

Proposition de correction : X MP Maths B 2025

Awatef Nasri

khaled.jebari@imt-atlantique.net

21 avril 2025

Attention : Il s'agit d'une proposition de corrigé rédigée de manière impulsive. Si vous repérez une erreur ou une imprécision, n'hésitez pas à me contacter par mail.

Première Partie

1a)

Soit $N \geq 1$. Soit h une fonction qui s'annule à l'ordre $N + 1$ dans $[a, b]$.

Alors il existe $a \leq c_1 < c_2 < \dots < c_m \leq b$, et des entiers $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\sum_{i=1}^m k_i = N + 1 \quad \text{et} \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}, \forall 0 \leq k < k_i, h^{(k)}(c_i) = 0.$$

Cela équivaut à :

$$\begin{cases} h(c_i) = 0 \quad \forall 1 \leq i < m, \\ \forall i \in \{1, \dots, m\}, \forall 0 \leq k < k_i - 1, h^{(k)}(c_i) = 0. \end{cases} \quad (\star)$$

Le point $(\star)$ donne, à l'aide du théorème de Rolle, l'existence de $\gamma_1, \dots, \gamma_{m-1}$ tels que

$$a \leq c_1 < \gamma_1 < c_2 < \gamma_2 < \dots < \gamma_{m-1} < c_m \leq b,$$

et

$$h'(\gamma_1) = \dots = h'(\gamma_{m-1}) = 0.$$

On a aussi, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, $h'(c_i) = 0$. Ainsi, $h'(c_i) = h'(\gamma_j) = 0$ pour tous les i et j , ce qui garantit la condition pour $k = 1$ (notée (I)).

On ajoute $(m - 1)$ indices k_i égaux à 1, correspondant aux γ_j , c'est-à-dire $m - 1$ nouveaux points, chacun comptant pour 1 dans la somme des ordres.

On a alors :

$$\sum_{i=1}^m (k_i - 1) + (m - 1) = (N + 1) - m + (m - 1) = N.$$

Avec (I) et la deuxième ligne de $(\star)$, on en déduit que h' s'annule d'ordre N .

1b)

En utilisant la question **1a** par une récurrence décroissante, on montre que $h^{(k)}$ s'annule d'ordre $N + 1 - k$ dans $[a, b]$, pour toute fonction h qui s'annule d'ordre $N + 1$ sur $[a, b]$, et pour tout $k \in \{0, \dots, N\}$.

En particulier, $h^{(N)}$ s'annule d'ordre 1 sur $[a, b]$.

En appliquant la définition de l'ordre d'annulation, on a :

$$\sum_{i=1}^m k_i = 1 \quad \text{avec} \quad k_i \geq 1.$$

Cela impose que $m = 1$ et $k_1 = 1$, donc il existe $c \in [a, b]$ tel que $h^{(N)}(c) = 0$.

2a)

On a pour tout $k < k_i$, on a $P^{(k)}(t_i) = 0$, par définition de k_i comme le plus petit entier pour lequel $P^{(k_i)}(t_i) \neq 0$.

Cela signifie que, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, les t_i sont des racines de multiplicité k_i de P , donc :

$$P(t) = \alpha \prod_{i=1}^m (t - t_i)^{k_i},$$

et c'est le même cas pour le polynôme Q , d'après l'énoncé :

$$Q(t) = \frac{1}{\alpha} SP(t) \quad \text{avec } S \in \mathbb{R}[X]$$

Or, $\deg(Q) < \deg(P)$, donc nécessairement $S = 0$, ce qui donne $Q = 0$.

2b)

L'existence découle d'une généralisation de l'interpolation d'Hermite.

Cette construction peut être consultée dans la page Wikipédia suivante : *Interpolation d'Hermite*, section « Extension aux ordres supérieurs »

https://fr.wikipedia.org/wiki/Interpolation_d%27Hermite

Unicité : on peut prendre H_1, H_2 et appliquer **2a** sur $H_1 - H_2$ (qui donne $H_1 - H_2 = 0 \Rightarrow H_1 = H_2$) d'où l'unicité.

3a)

On a, pour tout $1 \leq i \leq m$ et tout $x \in [a, b]$ par un changement de variable $u = t_i \nu + x(1 - \nu)$:

$$\begin{aligned} (x - t_i)^{k_i} \int_0^1 \frac{\nu^{k_i-1}}{(k_i-1)!} g^{(k_i)}(t_i \nu + x(1 - \nu)) d\nu &= (x - t_i)^{k_i} \int_x^{t_i} \frac{(u - x)^{k_i-1}}{(k_i-1)! \cdot (t_i - x)^{k_i-1}} g^{(k_i)}(u) \frac{du}{t_i - x} \\ &= (-1)^{k_i} \int_x^{t_i} \frac{(u - x)^{k_i-1}}{(k_i-1)!} g^{(k_i)}(u) du \\ &= \int_{t_i}^x \frac{(x - u)^{k_i-1}}{(k_i-1)!} g^{(k_i)}(u) du \end{aligned}$$

Comme $\forall 1 \leq i \leq m, \forall 0 \leq k < k_i, g^{(k)}(t_i) = 0$ (d'après **2b**), alors d'après la formule de Taylor avec reste intégral, cette dernière intégrale est égale à $g(x)$.

On obtient donc :

$$g(x) = (x - t_i)^{k_i} \int_0^1 \frac{\nu^{k_i-1}}{(k_i-1)!} g^{(k_i)}(t_i \nu + x(1 - \nu)) d\nu$$

3b)

On a :

$$Q(t) = \frac{1}{\prod_{j \neq i} (t - t_j)^{k_j}} \int_0^1 \frac{\nu^{k_i-1}}{(k_i-1)!} g^{(k_i)}(t_i \nu + t(1 - \nu)) d\nu$$

On a alors $\forall \nu \in [0, 1]$:

$$\lim_{t \rightarrow t_i} \psi(\nu, t) = \frac{\nu^{k_i-1}}{(k_i-1)!} g^{(k_i)}(t_i)$$

où $\psi(\nu, t) := \frac{\nu^{k_i-1}}{(k_i-1)!} g^{(k_i)}(t_i \nu + t(1 - \nu))$

— Pour tout $\nu \in [0, 1], t \in [a, b]$, on a $|\psi(\nu, t)| \leq \frac{\|g^{(k_i)}\|_{\infty} \nu^{k_i-1}}{(k_i-1)!}$

— Et $\nu \mapsto \|g^{(k_i)}\|_\infty \nu^{k_i-1}$ est intégrable sur $[0, 1]$

Alors, par convergence dominée :

$$\lim_{t \rightarrow t_i} Q(t) = \frac{1}{\prod_{j \neq i} (t_i - t_j)^{k_j}} \cdot \frac{g^{(k_i)}(t_i)}{k_i!}$$

On élève infiniment à l'aide de la formule de Leibniz, et à chaque fois on prolonge en faisant tendre $t \rightarrow t_i$. La régularité de ψ se justifie simplement : comme $g \in \mathcal{C}^\infty$ et que l'on travaille sur un intervalle borné, on peut majorer à chaque fois par la norme $\|g^{(k)}\|_\infty$, ce qui permet de conclure.

On déduit alors que la fonction $Q(f, P)$ se prolonge de façon unique en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

4a)

Soit $s_0 \in [a, b]$ et $n \geq 1$, on a :

$$Q(t) = \frac{g(t)}{(t - s_0)^n} \quad \text{d'après la définition} \quad (\text{avec } m = 1, k_1 = k = n, t_1 = s_0)$$

On a alors $g^{(k)}(s_0) = 0 \quad \forall 0 \leq k < n$

Alors, par développement de Taylor :

$$g(s) = g(s_0) + g'(s_0)(s - s_0) + \cdots + \frac{g^{(n-1)}(s_0)}{(n-1)!}(s - s_0)^{n-1} + \frac{g^{(n)}(s_0)}{n!}(s - s_0)^n + o((s - s_0)^n)$$

Comme tous les termes d'ordre $< n$ sont nuls, il vient :

$$g(s) = \frac{g^{(n)}(s_0)}{n!}(s - s_0)^n + o((s - s_0)^n)$$

Donc :

$$Q(s) = \frac{g(s)}{(s - s_0)^n} = \frac{g^{(n)}(s_0)}{n!} + o(1) \Rightarrow Q(s_0) = \frac{g^{(n)}(s_0)}{n!}$$

Or,

$$g^{(n)}(s_0) = f^{(n)}(s_0) - H^{(n)}(s_0) = f^{(n)}(s_0) \quad (\text{car } \deg(H) < n)$$

Donc :

$$Q(s_0) = \frac{f^{(n)}(s_0)}{n!}$$

4b)

On a par définition :

$$Q(f; P) = \frac{f - H(f; P)}{P} \Rightarrow f = H(f; P) + P \cdot Q(f; P) \quad (*)$$

On note :

$$\begin{aligned} \psi &:= H(f; P_1) + P_1 H(Q(f; P_1); P_2) < \deg(P_1 P_2) \\ \text{car } \deg(H(f; P_1)) &< \deg(P_1), \deg(H(Q(f; P_1); P_2)) < \deg(P_2) \end{aligned}$$

On applique la formule de Leibniz pour :

$$\psi^{(k)}(t_i) = H^{(k)}(f; P_1)(t_i) + \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} P_1^{(k-p)}(t_i) H^{(p)}(Q(f; P_1); P_2)(t_i)$$

Soit $t_1, \dots, t_m$ les racines de P_1 et $t'_1, \dots, t'_n$ celles de P_2 . On veut vérifier deux conditions :

$$\textcircled{1} \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}, \quad \forall 0 \leq k < k_i, \quad \psi^{(k)}(t_i) = f^{(k)}(t_i)$$

$$\textcircled{2} \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad \forall 0 \leq k < k'_j, \quad \psi^{(k)}(t'_j) = f^{(k)}(t'_j)$$

Pour la condition $\textcircled{1}$, on a $H^{(k)}(f; P_1)(t_i) = f^{(k)}(t_i)$, et la partie

$$\sum_{p=0}^k \binom{k}{p} P_1^{(k-p)}(t_i) H^{(p)}(Q(f; P_1); P_2)(t_i)$$

s'annule car $P_1(t_i) = 0$ et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre $k_i - 1$ aussi.

Donc $\textcircled{1}$ est satisfaite.

Pour la condition $\textcircled{2}$, on veut montrer que :

$$\forall 0 \leq k < k'_j, \quad \psi^{(k)}(t'_j) = f^{(k)}(t'_j)$$

On a :

$$\begin{aligned} \psi^{(k)}(t'_j) &= H^{(k)}(f; P_1)(t'_j) + \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} P_1^{(k-p)}(t'_j) H^{(p)}(Q(f; P_1); P_2)(t'_j) \\ &= H^{(k)}(f; P_1)(t'_j) + \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} P_1^{(k-p)}(t'_j) [Q(f; P_1)]^{(p)}(t'_j) \quad (\text{par définition de } H) \\ &= H^{(k)}(f; P_1)(t'_j) + [P_1 Q(f; P_1)]^{(k)}(t'_j) \quad (\text{Leibniz en inverse}) \\ &= [H^{(k)}(f; P_1) + P_1 Q(f; P_1)]^{(k)}(t'_j) \end{aligned}$$

Mais :

$$f = H(f; P_1) + P_1 Q(f; P_1) \quad (\text{équation } (*))$$

Donc :

$$\psi^{(k)}(t'_j) = f^{(k)}(t'_j) \quad \text{pour tout } 0 \leq k < k'_j$$

()

Puisque :

$\deg(\psi) < \deg(P_1 P_2)$ et $H(f; P_1 P_2)$ vérifie les mêmes conditions de question **2b** que ψ

alors par unicité :

$$\boxed{H(f; P_1 P_2) = H(f; P_1) + P_1 H(Q(f; P_1); P_2)}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned} Q(f; P_1 P_2) &= \frac{f - H(f; P_1 P_2)}{P_1 P_2} \\ &= \frac{f - [H(f; P_1) + P_1 H(Q(f; P_1); P_2)]}{P_1 P_2} \end{aligned}$$

On d'après (*) :

$$H(Q(f; P_1); P_2) = Q(f; P_1) - P_2 Q(Q(f; P_1); P_2)$$

alors :

$$\begin{aligned} Q(f; P_1 P_2) &= \frac{f - [H(f; P_1) + P_1 Q(f; P_1) - P_1 P_2 Q(Q(f; P_1); P_2)]}{P_1 P_2} \\ &= \frac{[f - H(f; P_1) - P_1 Q(f; P_1) + P_1 P_2 Q(Q(f; P_1); P_2)]}{P_1 P_2} \end{aligned}$$

$$\boxed{Q(f; P_1 P_2) = Q(Q(f; P_1); P_2)}$$

5a)

Le polynôme $\varphi = \prod_{i=1}^m (t - t_i)^{k_i}$ a comme racines t_i de multiplicité k_i .

Alors $\varphi^{(k)}(t_i) = 0 \quad \forall k \in \{0, \dots, k_i - 1\}, \forall i \in \{1, \dots, m\}$

Alors $Q_t^{(k)}(t_i) = f^{(k)}(t_i) - H^{(k)}(f; P)(t_i) = 0 \quad \forall i, \forall 0 \leq k < k_i$

On a aussi d'après la définition de $Q_t : Q_t(t) = 0$

Donc on a comme racines $t_1, \dots, t_m, t_{m+1} = t$ et comme indices :

$$\forall i \in \{1, \dots, m+1\}, \forall 0 \leq k < k_i, \quad Q_t^{(k)}(t_i) = 0$$

avec $k_1, \dots, k_m; k_{m+1} = 1$

et

$$\sum_{i=1}^{m+1} k_i = \sum_{i=1}^m k_i + 1 = \deg(P) + 1$$

(on réarrange les racines pour qu'elles soient ordonnées, mais elles sont toutes dans l'intervalle $[\min(t, t_1), \max(t, t_m)]$)

Donc on déduit que Q_t s'annule à l'ordre $\deg(P) + 1$ dans l'intervalle $[\min(t, t_1), \max(t, t_m)]$

5b)

D'après **1b** et **5a**, on a l'existence de $\xi \in [\min(t, t_1), \max(t, t_m)]$ tel que $Q_t^{(\deg P)}(\xi) = 0$

On a $\varphi^{(\deg P)} = (\deg P)!$

On a $\deg(H) < \deg(P)$, donc $H^{(\deg P)}(\xi) = 0$, et $Q_t^{(\deg P)}(\xi) = f^{(\deg P)}(\xi) - (\deg P)! \cdot Q(f; P)(t) = 0$.

On a alors :

$$\frac{f(t) - H(f; P)(t)}{P(t)} = \frac{f^{(\deg P)}(\xi)}{(\deg P)!}$$

Donc :

$$f(t) - H(f; P)(t) = \frac{f^{(\deg P)}(\xi)}{(\deg P)!} \cdot P(t)$$

6)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé dans $[a; b]$. On a, d'après **5b**, Q est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a; b]$.

On commence à montrer que Q est à valeurs positives.

On a $Q(t_i) = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq m$

Pour $t \in [a; b] \setminus \{t_1, \dots, t_m\}$, d'après **5b**, il existe $\xi \in [\min(t, t_1), \max(t, t_m)] \subset [a; b]$ tel que :

$$Q(f; P)(t) = \frac{f^{(\deg P)}(\xi)}{(\deg P)!} \geq 0 \quad (\text{car } f \text{ est à valeurs positives sur } [a; b] \text{ et } \xi \in [a; b])$$

On pose maintenant pour $k \geq 1$:

$$Q_{t,k}(s) = f^{(k)}(s) - H^{(k)}(f; P)(s) - \frac{\partial^k}{\partial t^k} \left[Q(t) \prod_{i=1}^m (s - t_i)^{k_i} \right]$$

On a :

$$Q_{t,k}(t) = f^{(k)}(t) - H^{(k)}(f; P)(t) - \frac{\partial^k}{\partial t^k} \left[Q(t) \prod_{i=1}^m (t - t_i)^{k_i} \right] = 0$$

et on sait que :

$$Q_{t,k}(s) = f^{(k)}(s) - H^{(k)}(f; P)(s) - \prod_{i=1}^m (s - t_i)^{k_i} \cdot \frac{\partial^k}{\partial t^k} Q(t)$$

En appliquant les dérivées de $Q_{t,k}$ en les t_i et on refait ce qu'on a fait précédemment, on aura que $Q^{(k)}(f; P)$ est à valeurs positives sur $[a; b]$ pour tout $k \geq 1$

Alors

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}[X] \text{ scindé dans }]a; b[, \quad Q(f; P) \text{ est absolument monotone sur } [a; b]}$$

Deuxième Partie

7a)

Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On sait que P est bien défini par ses images en n points distincts $r_1, \dots, r_n$, tel que

$$P(x) = \sum_{i=1}^n P(r_i) L_i(x)$$

avec L_i le polynôme de Lagrange sous la forme :

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

On a alors :

$$\int_{-1}^1 P(x) f(x) dx = \sum_{i=1}^n P(r_i) \int_{-1}^1 L_i(x) f(x) dx$$

(on pose $\lambda_i = \int_{-1}^1 L_i(x) f(x) dx$, les λ_i sont indépendants de P) :

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i P(r_i)$$

Donc :

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \quad \text{tels que} \quad \forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \int_{-1}^1 P(x) f(x) dx = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(r_i)$$

7b)

Soit $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$. On fait la division euclidienne de P par D . Il existe alors $S \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tels que :

$$P = DS + R \quad \text{et on remarque que} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad P(r_i) = R(r_i)$$

Et on a aussi :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P(x) f(x) dx &= \int_{-1}^1 D(x) S(x) f(x) dx + \int_{-1}^1 R(x) f(x) dx \\ &= \langle D, S \rangle + \sum_{i=1}^n \lambda_i R(r_i) \quad (\text{car } R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]) \\ &= \langle D, S \rangle + \sum_{i=1}^n \lambda_i P(r_i) \quad (\text{car } P(r_i) = R(r_i)) \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_{-1}^1 P(x) f(x) dx = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(r_i) \quad \forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]} \quad (\text{car } S \in \mathbb{R}_{n-1}[X])$$

7c)

On note $\varphi_i(X) = \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} (X - r_j)^2 \in \mathbb{R}_{2n-2}[X]$

On applique **(1)** sur φ_i , et on a pour $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$\int_{-1}^1 \varphi_i(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_i(r_k) = \lambda_i \varphi_i(r_i) = \lambda_i \underbrace{\prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} (r_i - r_j)^2}_{>0}$$

Or $t \mapsto \varphi_i(t)f(t)$ est une fonction continue positive sur $[-1, 1]$, et $\varphi_i(r_i) > 0$, donc :

$$\int_{-1}^1 \varphi_i(x) f(x) dx > 0$$

On déduit alors que $\lambda_i > 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n$.

7d)

Soit $j \in \{0, \dots, n-1\}$. Soit $P, Q \in \mathbb{R}_{n-j-1}[X]$.

Ce produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_j$ est bilinéaire grâce à la bilinéarité de $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

On a :

$$\begin{aligned} \langle P, Q \rangle_j &= \langle P, Q f_j \rangle \\ &= \int_{-1}^1 P(x) Q(x) f_j(x) f(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 Q(x) (P(x) f_j(x)) f(x) dx \\ &= \langle Q, P f_j \rangle \end{aligned}$$

Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle_j$ est symétrique.

On a :

$$\langle P, P \rangle_j = \langle P, P f_j \rangle = \int_{-1}^1 P^2(x) f_j(x) f(x) dx$$

On a $P^2 f_j$ est de degré $2(n-j-1) + j = 2n-j-2$, donc $P^2 f_j \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$

Donc d'après **7b** :

$$\langle P, P \rangle_j = \sum_{i=1}^n \lambda_i P^2(r_i) f_j(r_i) = \sum_{i=j+1}^n \lambda_i P^2(r_i) f_j(r_i) \quad (\text{d'après 7c et } f_j(r_i) = 0 \text{ si } i \leq j)$$

Or $r_1 > \dots > r_n$, donc :

$$f_j(r_i) = \prod_{k=1}^j (r_k - r_i) > 0 \quad \forall j+1 \leq i \leq n$$

Alors $\langle P, P \rangle_j \geq 0$

Et si $\langle P, P \rangle_j = 0$, alors :

$$\sum_{i=j+1}^n \lambda_i P^2(r_i) f_j(r_i) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P^2(r_i) = 0 \quad \forall i \in \{j+1, \dots, n\} \quad \Leftrightarrow \quad P(r_i) = 0 \quad \forall i \in \{j+1, \dots, n\}$$

Et $P \in \mathbb{R}_{n-j-1}[X]$ qui admet $n-j$ racines distinctes

$$\Rightarrow P = 0$$

On en déduit alors que $\forall j \in \{0, \dots, n-1\}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_j$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_{n-j-1}[X]$.

8a)

On utilise le procédé de Gram-Schmidt sur la base canonique $(1, X, X^2, \dots, X^{n-j-1})$ de $\mathbb{R}_{n-j-1}[X]$

On prend alors :

$$q_0 = 1 = p_0$$

$$q_1 = X - \frac{\langle X, 1 \rangle_j}{\langle 1, 1 \rangle_j}$$

$$q_2 = X^2 - \frac{\langle X^2, q_0 \rangle_j}{\langle q_0, q_0 \rangle_j} q_0 - \frac{\langle X^2, q_1 \rangle_j}{\langle q_1, q_1 \rangle_j} q_1$$

$$q_{n-j-1} = X^{n-j-1} - \sum_{i=0}^{n-j-2} \frac{\langle X^{n-j-1}, q_i \rangle_j}{\langle q_i, q_i \rangle_j} q_i$$

On voit alors que $\deg(q_i) = i \quad \forall 0 \leq i \leq n-j-1$

et aussi $\forall 0 \leq i < i' \leq n-j-1, \quad \langle q_i, q_{i'} \rangle_j = 0$

Unicité : On prend $(q_0, \dots, q_{n-j-1})$ et $(q'_0, \dots, q'_{n-j-1})$ deux BON qui vérifient ces conditions.

On commence par $i = 0$, et on montre par récurrence forte l'unicité.

On a clairement $q_0 = q'_0 = 1$ ($q_0 = d'_0 q'_0$, le seul de degré 0, et comme les deux sont unitaires)

Supposons que $q_i = q'_i \quad \forall 0 \leq i \leq k$, Montrons que $q_{k+1} = q'_{k+1}$

On écrit q'_{k+1} dans la base $(q_0, \dots, q_{n-j-1})$ et à cause du degré des vecteurs, et ils sont tous unitaires, alors :

$$q'_{k+1} = q_{k+1} + \sum_{i=0}^k \alpha_i q_i \quad \text{avec } \alpha_i \in \mathbb{R}$$

Alors pour $p \in \{0, \dots, k\}$, on a :

$$\begin{aligned} \langle q'_{k+1}, q_p \rangle_j &= \left\langle q_{k+1} + \sum_{i=0}^k \alpha_i q_i, q_p \right\rangle_j \\ &= \langle q_{k+1}, q_p \rangle_j + \alpha_p \|q_p\|_j^2 \\ &= \alpha_p \|q_p\|_j^2 \end{aligned}$$

Donc $\alpha_p \|q_p\|_j^2 = \langle q'_{k+1}, q_p \rangle_j = \langle q'_{k+1}, q'_p \rangle_j = 0$ (d'après l'hypothèse de récurrence)

On aura donc que $\alpha_p = 0 \quad \forall 0 \leq p \leq k$, donc $q'_{k+1} = q_{k+1}$

Et on déduit alors que $q_0 = q'_0, \dots, q_{n-j-1} = q'_{n-j-1}$, d'où unicité.

8b)

On a :

$$\langle q_i, q_{n-j} \rangle_j = \sum_{r=j+1}^n \lambda_i q_i(r_i) q_{n-j}(r_i) f_j(r_i) = 0 \quad \text{pour } 0 \leq i \leq n-j-1$$

et q_{n-j} est de degré $n-j$

On a alors $(q_0, \dots, q_{n-j})$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_{n-j}[X]$ (libre et de même dimension)

Alors si on prend P un polynôme unitaire de degré $n-j$ (dans $\mathbb{R}_{n-j}[X]$) vérifiant :

$$\langle q_i, P \rangle_j = 0 \quad \forall 0 \leq i \leq n-j-1$$

on a :

$$P = q_{n-j} + \sum_{i=0}^{n-j-1} \langle q_i, P \rangle_j q_i = q_{n-j}$$

d'où l'unicité.

9a)

On a pour $1 \leq i \leq n-j-1$, $Xq_i \in \mathbb{R}_{n-j}[X]$ et $\deg(Xq_i) = i+1$, alors $Xq_i \in \text{Vect}(q_{i+1}, \dots, q_0)$ (par contrainte sur les degrés des vecteurs).

On a alors pour $\forall 3 \leq i \leq n-j; \forall 0 \leq k \leq i-3$:

$$\langle Xq_{i-1}, q_k \rangle_j = \int_{-1}^1 xq_{i-1}(x)q_k(x)f(x)dx = \int_{-1}^1 q_{i-1}(x)(xq_k(x))f(x)dx = \langle q_{i-1}, Xq_k \rangle_j = 0$$

(car $Xq_k \in \text{Vect}(q_{k+1}, \dots, q_0) \subset E = \text{Vect}(q_{i-2}, \dots, q_0)$ et $q_{i-1} \in E^\perp$)

On a aussi $\deg(q_i - Xq_{i-1}) = i-1$, donc $q_i - Xq_{i-1} \in \text{Vect}(q_{i-1}, \dots, q_0)$ (1)

et d'après ce qu'on a montré avant :

$$q_i, Xq_{i-1} \in \text{Vect}(q_k)_{0 \leq k \leq i-3}^\perp \quad (2)$$

D'après (1) et (2), on a $q_i - Xq_{i-1} \in \text{Vect}(q_{i-1}, q_{i-2})$, alors $\exists a_i, b_i \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\boxed{q_i - Xq_{i-1} = a_i q_{i-1} + b_i q_{i-2}}$$

9b)

On a :

$$q_i - Xq_{i-1} = a_i q_{i-1} + b_i q_{i-2}$$

On déduit alors que :

$$\underbrace{\langle q_i, q_{i-2} \rangle_j}_{=0} - \langle Xq_{i-1}, q_{i-2} \rangle_j = a_i \underbrace{\langle q_{i-1}, q_{i-2} \rangle_j}_{=0} + b_i \langle q_{i-2}, q_{i-2} \rangle_j$$

Donc :

$$b_i \langle q_{i-2}, q_{i-2} \rangle_j = -\langle Xq_{i-1}, q_{i-2} \rangle_j$$

9c)

On a :

$$\langle Xq_{i-1}, q_{i-2} \rangle_j = \langle q_{i-1}, Xq_{i-2} \rangle_j$$

On sait que $Xq_{i-2} \in \mathbb{R}_{i-1}[X] = \text{Vect}(q_{i-1}, \dots, q_0)$, et par raison de degré des vecteurs, et que $q_{i-1}, \dots, q_0$ sont unitaires, on aura :

$$Xq_{i-2} = q_{i-1} + \sum_{k=0}^{i-2} \alpha_k q_k$$

Alors :

$$\langle Xq_{i-2}, q_{i-1} \rangle_j = 1$$

Donc :

$$b_i = -\frac{1}{\|q_{i-2}\|_j^2} < 0$$

10a)

$q_0 = 1$ est un polynôme constant qui a exactement 0 racines dans $\mathbb{R}$
et

$$q_1 = X - \frac{\langle X, 1 \rangle_j}{\langle 1, 1 \rangle_j} = X - d$$

on a d est une racine de q_1 , et donc q_1 a exactement une racine dans $\mathbb{R}$

10b)

Soit $1 \leq i \leq n - j$. Soit $x_1, \dots, x_m$ les racines réelles de q_i , avec $m \leq i$, et on prend $S = \prod_{k=1}^m (X - x_k) \in \mathbb{R}[X]$.

On a :

$$\langle S, q_i \rangle = \int_{-1}^1 \left(\prod_{k=1}^m (x - x_k)^2 \right) f(x) dx$$

Comme $x \mapsto \left(\prod_{k=1}^m (x - x_k)^2 \right) f(x)$ est une fonction continue, et non nulle et positive sur $[-1, 1]$, alors $\langle S, q_i \rangle > 0$.

Or si $m < i$, alors $S \in \mathbb{R}_{i-1}[X]$ et $q_i \in (\mathbb{R}_{i-1}[X])^\perp$ (car $\mathbb{R}_{i-1}[X] = \text{Vect}(q_{i-1}, \dots, q_0)$), donc $\langle S, q_i \rangle = 0$, ce qui est absurde. Donc $m = i$, et ainsi q_i admet exactement i racines réelles.

(Les racines sont réelles et dans I , car sinon on aurait des racines hors I , et on construirait un polynôme avec les racines restantes dans I , strictement de degré $< i$, noté P , et on a :

$$\langle P, q_i \rangle > 0 \quad \text{alors que} \quad \langle P, q_i \rangle = 0 \quad \text{car} \quad \deg P < i$$

Donc contradiction.)

Comme les $\deg(q_i) = i$, les racines sont simples.

On montre ce résultat par récurrence sur i . Pour $x_1 < x_2$ deux racines consécutives de q_i , il existe une racine de q_{i-1} dans $]x_1, x_2[$.

Pour l'initialisation, rien à montrer. On suppose que c'est vrai pour $i - 1$, et on montre pour i .

Soit $x_1 < \dots < x_i$ les racines de q_i , et $x'_1 < \dots < x'_{i-1}$ les racines de q_{i-1} .

On a :

$$q_i = Xq_{i-1} - a_i q_{i-1} - b_i q_{i-2} \Rightarrow q_i(x'_j) = b_i q_{i-2}(x'_j) \quad \text{pour } 1 \leq j \leq i - 1$$

On sait que q_{i-2} a exactement $i - 2$ racines simples, qu'on note $(x''_k)_{1 \leq k \leq i-2}$, qui se situent par hypothèse de récurrence :

$$x''_k \in]x'_k, x'_{k+1}[\quad \forall 1 \leq k \leq i - 2$$

On a :

$$q_{i-2}(x'_j) = \prod_{k=1}^{i-2} (x'_j - x''_k) = \prod_{k=1}^{j-1} \underbrace{(x'_j - x''_k)}_{>0} \cdot \prod_{k=j}^{i-2} \underbrace{(x'_j - x''_k)}_{<0}$$

donc :

$$(-1)^{i+j+1} q_{i-2}(x'_j) > 0 \quad \forall 1 \leq j \leq i - 1$$

Or $b_i < 0$ d'après **9c**, donc :

$$(-1)^{i+j} q_i(x'_j) > 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, i - 1\}$$

On a $\forall x \geq x_i$, $q_i(x) \geq 0$, or $q_i(x'_{i-1}) < 0$, alors $x'_{i-1} < x_i$.

Alors d'après ce qui précède, et le fait que $x_1, \dots, x_{i-1}$ sont les seules racines de q_{i-1} , où il est seulement autorisé de changer le signe.

On en déduit que :

$$x'_k \in]x_k, x_{k+1}[\quad \forall 1 \leq k \leq i-2$$

D'où le résultat.

L'unicité est garantie par le fait que $\deg(q_i) = i$, car s'il existait deux racines dans le même intervalle, les racines de q_{i-1} seraient $\geq i$, ce qui est absurde.

10c)

D'après **10b**, en suivant l'entrelacement des racines des $(q_i)_{1 \leq i \leq n-j}$, on déduit que toutes les racines des $(q_i)_{1 \leq i \leq n-j-1}$ sont inférieures strictement à r_{j+1} (qui est la plus grande racine de q_{n-j}).

Alors $\forall 1 \leq i \leq n-j-1$, on a $q_i(r_{j+1}) > 0$ et $q_0 = 1 > 0$

On déduit que :

$$\forall 0 \leq i \leq n-j-1, \quad q_i(r_{j+1}) > 0$$

11a)

On a $P_\ell = q_\ell - q_\ell(r_{j+1})$, c'est un polynôme de degré ℓ , et r_{j+1} est une racine de P_ℓ , alors

$$\tilde{P}_\ell = \frac{P_\ell}{X - r_{j+1}}$$

est un polynôme de degré $\ell - 1 \leq i - 1$.

Alors on déduit que :

$$\langle q_i + 1, \tilde{P}_\ell \rangle = \langle q_i, \tilde{P}_\ell \rangle = 0$$

Donc on a :

$$\langle q_{i+1} + \alpha_i q_i, \tilde{P}_\ell \rangle = 0 \quad \forall 0 \leq \ell \leq i$$

D'où le résultat

11b)

On a, pour tout $0 \leq \ell \leq i$,

$$\begin{aligned} \left\langle q_{i+1} + \alpha_i q_i, \frac{q_\ell - q_\ell(r_{j+1})}{X - r_{j+1}} \right\rangle_j &= \int_{-1}^1 \frac{q_{i+1} + \alpha_i q_i}{x - r_{j+1}} (q_\ell - q_\ell(r_{j+1})) f(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 p_i(x) (q_\ell(x) - q_\ell(r_{j+1})) f(x) dx \\ &= \langle p_i, q_\ell - q_\ell(r_{j+1}) \rangle_j \\ &= \langle p_i, q_\ell \rangle_j - q_\ell(r_{j+1}) \langle p_i, 1 \rangle_j \\ &= c_\ell - \gamma_\ell c_0 = 0 \quad (\text{d'après } \mathbf{11a}) \text{ où } \gamma_\ell = q_\ell(r_{j+1}) \end{aligned}$$

(d'après **10c**, $\gamma_\ell > 0$) On déduit alors que pour tout $0 \leq \ell \leq i$, il existe c_ℓ tel que :

$$c_\ell = \gamma_\ell c_0$$

Par définition, p_i est unitaire de degré i , alors par contrainte du degré des vecteurs (q_i) , on a :

$$c_i = \langle p_i, q_i \rangle_j = 1 > 0 \Rightarrow c_0 = \frac{c_i}{\gamma_i} = \frac{1}{\gamma_i} > 0$$

Donc pour tout $0 \leq \ell \leq i$,

$$c_\ell = \frac{\gamma_\ell}{\gamma_i} > 0$$

12)

Soit $0 \leq j \leq n-2$. Soit $0 \leq i \leq n-j-1$. Prenons $k \in \llbracket 0, i-1 \rrbracket$

On a :

$$\begin{aligned} \langle p_i, q_k \rangle_{j+1} &= \int_{-1}^1 p_i(x) q_k(x) f_{j+1}(x) f(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 (r_{j+1} - x) p_i(x) q_k(x) f_j(x) f(x) dx = \langle (r_{j+1} - X) p_i, q_k \rangle_j \\ &= -\langle q_{i+1} + \alpha_i q_i, q_k \rangle_j = -\underbrace{\langle q_{i+1}, q_k \rangle_j}_{=0} - \alpha_i \underbrace{\langle q_i, q_k \rangle_j}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

Donc $\langle p_i, q_k \rangle_{j+1} = 0 \quad \forall 0 \leq k \leq i-1$

Alors :

$$p_i \perp \text{Vect}(q_k)_{0 \leq k \leq i-1} = \mathbb{R}_{i-1}[X] \quad \text{pour le produit scalaire } \langle \cdot, \cdot \rangle_{j+1}$$

13)

Soit $0 \leq k \leq n-1$

Montrons par récurrence descendante (forte) sur $0 \leq j \leq k$ que

$$\mathcal{A}_{k,j} := \forall 0 \leq p \leq n-k \quad q_{k;p} \text{ a coeff } > 0 \quad \text{dans } (\mathbb{R}_{n-j}[X], \langle \cdot, \cdot \rangle_j)$$

Pour $j = k$, les $(q_{k;p})_{0 \leq p \leq n-k}$ sont les vecteurs de la base $(\mathbb{R}_{n-k}[X], \langle \cdot, \cdot \rangle_k)$

Soit $0 \leq j \leq k-2$

Supposons que $\forall 0 \leq p \leq n-k \quad q_{k;p}$ a coeff > 0 dans $(\mathbb{R}_{n-j}[X], \langle \cdot, \cdot \rangle_{j+1})$

Montrons que $\forall 0 \leq p \leq n-k \quad q_{k;p}$ a coeff > 0 dans $(\mathbb{R}_{n-j}[X], \langle \cdot, \cdot \rangle_j)$

D'après **12** : $(q_{j+1;0}, \dots, q_{j+1;n-j-2}, p_{j;n-j-1})$ base de $(\mathbb{R}_{n-j}[X], \langle \cdot, \cdot \rangle_{j+1})$

Soit $0 \leq p \leq n-k$, on note ① :

$$q_{k;p} = \alpha p_{j;n-j-1} + \sum_{i=0}^{n-j-2} d_i q_{j+1;i} \quad \text{avec } \alpha \geq 0, d_i \geq 0 \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence}$$

(les coeffs sont > 0 lorsqu'on entre dans le domaine de degré et les autres s'annulent. On écrit alors tous ≥ 0 pour simplifier l'écriture)

On a d'après **11b**, ② :

$$p_{j;n-j-1} \text{ a des coeff } > 0 \text{ dans } (\mathbb{R}_{n-j}[X], \langle \cdot, \cdot \rangle_j) \subset (\mathbb{R}_{n-j}[X], \langle \cdot, \cdot \rangle_j)$$

Mais si on suppose qu'on travaille aussi dans le cadre (plus grand) de récurrence forte sur k (Pour l'initialisation $k = 0$ donc $j = 0$ on aura les $(q_{0;p})_{0 \leq p \leq n}$ sont les vecteurs de la base $(\mathbb{R}_n[X], \langle \cdot, \cdot \rangle)$),

Donc on suppose que

$$\forall 0 \leq \ell \leq k-1, \quad \forall 0 \leq i \leq \ell, \quad A_{\ell,i} \text{ est vrai}$$

et comme $0 \leq j \leq k-2$, alors $1 \leq j+1 \leq k-1$, on a donc :

$$\forall 0 \leq i \leq j+1, \quad A_{j+1,i} \text{ est vrai}$$

Donc $A_{j+1,j}$ est vrai, c'est-à-dire ③ :

$$\forall 0 \leq p < n-k \leq n-j-2, \quad q_{j+1;p} \text{ a des coeff } > 0 \text{ dans } (\mathbb{R}_{n-j}[X], \langle \cdot, \cdot \rangle_j)$$

D'après ① , ② et ③, on déduit que :

$$\forall 0 \leq p \leq n-k, \quad q_{k;p} \text{ est à coeff } > 0 \text{ dans } (\mathbb{R}_{n-j}[X], \langle \cdot, \cdot \rangle_j)$$

D'où le résultat

On a alors $\forall 0 \leq k \leq n-1$ (pour $j=0$), $A_{k;0}$ vraie et on prend $p=n-k$

On aura alors que

$$\boxed{\forall 0 \leq k \leq n-1, \quad q_{k;n-k} = \prod_{i=k+1}^n (X - r_i) \text{ est à coefficients } > 0 \text{ dans } (\mathbb{R}_n[X], \langle \cdot, \cdot \rangle)}$$

Troisième Partie

14)

On a $(x, r) \mapsto \varphi(x, r) = 1 - 2rx + r^2$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 1[$.

Et on a

$$1 - 2rx + r^2 = (1 - rx)^2 + r^2(1 - x^2) > 0 \quad \forall |r| < 1, \quad |x| < 1$$

Alors $(x, r) \mapsto F_\lambda(x, r) = \varphi(x, r)^{-\lambda}$ avec $\lambda > 0$ est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 1[$.

15)

On a, d'après ce qui précède,

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad 1 - 2rx + r^2 > 0 \quad \forall |r| < 1$$

Alors $\forall x \in] -1, 1[$, on déduit par inversion que la fonction $r \mapsto F_\lambda(x, r)$ est développable en série entière au voisinage de 0.

16a)

Soit $x \in] -1, 1[$

On a

$$(1 - 2xr + r^2) \frac{\partial F_\lambda}{\partial r}(x, r) = 2\lambda(x - r)F_\lambda(x, r)$$

alors

$$(1 - 2xr + r^2) \sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1}^{(\lambda)}(x) r^n = 2\lambda(x - r) \sum_{n \geq 0} a_n^{(\lambda)}(x) r^n$$

Pour $r=0$, on a

$$a_1^{(\lambda)}(x) = 2\lambda x a_0^{(\lambda)}(x)$$

On a :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} (n+1)a_{n+1}^{(\lambda)}(x)r^n - 2x \sum_{n \geq 1} na_n^{(\lambda)}(x)r^n + \sum_{n \geq 2} (n-1)a_{n-1}^{(\lambda)}(x)r^n \\ = 2\lambda x \sum_{n \geq 0} a_n^{(\lambda)}(x)r^n - 2\lambda \sum_{n \geq 1} a_{n-1}^{(\lambda)}(x)r^n \end{aligned}$$

Pour $n = 0$:

$$a_1^{(\lambda)}(x) = 2\lambda x a_0^{(\lambda)}(x)$$

Pour $n = 1$:

$$2a_2^{(\lambda)}(x) - 2x a_1^{(\lambda)}(x) = 2\lambda x a_1^{(\lambda)}(x) - 2\lambda a_0^{(\lambda)}(x) \Leftrightarrow 2a_2^{(\lambda)}(x) = 2\lambda x a_1^{(\lambda)}(x) - 2\lambda a_0^{(\lambda)}(x)$$

Pour $n \geq 2$:

$$(n+1)a_{n+1}^{(\lambda)}(x) - 2x n a_n^{(\lambda)}(x) + (n-1)a_{n-1}^{(\lambda)}(x) = 2\lambda x a_n^{(\lambda)}(x) - 2\lambda a_{n-1}^{(\lambda)}(x)$$

$$\Leftrightarrow (n+1)a_{n+1}^{(\lambda)}(x) = 2(n+\lambda)x a_n^{(\lambda)}(x) - (n+2\lambda-1)a_{n-1}^{(\lambda)}(x)$$

Donc on déduit que pour tout $n \geq 1$:

$$(n+1)a_{n+1}^{(\lambda)}(x) = 2(n+\lambda)x a_n^{(\lambda)}(x) - (n+2\lambda-1)a_{n-1}^{(\lambda)}(x)$$

16b)

Pour $n = 0$, on a :

$$a_0^{(\lambda)}(x) = F_\lambda(x; 0) = 1$$

Pour $n = 1$, on a :

$$a_1^{(\lambda)}(x) = 2\lambda x$$

Montrons par récurrence double que $a_n^{(\lambda)}$ est un polynôme de degré n , de même parité que n , et que son coefficient dominant est

$$\text{dom}(a_n^{(\lambda)}) = 2^n \prod_{k=0}^{n-1} (\lambda + k)$$

On a vérifié l'initialisation. Supposons maintenant que $a_n^{(\lambda)}$ et $a_{n-1}^{(\lambda)}$ vérifient ces conditions. Montrons-les pour $a_{n+1}^{(\lambda)}$.

$$\begin{aligned} (n+1)a_{n+1}^{(\lambda)}(-x) &= 2(n+\lambda)(-x)a_n^{(\lambda)}(-x) - (n+2\lambda-1)a_{n-1}^{(\lambda)}(-x) \\ &= -2(n+\lambda)(-1)^n a_n^{(\lambda)}(x) - (n+2\lambda-1)(-1)^{n-1} a_{n-1}^{(\lambda)}(x) \\ &= (-1)^{n+1} \left[2(n+\lambda)x a_n^{(\lambda)}(x) - (n+2\lambda-1)a_{n-1}^{(\lambda)}(x) \right] \\ &= (-1)^{n+1} (n+1)a_{n+1}^{(\lambda)}(x) \end{aligned}$$

Donc $a_{n+1}^{(\lambda)}$ est de même parité que $n+1$. De plus, $X a_n^{(\lambda)}$ est de degré $n+1$, et $a_{n-1}^{(\lambda)}$ de degré $n-1$, donc $a_{n+1}^{(\lambda)}$ est de degré $n+1$, et

$$\text{dom}(a_{n+1}^{(\lambda)}) = 2(n+\lambda) \cdot \text{dom}(a_n^{(\lambda)}) = 2^{n+1} \prod_{k=0}^n (\lambda + k)$$

D'où le résultat.

17a)

Soit $k \geq 0$, soit $x \in]-1, 1[$

$$\frac{\partial^k F_\lambda}{\partial r^k}(x, r) = \frac{\partial^k}{\partial r^k} \sum_{n \geq k} a_n^{(\lambda)}(x) r^n = \sum_{n \geq k} \frac{n!}{(n-k)!} a_n^{(\lambda)}(x) r^{n-k} = \sum_{n \geq 0} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k}^{(\lambda)}(x) r^n$$

On a alors :

$$\frac{\partial^k F_\lambda}{\partial r^k}(x, 0) = k! a_k^{(\lambda)}(x) \quad (\text{car seul le terme } n = 0 \text{ survit})$$

Donc $\forall k \geq 0, \forall x \in]-1, 1[$,

$$a_k^{(\lambda)}(x) = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k F_\lambda}{\partial r^k}(x, 0)$$

17b)

On a

$$\begin{aligned} \left(a_n^{(\lambda)}(x) \right)' &= \frac{1}{n!} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^n}{\partial r^n} F_\lambda(x, 0) \quad \text{pour } x \in]-1, 1[\\ &= \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial r^n} \frac{\partial}{\partial x} F_\lambda(x, 0) \end{aligned}$$

On remarque que

$$\frac{\partial}{\partial x} F_\lambda = 2\lambda r F_{\lambda+1}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n}{\partial r^n} \frac{\partial}{\partial x} F_\lambda &= 2\lambda (r F_{\lambda+1})^{(n)} \\ &= 2\lambda \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r^{(k)} F_{\lambda+1}^{(n-k)} \quad (\text{Formule de Leibniz dérivée par rapport à } r) \\ &= 2\lambda \left(\binom{n}{0} r F_{\lambda+1}^{(n)} + \binom{n}{1} F_{\lambda+1}^{(n-1)} \right) \\ &= 2\lambda \left(r F_{\lambda+1}^{(n)} + n F_{\lambda+1}^{(n-1)} \right) \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\partial^n}{\partial r^n} \frac{\partial}{\partial x} F_\lambda(x, 0) = 2\lambda n F_{\lambda+1}^{(n-1)}(x, 0)$$

En divisant par $n!$, on a :

$$\frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial r^n} \frac{\partial}{\partial x} F_\lambda(x, 0) = 2\lambda \frac{1}{(n-1)!} F_{\lambda+1}^{(n-1)}(x, 0)$$

Et on déduit alors que d'après **17a** :

$$\forall n \geq 1, \quad \left(a_n^{(\lambda)} \right)' = 2\lambda a_{n-1}^{(\lambda+1)}$$

17c)

Par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-t^2)^{\lambda+\frac{1}{2}} dt &= \left[t(1-t^2)^{\lambda+\frac{1}{2}} \right]_0^1 + 2(\lambda + \frac{1}{2}) \int_0^1 t^2(1-t^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} dt \\ &= (2\lambda + 1) \int_0^1 t^2(1-t^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} dt\end{aligned}$$

On a alors :

$$\int_0^1 \left[(2\lambda + 1)t^2 - (1-t^2) \right] (1-t^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} dt = \int_0^1 (2(\lambda + 1)t^2 - 1) (1-t^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} dt = 0$$

$$\text{alors } \int_0^1 \frac{a_2^{(\lambda)}(t)}{\lambda} (1-t^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} dt = 0 \Rightarrow \left\langle \frac{a_2^{(\lambda)}}{\lambda}, 1 \right\rangle = 0 \quad \text{D'où } \langle a_2^{(\lambda)}, 1 \rangle = 0$$

17d)

On remarque que

$$\langle a_1^{(\lambda)}, 1 \rangle = 2\lambda \int_0^1 t(1-t^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} dt = -\lambda \left[\frac{(1-t^2)^{\lambda+\frac{1}{2}}}{\lambda + \frac{1}{2}} \right]_0^1 = 0$$

et on a déjà

$$\langle a_2^{(\lambda)}, 1 \rangle = 0$$

Donc on a l'initialisation pour montrer par récurrence double que

$$\langle a_n^{(\lambda)}, 1 \rangle = 0, \quad \forall \lambda > \frac{1}{2}$$

On note

$$\langle P, Q \rangle_\lambda = \int_{-1}^1 P(x)Q(x)(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} dx \quad \text{pour } \lambda > \frac{1}{2}$$

Tout ce qu'on a démontré avant est valable pour $\lambda > \frac{1}{2}$.

On veut montrer que $\langle a_n^{(\lambda)}, 1 \rangle_\lambda = 0$ pour tout $n \geq 1, \lambda > \frac{1}{2}$

On suppose que

$$\langle a_{n-1}^{(\lambda)}, 1 \rangle_\lambda = \langle a_n^{(\lambda)}, 1 \rangle_\lambda = 0, \quad \forall \lambda > \frac{1}{2}$$

Montrons que

$$\langle a_{n+1}^{(\lambda)}, 1 \rangle_\lambda = 0, \quad \forall \lambda > \frac{1}{2}$$

On a d'après 16a pour $\lambda > \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}\langle a_{n+1}^{(\lambda)}, 1 \rangle_\lambda &= \frac{2(n+\lambda)}{n+1} \int_{-1}^1 t a_n^{(\lambda)}(t) (1-t^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} dt - \frac{(n+2\lambda-1)}{n+1} \underbrace{\langle a_{n-1}^{(\lambda)}, 1 \rangle_\lambda}_{=0} \\ &\stackrel{\text{IPP}}{=} \frac{n+\lambda}{n+1} \int_{-1}^1 a_n^{(\lambda)'}(t) \frac{(1-t^2)^{\lambda+\frac{1}{2}}}{\lambda+\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{n+\lambda}{n+1} \cdot \frac{2\lambda}{\lambda+\frac{1}{2}} \int_{-1}^1 a_{n-1}^{(\lambda+1)}(t) (1-t^2)^{\lambda+\frac{1}{2}} dt \quad (\text{d'après 17b}) \\ &= \frac{n+\lambda}{n+1} \cdot \frac{2\lambda}{\lambda+\frac{1}{2}} \langle a_{n-1}^{(\lambda+1)}, 1 \rangle_{\lambda+1} \\ &= 0\end{aligned}$$

Donc :

$$\langle a_n^{(\lambda)}, 1 \rangle_\lambda = 0 \quad \forall n \geq 1, \quad \forall \lambda > \frac{1}{2}$$

On a par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \langle X a_n^{(\lambda)}, 1 \rangle_\lambda &= \int_{-1}^1 t a_n^{(\lambda)}(t) (1-t^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (a_n^{(\lambda)})'(t) \frac{(1-t^2)^{\lambda+\frac{1}{2}}}{\lambda + \frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{2\lambda}{2(\lambda + \frac{1}{2})} \int_{-1}^1 a_{n-1}^{(\lambda+1)}(t) (1-t^2)^{\lambda+\frac{1}{2}} dt \quad (\text{d'après 17b}) \\ &= \frac{2\lambda}{2\lambda + 1} \langle a_{n-1}^{(\lambda+1)}, 1 \rangle_{\lambda+1} \end{aligned}$$

Or $\forall n \geq 2$, on a $n-1 \geq 1$, donc d'après ce qui précède $\langle a_{n-1}^{(\lambda+1)}, 1 \rangle_{\lambda+1} = 0$

$$\Rightarrow \langle X a_n^{(\lambda)}, 1 \rangle_\lambda = 0 \quad \forall n \geq 2$$

17e)

On généralise le résultat de la question 17d.

On va montrer par récurrence sur $k \geq 0$ que

$$\forall n \geq k+1, \quad \langle X^k a_n^{(\lambda)}, 1 \rangle_\lambda = 0$$

On a d'après 17d pour $k=0$, c'est vrai.

Supposons que

$$\forall n \geq k+1, \quad \langle X^k a_n^{(\lambda)}, 1 \rangle_\lambda = 0$$

et montrons que

$$\forall n \geq k+2, \quad \langle X^{k+1} a_n^{(\lambda)}, 1 \rangle_\lambda = 0$$

On a d'après 16a, et en multipliant par X^k et en faisant le produit scalaire avec 1 :

$$(n+1) \langle X^k a_{n+1}^{(\lambda)}, 1 \rangle_\lambda = 2(n+\lambda) \langle X^{k+1} a_n^{(\lambda)}, 1 \rangle_\lambda - (n+2\lambda-1) \langle X^k a_{n-1}^{(\lambda)}, 1 \rangle_\lambda$$

Or on a $n \geq k+2$ donc $n-1 \geq k+1$, alors d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\langle X^k a_{n-1}^{(\lambda)}, 1 \rangle_\lambda = 0 \quad \text{et de même } n+1 \geq k+3 \geq k+1 \text{ Alors } \langle X^k a_{n+1}^{(\lambda)}, 1 \rangle_\lambda = 0$$

Donc on déduit que

$$\langle X^{k+1} a_{n+1}^{(\lambda)}, 1 \rangle_\lambda = 0 \quad \text{pour } n \geq k+2$$

D'où le résultat :

$$\forall k \geq 0, \quad \forall n \geq k+1, \quad \langle X^k a_n^{(\lambda)}, 1 \rangle_\lambda = 0$$

Or on sait que

$$\langle X^k a_n^{(\lambda)}, 1 \rangle_\lambda = \langle a_n^{(\lambda)}, X^k \rangle_\lambda$$

Donc on a bien

$$\boxed{\forall k \geq 0, \quad \forall n \geq k+1, \quad \langle a_n^{(\lambda)}, X^k \rangle_\lambda = 0}$$

On peut écrire autrement que

$$\forall n \geq 1, \forall k \leq n-1, \langle a_n^{(\lambda)}, X^k \rangle_\lambda = 0 \Rightarrow a_n^{(\lambda)} \perp \mathbb{R}_{n-1}[X]$$

On déduit alors que $\forall n \geq 2, \langle a_n^{(\lambda)}, a_i^{(\lambda)} \rangle_\lambda = 0, \forall i \leq n-1$

Donc $(a_0^{(\lambda)}, a_1^{(\lambda)}, \dots, a_n^{(\lambda)})$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$, donc libre et de dimension $n+1$.

On conclut alors

$(a_0^{(\lambda)}, \dots, a_n^{(\lambda)})$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$ pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_\lambda$

Quatrième Partie

18a)

Soit $U \in \mathbb{R}^n$

On a

$$(UU^T)^T = UU^T \quad \text{alors } UU^T \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

Soit $X \in \mathbb{R}^n$, on a

$$X^T UU^T X = (U^T X)^T (U^T X) \geq 0$$

Donc

$$\forall U \in \mathbb{R}^n, \quad UU^T \in \mathcal{S}_n^+ \quad (\text{D'où le résultat})$$

18b)

Soit $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

On a pour $1 \leq i, j \leq n$:

$$(A \odot (B + C))_{ij} = a_{ij}(b_{ij} + c_{ij}) = a_{ij}b_{ij} + a_{ij}c_{ij} = (A \odot B)_{ij} + (A \odot C)_{ij}$$

Ceci est vrai $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, donc :

$$A \odot (B + C) = (A \odot B) + (A \odot C)$$

18c)

D'après le théorème spectral appliqué à $M \in \mathcal{S}_n^+$, on a $M = P^T D P$ où $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale à coefficients positifs.

$$\text{Notons } D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n d_i e_i e_i^T$$

avec e_i le i^{e} vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, d_i \geq 0$

$$\text{Alors on aura } M = P^T D P = \sum_{i=1}^n d_i P^T e_i e_i^T P \quad \text{Notons } U_i = P^T e_i \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{tel que } M = \sum_{i=1}^n d_i U_i U_i^T \quad \text{tel que } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, d_i \geq 0$$

18d)

D'après **18b** et **18c** et comme $d_i \geq 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$, il suffit alors pour obtenir $A \odot B \in \mathcal{S}_n^+$ pour $A, B \in \mathcal{S}_n^+$, de montrer que pour $X, Y \in \mathbb{R}^n$,

$$XX^T \odot YY^T \in \mathcal{S}_n^+$$

On a pour $1 \leq i, j \leq n$:

$$(XX^T \odot YY^T)_{ij} = x_i x_j \cdot y_i y_j = (x_i y_i)(x_j y_j) = (ZZ^T)_{ij} \quad \text{avec } Z = (x_i y_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$$

Alors

$$XX^T \odot YY^T = ZZ^T \in \mathcal{S}_n^+ \quad \text{d'après 18a.} \quad \text{D'où le résultat.}$$

18e)

Soit f et g deux fonctions de type positif en dimension N .

Soit $k \geq 1$, soit un k -uplet $(x_1, \dots, x_k) \in (S^{N-1})^k$.

On a

$$(fg(x_i \cdot x_j)) = (f(x_i \cdot x_j)g(x_i \cdot x_j)) = (f(x_i \cdot x_j)) \odot (g(x_i \cdot x_j))$$

Par définition $(f(x_i \cdot x_j)) \in \mathcal{S}_k^+$ et $(g(x_i \cdot x_j)) \in \mathcal{S}_k^+$.

Alors d'après **18d** on déduit que $(fg(x_i \cdot x_j)) \in \mathcal{S}_k^+$ et que fg est de type positif en dimension N .

19)

Soit $k \geq 1$, soit $(x_1, \dots, x_k)$ un k -uplet appartenant à S^k avec

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot x = 1\}$$

On peut donc dire qu'il existe θ_i tel que

$$x_i = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) \end{pmatrix}$$

et on déduit que pour $1 \leq i, j \leq k$,

$$T_n(x_i \cdot x_j) = T_n(\cos(\theta_i - \theta_j)) = \cos(n(\theta_i - \theta_j)) = \cos(n\theta_i) \cos(n\theta_j) + \sin(n\theta_i) \sin(n\theta_j)$$

$$= u_i \cdot u_j \quad \text{avec } u_i = \begin{pmatrix} \cos(n\theta_i) \\ \sin(n\theta_i) \end{pmatrix}$$

$$(T_n(x_i \cdot x_j)) = (u_i \cdot u_j)$$

C'est une matrice de Gram. Si on prend B une base orthonormale de l'espace engendré par la famille (u_i) , et A la matrice représentative de (u_i) dans B , on a que

$$(T_n(x_i \cdot x_j)) = AA^T$$

et $\forall X \in \mathbb{R}^k$,

$$X^T (T_n(x_i \cdot x_j)) X = X^T A A^T X = (A^T X)^T (A^T X) = \|A^T X\|^2 \geq 0$$

donc $(T_n(x_i \cdot x_j)) \in \mathcal{S}_k^+$

Donc on déduit que les polynômes T_n sont des fonctions de type positif en dimension 2.

20)

Soit f une fonction absolument monotone de $[-1, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soient P_1 et P_2 deux polynômes N -conductifs.

On a d'après **4b** :

$$H(f; P_1 P_2) = H(f; P_1) + P_2 H(Q(f; P_1), P_2)$$

On a P_1 est N -conductif, alors $H(f; P_1)$ est de type positif en dimension N . On a aussi d'après **question 6** que $Q(f; P_1)$ est absolument monotone sur $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$ et P_2 est N -conductif, alors $H(Q(f; P_1), P_2)$ est de type positif en dimension N .

De plus, P_2 est de même de type positif en dimension N . Alors on déduit que $H(f; P_1 P_2)$ est aussi de type positif en dimension N , et donc d'après **18e** (et aussi la somme de deux fonctions de type positif en dim N est une fonction de type positif en dim N)

$P_1 P_2$ est N -conductif.

21)

On va montrer ce résultat par récurrence :

$\forall 1 \leq m \leq n, \quad H\left(f; \prod_{i=1}^m (x - r_i)\right)$ est une fonction de type positif en dimension N

Pour $m = 1$: $H(f; x - r_1)$ est une constante (car $\deg H < \deg(x - r_1) = 1$)
et

$$H(f; x - r_1)(r_1) = f(r_1) > 0 \quad \Rightarrow \quad H(f; x - r_1) = f(r_1) > 0$$

Alors pour $k \geq 1$, et pour un k -uplet $(x_1, \dots, x_k) \in (S^{N-1})^k$, on a :

$$(H(x_i, x_j)) = (f(r_1)) = f(r_1) \mathcal{J} \quad \text{avec } \mathcal{J} = (1)_{1 \leq i, j \leq k}$$

$\mathcal{J}$ a pour valeurs propres 0 et k , donc $\mathcal{J} \in \mathcal{S}_k^+$, et comme $f(r_1) > 0$, on a :

$$(H(x_i, x_j)) \in \mathcal{S}_k^+ \Rightarrow H(f; x - r_1) \text{ est de type positif en dimension } N$$

Donc $H(f; x - r_1)$ est de type positif en dimension N . De la même façon, on montre que $H(f; x - r_i)$ est de type positif en dimension N ,

$$\forall 1 \leq i \leq n \Rightarrow (x - r_i)_{1 \leq i \leq n} \text{ sont } N\text{-conductifs}$$

On suppose que le résultat est vrai pour m , démontrons-le pour $m + 1$.

On a, d'après **17e**, que

$$\left(a_0^{\left(\frac{N}{2}-1\right)}, \dots, a_n^{\left(\frac{N}{2}-1\right)}\right) \text{ est une base orthogonale de } \mathbb{R}_n[X]$$

D'après **8a**, par unicité :

$$a_i = \frac{a_i^{\left(\frac{N}{2}-1\right)}}{\text{dom}\left(a_i^{\left(\frac{N}{2}-1\right)}\right)} \quad \text{donc } \forall 1 \leq i \leq n : \quad a_i = \frac{a_i^{\left(\frac{N}{2}-1\right)}}{\underbrace{2^i \prod_{\ell=1}^{i-1} \left(\frac{N}{2} - 1 + \ell\right)}_{=\beta_i}} \quad \text{et } a_0 = a_0^{\left(\frac{N}{2}-1\right)} = 1$$

D'après la question **13** (pour $j = 0$) :

$$\prod_{\ell=1}^n (X - r_\ell) = \sum_{i=0}^n \alpha_i a_i \quad \text{avec } \alpha_i > 0 \text{ pour tous } 0 \leq i \leq n$$

Donc :

$$\prod_{\ell=1}^n (X - r_\ell) = \sum_{i=0}^n \underbrace{\frac{\alpha_i}{\beta_i}}_{>0} a_i^{\left(\frac{N}{2}-1\right)} \quad \text{et on admet que } \left(a_i^{\left(\frac{N}{2}-1\right)}\right)_{0 \leq i \leq n}$$

sont de type positif en dimension N

Donc on déduit que :

$$\forall n \geq 1, \quad \prod_{i=1}^n (X - r_i) \text{ est de type positif de dimension } N$$

Revenons à la récurrence :

On a, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\prod_{i=1}^m (X - r_i) \text{ est } N\text{-conductif}$$

et on sait que $X - r_{m+1}$ est N -conductif (initialisation), et on a montré que :

$$\prod_{i=1}^m (X - r_i) \text{ est de type positif en dimension } N$$

Alors, d'après la question **20** :

$$\prod_{i=1}^m (X - r_i)(X - r_{m+1}) = \prod_{i=1}^{m+1} (X - r_i)$$

est N -conductif et :

$$\prod_{i=1}^{m+1} (X - r_i) \text{ est de type positif en dimension } N$$

Alors on déduit que :

$$H \left(f; \prod_{i=1}^{m+1} (X - r_i) \right) \text{ est de type positif en dimension } N$$

D'où le résultat :

On a alors, pour tout $1 \leq m \leq n$:

$$H \left(f; \prod_{i=1}^m (X - r_i) \right) \text{ est de type positif en dimension } N$$

et pour $m = n$, on aura :

$$H \left(f; \prod_{i=1}^n (X - r_i) \right) \text{ est une fonction de type positif en dimension } N$$

Fin de sujet