - n < \dim V$. Par hypothèse de récurrence, il existe une base $\mathcal{B}'$ de W' telle que les matrices

de u' et h' dans cette base, $Mat_{\mathcal{B}'}(u')$ et $Mat_{\mathcal{B}'}(h')$, sont diagonales par blocs, avec des blocs diagonaux de la forme (J_{r_i}, D_{r_i,a_i}).
Finalement : Soit $\mathcal{B} = \mathcal{B}_W \cup \mathcal{B}'$ la base de V obtenue en juxtaposant la base $\mathcal{B}_W$de Wet la base $\mathcal{B}'$de W'. Puisque $V = W \oplus W''$et que Wet W'sont stables par $u$et h, les matrices de u et h dans la base $\mathcal{B}$ sont :

$$\begin{aligned} Mat_{\mathcal{B}}(u) &= \left[\begin{array}{c|c} Mat_{\mathcal{B}_W}(u_W) & 0 \\ \hline 0 & Mat_{\mathcal{B}'}(u') \end{array}\right] = \mathrm{diag}(J_n, Mat_{\mathcal{B}'}(u')) \\ Mat_{\mathcal{B}}(h) &= \left[\begin{array}{c|c} Mat_{\mathcal{B}_W}(h_W) & 0 \\ \hline 0 & Mat_{\mathcal{B}'}(h') \end{array}\right] = \mathrm{diag}(D_{n,a}, Mat_{\mathcal{B}'}(h')) \end{aligned}$$

Ces matrices sont diagonales par blocs. Les blocs sont $(J_n, D_{n,a})$ et les blocs (J_{r_i}, D_{r_i,a_i}) provenant de la décomposition de (u', h').
La base $\mathcal{B}$ satisfait donc les conditions requises . Le résultat est ainsi prouvé par récurrence.

14 ▷ Un exemple

On suppose $N = 4$, donc $\zeta = i$, et $\ker(h - \mathrm{id}_V) = V_0 = \{0\}$. $V_j = \ker(h - i^j \mathrm{id}_V)$, $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$. On a $u(V_1) \subseteq V_2$, $u(V_2) \subseteq V_3$, $u(V_3) \subseteq V_0 = \{0\}$. Les applications induites sont $u_1 : V_1 \to V_2$ et $u_2 : V_2 \to V_3$. L'application $u_3 : V_3 \to V_0$ est nulle.

(14a) Montrons $u^3 = 0$.
Soit $x \in V$. On décompose $x = x_1 + x_2 + x_3$ avec $x_j \in V_j$.
$u(x_3) \in u(V_3) \subseteq V_0 = \{0\}$, donc $u(x_3) = 0$ et $u^3(x_3) = 0$.
$u^2(x_2) \in u(u(V_2)) \subseteq u(V_3) \subseteq V_0 = \{0\}$, donc $u^2(x_2) = 0$ et $u^3(x_2) = 0$.
$u^3(x_1) \in u^2(u(V_1)) \subseteq u^2(V_2) = \{0\}$, donc $u^3(x_1) = 0$.
Alors $u^3(x) = u^3(x_1) + u^3(x_2) + u^3(x_3) = 0$.
Puisque $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ alors $u^3 = 0$.

(14b) D'après la question (13b), V se décompose en somme directe de sous-espaces stables par u et h, sur chacun desquels le couple (u, h) est représenté (dans une base appropriée) par des matrices de la forme $(J_r, D_{r,a})$, appelé bloc de type (r, a), où J_r est un bloc de Jordan nilpotent de taille r, et $D_{r,a} = \mathrm{diag}(i^a, i^{a+1}, \dots, i^{a+r-1})$. Ici r est la taille du bloc, qui est aussi l'indice de nilpotence de la restriction de u à ce sous-espace. Comme $u^3 = 0$, on a $r \in \{1, 2, 3\}$. L'indice $a \in \{0, 1, 2, 3\}$ correspond à l'exposant de i pour la première valeur propre de h listée dans $D_{r,a}$.
Un bloc $(J_r, D_{r,a})$ correspond à un sous-espace W de dimension r avec une base $(w_0, \dots, w_{r-1})$ (si on utilise la base de 13b) telle que $u(w_k) = w_{k+1}$ (avec $w_r = 0$) et $h(w_k) = i^{a+k} w_k$. Le vecteur w_k est donc dans $V_{a+k \pmod 4}$. Comme $V_0 = \{0\}$, aucun des vecteurs de base w_k ne peut appartenir à V_0. L'indice $a + k \pmod 4$ ne peut donc jamais être égal à 0.
Analysons les types possibles (r, a) avec $r \in \{1, 2, 3\}$ et $a \in \{0, 1, 2, 3\}$.

▶ $r = 1$:

Une base est de la forme (w_0) avec $h(w_0) = i^a w_0$, $w_0 \in V_a$.
Il faut $a \neq 0$.

- **Type (1, 1):** $a = 1$. $J_1 = \mathrm{diag}(0)$, $D_{1,1} = \mathrm{diag}(i)$.

Couple : $(\mathrm{diag}(0), \mathrm{diag}(i))$.

- **Type (1,2):** $a = 2$. $J_1 = \mathrm{diag}(0), D_{1,2} = \mathrm{diag}(-1)$.

Couple : $(\mathrm{diag}(0), \mathrm{diag}(-1))$.

- **Type (1,3):** $a = 3$. $J_1 = (0), D_{1,3} = (-i)$

Couple : $((0), (-i))$.

▶ $r = 2$:

Une base est de la forme (w_0, w_1) avec $w_0 \in V_a$, $w_1 \in V_{a+1}$.
Il faut $a \neq 0$ et $a + 1 \neq 0$.

- **Type (2, 1):** $a = 1$. $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D_{2,1} = \mathrm{diag}(i^1, i^2)$.

Couple : $\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right)$.

• **Type (2, 2):** $a = 2$. $J_2 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $D_{2,2} = \mathrm{diag}(i^2, i^3)$.

Couple : $\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}\right)$.

► $r = 3$:

Une base est de la forme (w_0, w_1, w_2).

Il faut $a \neq 0, a+1 \neq 0, a+2 \neq 0$.

• **Type (3, 1):** $a = 1$. $J_3 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $D_{3,1} = \mathrm{diag}(i^1, i^2, i^3)$.

Couple : $\left(\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -i\end{pmatrix}\right)$.

Les types possibles sont donc $(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1)$.

(14c) L'objectif est de montrer que la donnée des dimensions $d_j = \dim V_j$ (pour $j = 1,2,3$) et des rangs $r_1 = \mathrm{rg}(u_1)$, $r_2 = \mathrm{rg}(u_2)$, $r_{21} = \mathrm{rg}(u_2 \circ u_1)$ détermine de manière unique le nombre de blocs de chaque type possible.

Supposons que la décomposition de (u, h) en somme directe de blocs indécomposables contienne :

- $n_{3,1}$ blocs de type $(3,1)$, chacun associé à une base $\mathcal{B}_{3,1}^{(i)} = (w_0^{(i)}, w_1^{(i)}, w_2^{(i)})$ où $w_k^{(i)} \in V_{1+k}$.
- $n_{2,a}$ blocs de type $(2,a)$, $a \in \{1,2\}$ chacun associé à une base $\mathcal{B}_{2,a}^{(j)} = (x_{0,a}^{(j)}, x_{1,a}^{(j)})$ où $x_{k,a}^{(j)} \in V_{a+k}$.
- $n_{1,a}$ blocs de type $(1,a)$, $a \in \{1,2,3\}$chacun associé à une base $\mathcal{B}_{1,a}^{(k)} = (y_{0,a}^{(k)})$ où $y_{0,a}^{(k)} \in V_a$.

La réunion de toutes ces bases, $\mathcal{B} = \left(\bigcup_i \mathcal{B}_{3,1}^{(i)}\right) \cup \left(\bigcup_{j,a} \mathcal{B}_{2,a}^{(j)}\right) \cup \left(\bigcup_{k,a} \mathcal{B}_{1,a}^{(k)}\right)$, forme une base de V.

La dimension $d_j = \dim V_j$ est le nombre de vecteurs de la base $\mathcal{B}$ qui appartiennent à V_j.

- Une base de V_1: $\left(w_0^{(i)}\right)_{1\leq i\leq n_{3,1}} \cup \left(x_{0,1}^{(j)}\right)_{1\leq j\leq n_{2,1}} \cup \left(y_{0,1}^{(k)}\right)_{1\leq k\leq n_{1,1}}$. Donc $d_1 = n_{1,1} + n_{2,1} + n_{3,1}$.
- Une basede V_2: $\left(w_1^{(i)}\right)_{1\leq i\leq n_{3,1}} \cup \left(x_{1,1}^{(j)}\right)_{1\leq j\leq n_{2,1}} \cup \left(x_{0,2}^{(k)}\right)_{1\leq k\leq n_{0,2}} \cup \left(y_{0,2}^{(h)}\right)_{1\leq h\leq n_{2,2}}$. Donc $d_2 = n_{2,1} + n_{3,1} + n_{1,2} + n_{2,2}$.
- Une basede V_3: $\left(w_2^{(i)}\right)_{1\leq i\leq n_{3,1}} \cup \left(x_{1,2}^{(j)}\right)_{1\leq j\leq n_{1,2}} \cup \left(y_{0,3}^{(k)}\right)_{1\leq k\leq n_{0,3}}$. Donc $d_3 = n_{3,1} + n_{2,2} + n_{1,3}$.

Le rang $\mathrm{rg}(f)$ d'une application linéaire est la dimension de $\mathrm{Im}(f)$, qui est engendrée par l'image de la base de l'espace de départ.

- $r_1 = \mathrm{rg}(u_1 : V_1 \to V_2)$:

Les vecteurs de la base de V_1 dont l'image est non nulle sont les $w_0^{(i)}$ (image $w_1^{(i)}$) et $x_{0,1}^{(j)}$ (image $x_{1,1}^{(j)}$) donc $\mathrm{Im}(u_1) = \mathrm{vect}\left(\left(w_1^{(i)}\right)_{1\leq i\leq n_{3,1}} \cup \left(x_{1,1}^{(j)}\right)_{1\leq j\leq n_{2,1}}\right)$. Donc $r_1 = n_{3,1} + n_{2,1}$.

- $r_2 = \mathrm{rg}(u_2 : V_2 \to V_3)$:

Les vecteurs de la base de V_2 dont l'image est non nulle sont les $w_1^{(i)}$ (image $w_2^{(i)}$) et $x_{1,1}^{(j)}$ (image $x_{1,2}^{(j)}$) donc $\mathrm{Im}(u_2) = \mathrm{vect}\left(\left(w_2^{(i)}\right)_{1\leq i\leq n_{3,1}} \cup \left(x_{1,2}^{(j)}\right)_{1\leq j\leq n_{1,2}}\right)$. Donc $r_2 = n_{3,1} + n_{2,2}$.

- $r_{21} = \mathrm{rg}(u_2 \circ u_1 : V_1 \to V_3)$:

Seuls les $w_0^{(i)}$ de V_1 ont une image non nulle par $u_2 \circ u_1$, qui est $w_2^{(i)}$. $\mathrm{Im}(u_2 \circ u_1) = \mathrm{vect}\left(\left(w_2^{(i)}\right)_{1\leq i\leq n_{3,1}}\right)$. Donc $r_{21} = n_{3,1}$.

On obtient le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl}
n_{1,1} + n_{2,1} + n_{3,1} & = & d_1\\
n_{1,2} + n_{2,1} + n_{2,2} + n_{3,1} & = & d_2\\
n_{1,3} + n_{2,2} + n_{3,1} & = & d_3\\
n_{2,1} + n_{3,1} & = & r_1\\
n_{2,2} + n_{3,1} & = & r_2\\
n_{3,1} & = & r_{21}
\end{array}\right.$$

Dont la solution est

$$\begin{cases} n_{3,1} & = & r_{21} \\ n_{2,1} & = & r_1 - r_{21} \\ n_{2,2} & = & r_2 - r_{21} \\ n_{1,1} & = & d_1 - r_1 \\ n_{1,2} & = & d_2 - r_1 - r_2 + r_{21} \\ n_{1,3} & = & d_3 - r_2 \end{cases}$$

Les nombres de blocs $n_{r,a}$ sont donc uniquement déterminés par les données $d_1, d_2, d_3, r_1, r_2, r_{21}$.

VI- Classification des couples de matrices rectangulaires

On fixe $m, n \in \mathbb{N}^*$. On étudie les couples $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. On pose $V = \mathbb{C}^{m+n}$, $M_{A,B} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline A & 0 \end{array}\right] \in \mathcal{M}_{m+n}(\mathbb{C})$ et $H = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_m & 0 \\ \hline 0 & -\mathrm{I}_n \end{array}\right] \in \mathcal{M}_{m+n}(\mathbb{C})$.

15 ▷ **Une réduction**

Soient (A, B) et (A', B') deux couples de matrices.

- ► **(i)** $\iff$ **(ii)**

C'est la définition donnée de l'équivalence simultanée .

- ► **(ii)** $\implies$ **(iii)**.

Supposons qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ et $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tels que $A' = QAP^{-1}$ et $B' = PBQ^{-1}$.

Posons $R = \left[\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right]$. Puisque P et Q sont inversibles, R est inversible et $R \in \mathrm{GL}_{m+n}(\mathbb{C})$. Sa matrice inverse est $R^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} P^{-1} & 0 \\ \hline 0 & Q^{-1} \end{array}\right]$. Calculons $RM_{A,B}R^{-1}$:

$$\begin{aligned} RM_{A,B}R^{-1} &= \left[\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline A & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} P^{-1} & 0 \\ \hline 0 & Q^{-1} \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} 0 & BQ^{-1} \\ \hline AP^{-1} & 0 \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} 0 & PBQ^{-1} \\ \hline QAP^{-1} & 0 \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} 0 & B' \\ \hline A' & 0 \end{array}\right] \\ &= M_{A',B'} \end{aligned}$$

Calculons RHR^{-1}:

$$\begin{aligned} RHR^{-1} &= \left[\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_m & 0 \\ \hline 0 & -\mathrm{I}_n \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} P^{-1} & 0 \\ \hline 0 & Q^{-1} \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} P^{-1} & 0 \\ \hline 0 & -Q^{-1} \end{array}\right] \\ &= \begin{pmatrix} PP^{-1} & 0 \\ 0 & -QQ^{-1} \end{pmatrix} \left[\begin{array}{c|c} PP^{-1} & 0 \\ \hline 0 & -QQ^{-1} \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_m & 0 \\ \hline 0 & -\mathrm{I}_n \end{array}\right] \\ &= H \end{aligned}$$

Donc **(iii)** est vérifiée.

▶ **(iii)** $\implies$ **(ii)**.

Supposons qu'il existe $R \in \mathrm{GL}_{m+n}(\mathbb{C})$ telle que $M_{A',B'} = RM_{A,B}R^{-1}$ et $H = RHR^{-1}$.

La condition $H = RHR^{-1}$ signifie que R commute avec H. Écrivons R par blocs : $R = \left[\begin{array}{c|c} R_{11} & R_{12} \\ \hline R_{21} & R_{22} \end{array}\right]$, où $R_{11} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C}), R_{12} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}), R_{21} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C}), R_{22} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$$\begin{aligned} RH &= \left[\begin{array}{c|c} R_{11} & R_{12} \\ \hline R_{21} & R_{22} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_m & 0 \\ \hline 0 & -\mathrm{I}_n \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} R_{11} & -R_{12} \\ \hline R_{21} & -R_{22} \end{array}\right] \\ HR &= \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_m & 0 \\ \hline 0 & -\mathrm{I}_n \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} R_{11} & R_{12} \\ \hline R_{21} & R_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} R_{11} & R_{12} \\ \hline -R_{21} & -R_{22} \end{array}\right] \end{aligned}$$

L'égalité $RH = HR$ implique

$$\begin{aligned} R_{11} &= R_{11}, \\ -R_{12} &= R_{12}, \\ R_{21} &= -R_{21}, \\ -R_{22} &= -R_{22} \end{aligned}$$

Ce qui donne $R_{12} = 0$ et $R_{21} = 0$.

Donc R doit être diagonale par blocs : $R = \left[\begin{array}{c|c} R_{11} & 0 \\ \hline 0 & R_{22} \end{array}\right]$. Puisque R est inversible, ses blocs diagonaux R_{11} et R_{22} doivent être inversibles. Posons $P = R_{11} \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ et $Q = R_{22} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Alors $R = \left[\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right]$. D'après le calcul précédent, $RM_{A,B}R^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & PBQ^{-1} \\ \hline QAP^{-1} & 0 \end{array}\right]$. La condition $M_{A',B'} = RM_{A,B}R^{-1}$ implique $\left[\begin{array}{c|c} 0 & B' \\ \hline A' & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 0 & PBQ^{-1} \\ \hline QAP^{-1} & 0 \end{array}\right]$. En identifiant les blocs, on obtient $A' = QAP^{-1}$ et $B' = PBQ^{-1}$.

Ceci est la condition **(ii)**.

Les trois conditions sont donc équivalentes.

16 ▷ **Deux applications linéaires : décomposition**

On note $M = M_{A,B}$.

(16a) Calculons H^2, HMH^{-1}, et $HP(M)H^{-1}$.

$$H^2 = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_m & 0 \\ \hline 0 & -\mathrm{I}_n \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_m & 0 \\ \hline 0 & -\mathrm{I}_n \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_m^2 & 0 \\ \hline 0 & (-\mathrm{I}_n)^2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_m & 0 \\ \hline 0 & -\mathrm{I}_n \end{array}\right] = \mathrm{I}_{m+n}.$$

Puisque $H^2 = \mathrm{I}_{n+m}$ alors $H^{-1} = H$.

$$\begin{aligned} HMH^{-1} = HMH &= \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_m & 0 \\ \hline 0 & -\mathrm{I}_n \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline A & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_m & 0 \\ \hline 0 & -\mathrm{I}_n \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_m & 0 \\ \hline 0 & -\mathrm{I}_n \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} 0 & -B \\ \hline A & 0 \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline -A & 0 \end{array}\right] \\ &= -M. \end{aligned}$$

Pour un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(X) = \sum_{k=0}^{d} c_k X^k$, on a

$$HP(M)H^{-1} = H\left(\sum_{k=0}^{d} c_k M^k\right)H^{-1} = \sum_{k=0}^{d} c_k HM^kH^{-1}.$$

et
$$HM^kH^{-1} = (HMH^{-1})^k = (-M)^k = (-1)^k M^k$$
Donc $HP(M)H^{-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} c_k(-1)^k M^k = P(-M)$.

(16b) Soit λ une valeur propre de M.
M et $HMH^{-1} = -M$ sont semblables, donc elles ont le même polynôme caractéristique. $\chi_M(X) = \chi_{-M}(X)$.
Soit $p = m + n$.

$$\begin{array}{rcl} \chi_{-M}(X) & = & \det(X\mathrm{I}_{n+m} - (-M)) \\ & = & \det(X\mathrm{I}_{n+m} + M) \\ & = & \det(-((-X)\mathrm{I}_{n+m} - M)) \\ & = & (-1)^p \det((-X)\mathrm{I}_{n+m} - M) \\ & = & (-1)^p \chi_M(-X) \end{array}$$

Donc $\chi_M(X) = (-1)^p \chi_M(-X)$.
Si λ est une racine de $\chi_M(X)$ de multiplicité k, alors $\chi_M(X) = (X - \lambda)^k Q(X)$ avec $Q(\lambda) \neq 0$.

$$\begin{array}{rcl} \chi_M(X) & = & (-1)^p \chi_M(-X) \\ & = & (-1)^p (-X - \lambda)^k Q(-X) \\ & = & (-1)^{p+k} (X + \lambda)^k Q(-X) \end{array}$$

donc $(X+\lambda)^k$ divise $\chi_M(X)$. La multiplicité de $-\lambda$ est donc au moins k. En remplaçant λ par $-\lambda$, on obtient l'inégalité inverse. Donc la multiplicité de $-\lambda$ est exactement k.
Ainsi si λ est une valeur propre de M de multiplicité k, alors $-\lambda$ est aussi une valeur propre de M avec la même multiplicité k.

(16c) Soit $\chi_M(X) = X^r Q(X)$ où $Q(0) \neq 0$.
D'après le théorème de décomposition des noyaux, puisque X^r et $Q(X)$ sont premiers entre eux (car $Q(0) \neq 0$), on a :

$$\ker(\chi_M(M)) = \ker(M^r Q(M)) = \ker(M^r) \oplus \ker(Q(M)).$$

Par le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_M(M) = 0$, donc $\ker(\chi_M(M)) = \mathbb{C}^{m+n}$. Ainsi $\mathbb{C}^{m+n} = \ker(M^r) \oplus \ker(Q(M))$.
Vérifions que ces sous-espaces sont stables par H.
Soit $v \in \ker(M^r)$, donc $M^r v = 0$. On a $HM^rH^{-1} = (-1)^r M^r$ (d'après 16a), donc $M^r H = (-1)^r HM^r$ et

$$M^r(Hv) = H((-1)^r M^r v) = (-1)^r H(0) = 0.$$

Ainsi $Hv \in \ker(M^r)$ et $\ker(M^r)$ est stable par H.
Soit $v \in \ker(Q(M))$, donc $Q(M)v = 0$. On a $HQ(M)H^{-1} = Q(-M)$. Donc

$$Q(-M)(Hv) = (HQ(M)H^{-1})(Hv) = HQ(M)v = H(0) = 0.$$

On sait (d'après 16b) que $Q(X) = (-1)^{p+r} Q(-X)$. Donc $Q(M) = (-1)^{p+r} Q(-M)$ et

$$Q(M)(Hv) = (-1)^{p+r} Q(-M)(Hv) = (-1)^{p+r} 0 = 0.$$

Ainsi $Hv \in \ker(Q(M))$ et $\ker(Q(M))$ est stable par H.

17 ▷ **Deux applications linéaires : cas nilpotent**
$M = M_{A,B} = \left[\begin{array}{c|c} 0_m & B \\ \hline A & 0_n \end{array}\right]$ et $H = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_m & 0 \\ \hline 0 & -\mathrm{I}_n \end{array}\right]$.
On suppose que M est nilpotente. Alors $\chi_M(X) = X^{m+n}$.
M est nilpotent, $H^2 = \mathrm{I}$, $HMH^{-1} = -M$. C'est un cas particulier de la situation de la Partie V avec $N = 2$ et $\zeta = -1$. D'après le théorème de décomposition graduée (question 13b), il existe une base de $V = \mathbb{C}^{m+n}$ dans laquelle

M et H sont simultanément diagonales par blocs, les blocs étant de la forme $(J_r, D_{r,a})$ et $a \in \{0,1\}$. Ici $\zeta = -1$, donc $D_{r,a} = \mathrm{diag}((-1)^a, (-1)^{a+1}, \dots, (-1)^{a+r-1})$.
Les blocs possibles sont $(J_r, D_{r,0})$ et $(J_r, D_{r,1})$ avec $D_{r,0} = \mathrm{diag}(1,-1,1,\dots,(-1)^{r-1})$ et $D_{r,1} = \mathrm{diag}(-1,1,-1,\dots,(-1)^r)$.
La question demande de montrer que (M, H) est simultanément semblable à un couple (M_0, H_0) de matrices diagonales par blocs dont les blocs diagonaux sont de la forme $\left(\left[\begin{array}{c|c} 0 & B_0 \\ \hline A_0 & 0 \end{array}\right], \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_t & 0 \\ \hline 0 & -\mathrm{I}_s \end{array}\right]\right)$, où $|t-s| \leq 1$ et (A_0, B_0) est l'un des 4 couples listés.
Soit W un sous-espace indécomposable de dimension r sur lequel $(M|_W, H|_W)$ agit comme $(J_r, D_{r,a})$ dans une base $\mathcal{B}_W = (w_0, \dots, w_{r-1})$ la base associée . $(Mw_j = w_{j+1}$, $Hw_j = (-1)^{a+j} w_j)$.
Décomposons W en fonction des sous-espaces propres de $H|_W$:

- $E_1 = \ker(H|_W - \mathrm{I}) = \mathrm{vect}\{w_j \mid a+j \text{ est pair}\}$.
- $E_{-1} = \ker(H|_W + \mathrm{I}) = \mathrm{vect}\{w_j \mid a+j \text{ est impair}\}$.

$H|_W$ est diagonalisable et $W = E_1 \oplus E_{-1}$. Posons $t = \dim E_1$ et $s = \dim E_{-1}$. On a $t + s = r$. Les éléments diagonaux de $D_{r,a}$ alternent entre $+1$ et -1. Le nombre de $+1$ (qui est t) et le nombre de -1 (qui est s) ne peuvent donc différer que d'au plus 1. La condition $|t-s| \leq 1$ est donc satisfaite .
Considérons une nouvelle base $\mathcal{B}'_W$ de W obtenue en prenant d'abord les vecteurs de base de E_1 puis ceux de E_{-1}. Dans cette base $\mathcal{B}'_W$, l'endomorphisme $H|_W$ a pour matrice $H_0 = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_t & 0 \\ \hline 0 & -\mathrm{I}_s \end{array}\right]$.
La matrice M envoie w_j sur w_{j+1} . L'action de M change la valeur propre de H de $\lambda = (-1)^{a+j}$ à $(-1)^{a+j+1} = -\lambda$. Donc, $M(E_1) \subseteq E_{-1}$ et $M(E_{-1}) \subseteq E_1$. Dans la base $\mathcal{B}'_W$, la matrice de $M|_W$ prend la forme $M_0 = \left[\begin{array}{c|c} 0 & B_0 \\ \hline A_0 & 0 \end{array}\right]$, où $A_0 \in \mathcal{M}_{s,t}(\mathbb{C})$ représente l' application $M|_{E_1} : E_1 \to E_{-1}$ et $B_0 \in \mathcal{M}_{t,s}(\mathbb{C})$ représente l' application de $M|_{E_{-1}} : E_{-1} \to E_1$.
Il faut vérifier que les matrices (A_0, B_0) obtenues pour chaque type de bloc $(J_r, D_{r,a})$ correspondent aux quatre couples de l'énoncé, en utilisant les valeurs de $t = \dim E_1$ et $s = \dim E_{-1}$ calculées.

▶ **Bloc** $(J_r, D_{r,0})$ **avec** $r = 2\ell + 1$. $(a = 0)$

On a $D_{r,0} = \mathrm{diag}(1,-1,\dots,1)$ donc $t = \dim E_1 = \ell + 1$ et $s = \dim E_{-1} = \ell$. $H_0 = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_{\ell+1} & 0 \\ \hline 0 & -\mathrm{I}_\ell \end{array}\right]$. $|t-s| = 1$.

L'action $M(E_1) \subseteq E_{-1}$ $(A_0 : \mathbb{C}^t \to \mathbb{C}^s)$ et $M(E_{-1}) \subseteq E_1$ $(B_0 : \mathbb{C}^s \to \mathbb{C}^t)$ donne $A_0 = \left[\begin{array}{c|c} & 0 \\ \mathrm{I}_\ell & \vdots \\ & 0 \end{array}\right]$ et

$B_0 = \left[\begin{array}{c} 0 \quad \cdots \quad 0 \\ \hline \mathrm{I}_\ell \end{array}\right]$.

Ce couple (A_0, B_0) correspond au Couple 1 de l'énoncé.

▶ **Bloc** $(J_r, D_{r,1})$ **avec** $r = 2\ell + 1$. $(a = 1)$

On a $D_{r,1} = \mathrm{diag}(-1,1,\dots,-1)$. $t = \dim E_1 = \ell$ et $s = \dim E_{-1} = \ell + 1$. $H_0 = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_\ell & 0 \\ \hline 0 & -\mathrm{I}_{\ell+1} \end{array}\right]$.$|t-s| = 1$.

On trouve $A_0 = \left[\begin{array}{c} 0 \quad \cdots \quad 0 \\ \hline \mathrm{I}_\ell \end{array}\right]$ et $B_0 = \left[\begin{array}{c|c} & 0 \\ \mathrm{I}_\ell & \vdots \\ & 0 \end{array}\right]$.

Ce couple (A_0, B_0) correspond au Couple 4 de l'énoncé.

▶ **Bloc** $(J_r, D_{r,1})$ **avec** $r = 2\ell$. $(a = 1)$

On a $D_{r,1} = \mathrm{diag}(-1,1,\dots,1)$. $t = \dim E_1 = \ell$ et $s = \dim E_{-1} = \ell$. $H_0 = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_\ell & 0 \\ \hline 0 & -\mathrm{I}_\ell \end{array}\right]$. $|t-s| = 0$.

On trouve $A_0 = J_\ell$ et $B_0 = \mathrm{I}_\ell$.
Ce couple (A_0, B_0) correspond au Couple 3 de l'énoncé.

▶ **Bloc** $(J_r, D_{r,0})$ **avec** $r = 2\ell$. $(a = 0)$

On a $D_{r,0} = \mathrm{diag}(1,-1,\dots,-1)$. $t = \dim E_1 = \ell$ et $s = \dim E_{-1} = \ell$. $H_0 = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_\ell & 0 \\ \hline 0 & -\mathrm{I}_{\ell+1} \end{array}\right]$. $|t-s| = 0$.

On trouve $A_0 = \mathrm{I}_\ell$ et $B_0 = J_\ell$.

Ce couple (A_0, B_0) correspond au Couple 2 de l'énoncé.

18 ▷ Deux applications linéaires : cas inversible

On suppose que $M = M_{A,B}$ est inversible.

(18a) Montrons que $m = n$ et que A et B sont inversibles.

On a $M = \left[\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline A & 0 \end{array}\right]$ avec $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ et

$$M^2 = \left[\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline A & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline A & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} BA & 0 \\ \hline 0 & -AB \end{array}\right].$$

Comme M est inversible, M^2 est inversible, donc $\det(M^2) \neq 0$. On a $\det(M^2) = \det(BA)\det(AB) \neq 0$. Donc BA (matrice $m \times m$) et AB (matrice $n \times n$) sont inversibles.

Par suite $\mathrm{rg}(BA) = m$ et $\mathrm{rg}(AB) = n$. On sait que

$\mathrm{rg}(AB) \leq \min(\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B))$ et $\mathrm{rg}(BA) \leq \min(\mathrm{rg}(B), \mathrm{rg}(A))$, donc $\min(\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B)) \geq \max(n, m)$.

Puisque $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ donc , $\mathrm{rg}(A) \leq \min(m, n)$ et $\mathrm{rg}(B) \leq \min(n, m)$, ce qui donne

$$\max(n, m) \leq \min(\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B)) \leq \min(m, n)$$

Ainsi on a $m = n$.

On a $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\det(AB) = \det(A)\det(B) \neq 0$, donc $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$.

(18b) On a $m = n$. $M = \left[\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline A & 0 \end{array}\right]$ avec $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$ et $H = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_n & 0 \\ \hline 0 & -\mathrm{I}_n \end{array}\right]$. Considérons la matrice de changement de base $R = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_n & 0 \\ \hline 0 & A \end{array}\right]$, elle est inversible et $R^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_n & 0 \\ \hline 0 & A^{-1} \end{array}\right]$. On a

$$M_1 = R^{-1}MR = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_n & 0 \\ \hline 0 & A^{-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline A & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_n & 0 \\ \hline 0 & A \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_n & 0 \\ \hline 0 & A^{-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 0 & BA \\ \hline A & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline \mathrm{I}_n & 0 \end{array}\right]$$

$$H_1 = R^{-1}HR = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_n & 0 \\ \hline 0 & A^{-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_n & 0 \\ \hline 0 & -\mathrm{I}_n \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_n & 0 \\ \hline 0 & A \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_n & 0 \\ \hline 0 & A^{-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_n & 0 \\ \hline 0 & -A \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_n & 0 \\ \hline 0 & -\mathrm{I}_n \end{array}\right] = H$$

donc (M, H) est simultanément semblable au couple (M_1, H) .

Posons $C = BA$, on a $C \in GL_n(\mathbb{C})$ et $0 \notin Sp(C)$.

Pour tout $\lambda \in Sp(C)$ de multiplicité m_λ, posons $F_\lambda = \ker((C - \lambda \mathrm{I})^{m_\lambda})$. Le théorème de décomposition des noyaux et le théorème de Cayley-Hamilton donne :

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda \in Sp(M)} F_\lambda$$

La restriction à F_λ, de l'endomorphisme canoniquement associé à $C - \lambda\mathrm{I}$ est nilpotente , donc d'après 9 , il existe ue base de F_λ dans laquelle se matrice est de la forme $\mathrm{diag}(J_{s_1}, \ldots, J_{s_q})$, avec J_{s_I} des blocs de Jordan . Donc la matrice de la restriction à F_λ, de l'endomorphisme canoniquement associé à C est de la forme $\mathrm{diag}(\lambda\mathrm{I}_{s_1} + J_{s_1}, \ldots, \lambda\mathrm{I}_{s_q} + J_{s_q})$. Ainsi C est semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme

$$Z = \mathrm{diag}(\lambda_1\mathrm{I}_{r_1} + J_{r_1}, \ldots, \lambda_p\mathrm{I}_{r_p} + J_{r_p}) \text{ avec } \lambda_1, ..., \lambda_p \in Sp(C)$$

Donc M est semblable à $M_2 = \left[\begin{array}{c|c} 0 & Z \\ \hline \mathrm{I}_n & 0 \end{array}\right]$ et (M, H) est simultanément semblable au couple (M_2, H) .

La base canonique de $\mathbb{C}^{2n}$ est $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n)$, où e_i correspondent aux n premières coordonnées (bloc I_n de M_2) et f_i aux n dernières (bloc Z de M). La décomposition de Z correspond à une partition de $\{1, \ldots, n\}$ en p

intervalles d'indices $K_1, \ldots, K_p$ de tailles respectives $r_1, \ldots, r_p$. Le bloc d'indice k agit sur $\mathrm{vect}(e_i)_{i \in K_k}$. La matrice I_n se décompose aussi selon cette partition $\mathrm{I}_n = \mathrm{diag}(\mathrm{I}_{r_1}, \ldots, \mathrm{I}_{r_p})$.
Consdérons la base :

$$\mathcal{C} = \big((e_i)_{i \in K_1}, (f_i)_{i \in K_1}, (e_i)_{i \in K_2}, (f_i)_{i \in K_2}, \ldots, (e_i)_{i \in K_p}, (f_i)_{i \in K_p}\big)\,.$$

obtenue par permutation des vecteurs de la base canonique .
Le changement de base de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ permet de dire que (M, H) est simultanément semblable à un couple de matrices diagonales par blocs dont les blocs diagonaux sont de taille paire et sont respectivement de la forme

$$\left[\begin{array}{c|c} 0_r & B_1 \\ \hline A_1 & 0_r \end{array}\right] \quad \text{et} \quad \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_r & 0 \\ \hline 0 & -\mathrm{I}_r \end{array}\right]$$

où

$$A_1 = \mathrm{I}_r \text{ et } B_1 = \lambda \mathrm{I}_r + J_r \qquad .$$