X-ENS Maths C 2025 - Un corrigé

LOUISE NGUYEN, nguyenlelouise@gmail.com, 1er mai 2025

I Amplitude d'une somme de variables aléatoires

I.1) Une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli suit (8) mais ce n'est pas le cas si elle suite une loi binomiale ou géométrique.

I.2) Il faut prendre un exemple extrême en considérant les X_i les plus liées possible. On suppose que toutes les variables X_i, pour $1 \leq i \leq N$, sont *égales* à la variable X définie par

$$\mathbb{P}(X=-1)=\mathbb{P}(X=1)=\frac{1}{2}.$$

Alors, les variables vérifient (8) et (9) et l'évènement $(X_1=1, ... X_N=1)=(X=1)$, inclus dans l'évènement $(|S_N| \geq N)$, admet une probabilité $1/2$, donc on a bien $\mathbb{P}(|S_N| \geq N) \geq 1/2$ (on a encore mieux puisque $\mathbb{P}(|S_N| \geq N)=1$).

I.3)

- On développe la somme et on utilise la linéarité de l'espérance:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|S_N|^2]=\mathbb{E}\left[\left(\sum_{n=1}^N X_n\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^N X_n^2+2\sum_{1\leq i\neq j\leq N} X_i X_j\right] \\ &= \sum_{n=1}^N \mathbb{E}[X_n^2]+2\sum_{1\leq i\neq j\leq N}\mathbb{E}[X_i X_j]\end{aligned}$$

Or les variables sont décorrélées, donc si $i \neq j$, $\mathbb{E}[X_i X_j]=0$. De plus, pour tout $1 \leq n \leq N$, puisque l'on a (9): $\mathbb{E}[X^2]=\mathbb{V}[X]+\mathbb{E}[X]^2=\mathbb{V}[X] \leq 1$. Finalement:

$$\mathbb{E}[|S_N|^2] \leq N.$$

- Comme $|S_N|$ est une variable aléatoire réelle positive, on peut alors appliquer l'inégalité de Markov et on a l'inégalité recherchée:

$$\forall t>0, \quad \mathbb{P}\left(|S_N|>t\sqrt{N}\right)=\mathbb{P}(|S_N|^2>t^2 N) \leq \frac{\mathbb{E}[|S_N|^2]}{t^2 N} \leq \frac{1}{t^2}.$$

I.4.a) Supposons que $(Y_n)_{n\geq 1}$ soient k-indépendantes et $j \leq k$. On se donne $\psi_1, ..., \psi_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornées et $1 \leq n_1 < ... < n_j$ des entiers. Posons alors $\psi_{j+1}, ..., \psi_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ égales à la fonction constante égale à 1 et $n_{j+1}=n_j+1, ..., n_k=n_j+(k-j)$. Puisque toutes les fonctions $\psi_1, ..., \psi_k$ sont bornées sur $\mathbb{R}$, on a par k-indépendance:

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^k \psi_i\left(Y_{n_i}\right)\right]=\prod_{i=1}^k \mathbb{E}\left[\psi_i\left(Y_{n_i}\right)\right]$$

ce qui se réécrit

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^j \psi_i\left(Y_{n_i}\right)\right]=\prod_{i=1}^j \mathbb{E}\left[\psi_i\left(Y_{n_i}\right)\right]$$

car l'espérance d'une variable constante est sa propre valeur (ici $\mathbb{E}[1]=1$). Donc $(Y_n)_{n\geq 1}$ sont j-indépendantes.

I.4.b) C'est l'indépendance mutuelle des $Y_1, ..., Y_N$.

I.4.c)

- On a par hypothèse que Y_1 et Y_2 sont indépendantes. Pour montrer que (Y_1, Y_2, Y_3) sont 2 -indépendantes, il suffit alors de montrer que (Y_1, Y_3) et (Y_2, Y_3) sont indépendantes. Si on se donne $a, b \in \{0, 1\}$, on a que

$$\mathbb{P}(Y_1 = a \cap Y_3 = b) = \mathbb{P}(Y_1 = a \cap Y_2 = (b - a) \bmod 2) = \frac{1}{4}.$$

  Également, $\mathbb{P}(Y_1 = a) = \frac{1}{2}$, et en découpant $(Y_3 = b)$ en

$$(Y_1 = 0 \cap Y_2 = b) \sqcup (Y_1 = 1 \cap Y_2 = 1 - b)$$

  on trouve que

$$\mathbb{P}(Y_3 = b) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

  Donc $\mathbb{P}(Y_1 = a) \times \mathbb{P}(Y_3 = b) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(Y_1 = a \cap Y_3 = b)$ d'où (Y_1, Y_3) indépendantes. Un raisonnement analogue donne aussi (Y_2, Y_3) indépendantes.
- Par exemple, $\mathbb{P}(Y_1 = 0 \cap Y_2 = 0 \cap Y_3 = 1) = 0$ (évènement impossible) mais $\mathbb{P}(Y_1 = 0) \times \mathbb{P}(Y_2 = 0) \times \mathbb{P}(Y_3 = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \neq 0$, en reprenant les calculs précédents. Donc (Y_1, Y_2, Y_3) ne sont pas 3-indépendantes.

I.5.a) Comme $k \geq 2$, l'ensemble τ_1 est l'ensemble des k-uplets $(1, ..., 1), ..., (N, ..., N)$ (ils ont bien exactement un indice distinct et ils apparaissent $k \geq 2$ fois), donc $|\tau_1| = N$. Si $\ell > k/2$ alors τ_ℓ est vide, car si on avait $T = (n_1, ..., n_k) \in \tau_\ell$ alors en regroupant les k indices par leur multiplicité, sachant qu'il y en a ℓ distincts et qu'ils ont une multiplicité ≥ 2, on trouverait $k = \sum_{i=1}^N m_T(i) \geq \ell \times 2 > k$, impossible. Donc $|\tau_\ell| = 0$.

I.5.b)

- On remarque que développer la somme $(S_N)^k$ revient à sommer sur tous les k-uplets possibles dans τ pour choisir les facteurs à multiplier ensemble dans chaque terme. La forme du produit est donnée par la multiplicité de chaque entier possible de $\{1, ..., N\}$ dans le k-uplet en question. On obtient donc

$$(S_N)^k = \sum_{T \in \tau} \prod_{n=1}^N X_n^{m_T(n)}$$

  d'où

$$\mathbb{E}\left[(S_N)^k\right] = \sum_{T \in \tau} \mathbb{E}\left[\prod_{n=1}^N X_n^{m_T(n)}\right]$$

  puis, en utilisant la k-indépendance et I.4.a (il y a au plus k variables aléatoires X_n différentes qui interviennent dans chaque terme):

$$\mathbb{E}\left[(S_N)^k\right] = \sum_{T \in \tau} \prod_{n=1}^N \mathbb{E}\left[X_n^{m_T(n)}\right]$$

- Puisque chaque X_n est d'espérance nulle, si $T \in \tau$ admet un indice qui n'y apparaît qu'une seule fois alors $\prod_{n=1}^N \mathbb{E}\left[X_n^{m_T(n)}\right] = 0$. On peut donc partitionner l'ensemble des termes non-nuls de la somme précédente en $\tau_1 \sqcup ... \sqcup \tau_k = \tau_1 \sqcup ... \sqcup \tau_{k/2}$ (on a établi dans I.5.a que si $\ell > k/2$ alors $\tau_\ell = \emptyset$) ce qui donne bien:

$$\mathbb{E}\left[(S_N)^k\right] = \sum_{\ell=1}^{k/2} \sum_{T\in\tau_\ell} \prod_{n=1}^{N} \mathbb{E}\left[X_n^{m_T(n)}\right]$$

I.5.c)

- Pour tout $1 \leq n \leq N$ on a $X_N^2 \leq K^2$ presque sûrement selon (8). Soit α un entier ≥ 2. On a alors $X_n^{2\alpha} \leq K^{2\alpha}$ (presque sûrement). Rappelons que

$$\mathbb{E}[X_n^2] = \underbrace{\mathbb{E}[X_n]^2}_{=0} + \underbrace{\mathbb{V}(X_n)}_{\leq 1} \leq 1.$$

  - Si α est pair:

$$\mathbb{E}[X_n^\alpha] = \mathbb{E}\left[\left(X_n^2\right)^{(\alpha-2)/2} X_n^2\right] \leq \left(K^2\right)^{(\alpha-2)/2}\mathbb{E}[X_n^2] \leq K^{\alpha-2}.$$

  - Si α est impair, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour se ramener au cas pair:

$$\mathbb{E}[X_n^\alpha] = \mathbb{E}[X_n^{\alpha-1}X_n] \leq \sqrt{\mathbb{E}[X_n^{2\alpha-2}]\mathbb{E}[X_n^2]} \leq \sqrt{\mathbb{E}[X_n^{2\alpha-2}]} \leq \sqrt{K^{2\alpha-2-2}} = K^{\alpha-2}$$

Conclusion: si α est un entier ≥ 2 alors $\mathbb{E}[X_n^\alpha] \leq K^{\alpha-2}$.

- La majoration de la question précédente donne alors:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(S_N)^k\right] &= \sum_{\ell=1}^{k/2} \sum_{T\in\tau_\ell} \prod_{n=1}^{N} \mathbb{E}\left[X_n^{m_T(n)}\right] \\
&\leq \sum_{\ell=1}^{k/2} \sum_{T\in\tau_\ell} \prod_{\substack{n=1 \\ m_T(n)>0}}^{N} K^{m_T(n)-2} = \sum_{\ell=1}^{k/2} \sum_{T\in\tau_\ell} K^{m_T(1)+\ldots+m_T(N)-2\ell} \\
&\leq \sum_{\ell=1}^{k/2} \sum_{T\in\tau_\ell} K^{k-2\ell} = \sum_{\ell=1}^{k/2} K^{k-2\ell}\ |\tau_\ell|
\end{aligned}$$

On a en effet, pour tout $1 \leq \ell \leq k/2$ et $T \in \tau_\ell$ exactement ℓ entiers $1 \leq n \leq N$ tels que $m_T(n) > 0$ et on a aussi $m_T(1) + \ldots + m_T(N) = k$.

I.5.d) L'ensemble des $T \in \tau$ qui font intervenir au plus ℓ éléments distincts contient τ_ℓ. On peut dénombrer son cardinal, il s'agit en effet de choisir ℓ éléments distincts dans $\{1, \ldots, N\}$ puis de compter le nombre de k-listes que l'on peut faire avec ces ℓ éléments: l'ensemble a pour cardinal $\binom{N}{\ell} \times \ell^k$. Ainsi,

$$|\tau_\ell| \leq \binom{N}{\ell}\ell^k = \frac{N(N-1)\ldots(N-\ell+1)}{\ell!}\ell^k \leq \frac{N^\ell}{\ell!}\ell^k.$$

I.5.e) On a le développement en série entière

$$e^\ell = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ell^n}{n!} = 1 + \ell + \frac{\ell}{2!} + \ldots + \frac{\ell^\ell}{\ell!} + \ldots \overset{\ell>0}{\geq} \frac{\ell^\ell}{\ell!}$$

d'où on trouve bien

$$\ell! \geq \ell^\ell e^{-\ell}.$$

Il suffit de réinjecter cette inégalité dans la question précédente pour obtenir

$$|\tau_\ell| \leq (Ne)^\ell \left(\frac{k}{2}\right)^{k-\ell}.$$

I.5.f) Il suffit de réinjecter I.5.e dans I.5.c:

$$\mathbb{E}\left[(S_N)^k\right] \leq \left(\frac{Kk}{2}\right)^k \sum_{\ell=1}^{k/2} \left(\frac{2Ne}{kK^2}\right)^\ell.$$

I.5.g) Le membre de droite dans l'inégalité de I.5.f fait intervenir une somme géométrique:

$$\sum_{\ell=1}^{k/2} \left(\frac{2Ne}{kK^2}\right)^\ell = \sum_{\ell=1}^{k/2} \theta^\ell = \theta \frac{\theta^{k/2}-1}{\theta-1} \leq \frac{\theta}{\theta-1} \times \theta^{k/2}$$

On majore aussi

$$\left(\frac{Kk}{2}\right)^k = \left(\frac{(kK)^2}{4}\right)^{k/2} = \left(\frac{k \times kK^2}{4}\right)^{k/2} \leq \left(\frac{kN}{4}\right)^{k/2}$$

en utilisant $kK^2 \leq N$. On voit enfin que

$$\frac{\theta}{\theta-1} = \frac{1}{1-1/\theta} = \frac{1}{1-\frac{kK^2}{2Ne}} \leq \frac{1}{1-\frac{1}{2e}} \leq 2$$

car $kK^2 \leq N$ et $e \geq 2$. Finalement

$$\mathbb{E}\left[(S_N)^k\right] \leq \left(\frac{kN}{4}\right)^{k/2} \frac{\theta}{\theta-1}\theta^{k/2} = \frac{\theta}{\theta-1}\left(\frac{kN}{4}\frac{2Ne}{kK^2}\right)^{k/2} = \frac{\theta}{\theta-1}\left(\frac{Nek}{2}\right)^{k/2} \leq 2\left(\frac{Nek}{2}\right)^{k/2}.$$

I.5.h) Puisque k est pair, on peut écrire $(S_N)^k = |S_N|^k$. Comme $|S_N|$ est réelle positive, on utilise l'inégalité de Markov et on obtient

$$\forall t > 0, \quad \mathbb{P}\left(|S_N| \geq t\sqrt{N}\right) = \mathbb{P}\left((S_N)^k \geq t^k N^{k/2}\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[(S_N)^k\right]}{t^k N^{k/2}}.$$

On y injecte la majoration de I.5.g et on trouve:

$$\forall t > 0, \quad \mathbb{P}\left(|S_N| \geq t\sqrt{N}\right) \leq 2\left(\frac{\sqrt{ek/2}}{t}\right)^k.$$

I.6.a) Si le résultat est établi pour $K = 1$, alors dans le cas général, on peut poser les $X_{n'} = \frac{X_n}{K}$, ce qui remplace alors S_N par $\frac{S_N}{K}$ et fait en sorte que $\mathbb{V}(X_n') \leq \frac{K}{K^2} = \frac{1}{K} \leq 1$ (car $K \geq 1$) pour tout n, et alors, pour tout $t > 0$, si $t' = \frac{t}{K}$:

$$\mathbb{P}\left(|S_N| > t\sqrt{N}\right) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_N}{K}\right| > t'\sqrt{N}\right) \leq \beta \exp\left(-\alpha (t')^2/1^2\right) = \beta \exp\left(-\alpha t^2/K^2\right)$$

Le résultat s'étend donc à tout $K \geq 1$.

I.6.b) Si $e \leq t \leq \frac{e}{\sqrt{2}}\sqrt{N}$ alors comme $k \leq \frac{2t^2}{e^2}$, on a $k \leq \frac{2\left(e\sqrt{\frac{N}{2}}\right)^2}{e^2} \leq N$ c'est-à-dire (27). Ceci permet aussi de s'assurer que $k \geq 1$ car on a $k+2 > \frac{2t^2}{e^2}$ (k est le plus grand entier pair inférieur à $\frac{2t^2}{e^2}$) donc $k > \frac{2t^2}{e^2} - 2 \geq 2 - 2 = 0$.

I.6.c) On a $k \leq \frac{2t^2}{e^2}$ et $k > \frac{2t^2}{e^2} - 2$ donc

$$2\left(\frac{\sqrt{ek/2}}{t}\right)^k \leq 2e^{-\frac{k}{2}} \overset{e>1}{\leq} 2\exp\left(-\frac{2t^2/e^2-2}{2}\right) = 2\exp\left(1-\frac{t^2}{e^2}\right) = 2e\exp(-t^2/e^2).$$

Donc avec $\beta = 2e$ et $\alpha = e^{-2}$ la majoration de I.5.h implique bien

$$\mathbb{P}\left(|S_N| \geq t\sqrt{N}\right) \leq \beta\exp(-\alpha t^2)$$

lorsque $e \leq t \leq e\sqrt{\frac{N}{2}}$.

I.6.d) Soit $t \geq 0$. Si $e \leq t \leq e\sqrt{\frac{N}{2}}$ alors on a bien établi le résultat. On garde $\beta = 2e$ et $\alpha = e^{-2}$. On voit alors que les cas $t < e$ et $t > e\sqrt{\frac{N}{2}}$ sont suffisamment extrêmes pour que la contrainte $e \leq t \leq e\sqrt{\frac{N}{2}}$ ait permis bien majorer la probabilité sur l'ensemble du domaine. En effet:

- Supposons $t > e\sqrt{\frac{N}{2}}$. On a alors $\left(|S_N| > t\sqrt{N}\right) \subset \left(|S_N| > \frac{e}{\sqrt{2}}N\right) \subset (|S_N| > N)$ car $e > 2 > \sqrt{2}$. De plus $|S_N| \leq |X_1| + \ldots + |X_N| \leq N$ presque sûrement selon la condition (8). Donc

$$\mathbb{P}\left(|S_N| > t\sqrt{N}\right) \leq \mathbb{P}(|S_N| > N) = 0$$

  que l'on peut bien majorer par $\beta\exp(-\alpha t^2)$.
- Supposons $0 \leq t \leq e$. Alors

$$\beta\exp(-\alpha t^2) \geq \beta\exp(-\alpha e^2) = 2e\exp(-1) = 2 > 1 \geq \mathbb{P}\left(|S_N| > t\sqrt{N}\right).$$

Finalement, on a bien

$$\forall t \geq 0,\quad \mathbb{P}\left(|S_N| \geq t\sqrt{N}\right) \leq \beta\exp(-\alpha t^2).$$

II Concentration de combinaisons de variables aléatoires

II.1.a) On commence par exclure le cas où A_s est vide, auquel cas l'inégalité est toujours vraie car $\mathbb{P}(F(X) \leq s)$ vaut alors 0. On suppose donc $A_s \neq \emptyset$.

- On veut d'abord utiliser (40) avec A_s. Il faut d'abord vérifier que A_s est convexe: soient $x, y \in A_s$ et $\lambda \in [0,1]$, on a par convexité de F que

$$F((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)F(x) + \lambda F(y) \overset{x,y\in A_s}{\leq} (1-\lambda)s + \lambda s = s$$

donc $(1-\lambda)x + \lambda y \in A_s$, ce qui montre que A_s est une partie convexe de Q^N.

Selon (40) et en notant que puisque l'on a (8), $(X \in Q^N)$ est presque sûr, donc les évènements $(F(X) \leq s)$ et $(X \in A_s)$ ont la même probabilité:

$$\mathbb{P}[F(X) \leq s] = \mathbb{P}[X \in A_s] \leq \left(\mathbb{E}\left[\exp\left(\gamma\frac{d(X,A_s)^2}{4K^2}\right)\right]\right)^{-1}.$$

- On va ensuite essayer de majorer $\mathbb{P}(F(X) \geq \sigma)$ par un membre où apparaît en facteur

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\gamma\frac{d(X,A_s)^2}{4K^2}\right)\right]$$

  qui se simplifierait avec le facteur présent dans l'inégalité d'au-dessus.

  - On peut minorer $d(X, A_s)^2$ dans ce cadre. Soit $\omega \in \Omega$ et $x = X(\omega)$. On suppose que $F(x) \geq \sigma$.

Puisque F est 1-lipschitzienne, pour tout $a \in A_s$, en remarquant de plus que $F(x) \geq \sigma > s \geq F(a)$:

$$|x-a| \geq |F(x)-F(a)| = F(x)-F(a) \geq \sigma - s > 0.$$

Donc

$$d(x, A_s)^2 \geq (\sigma - s)^2.$$

- Ceci est vrai pour tout $\omega \in \Omega$, on a donc établi:

$$(F(X) \geq \sigma) \subset \left\{d(X, A_s)^2 \geq (F(X)-s)^2\right\}$$

d'où

$$\mathbb{P}[F(X) \geq \sigma] \leq \mathbb{P}\left[d(X, A_s)^2 \geq (\sigma - s)^2\right].$$

- On utilise alors l'inégalité de Markov:

$$\mathbb{P}(F(X) \geq \sigma) \leq \mathbb{P}\left(d(X, A_s)^2 \geq (\sigma - s)^2\right) = \mathbb{P}\left[\exp\left(\gamma \frac{d(X, A_s)^2}{4K^2}\right) \geq \exp\left(\gamma \frac{(\sigma - s)^2}{4K^2}\right)\right]$$
$$\leq \mathbb{E}\left[\exp\left(\gamma \frac{d(X, A_s)^2}{4K^2}\right)\right] \exp\left(-\gamma \frac{(\sigma - s)^2}{4K^2}\right)$$

- Finalement, en rassemblant les deux points:

$$\mathbb{P}(F(X) \leq s)\mathbb{P}(F(X) \geq \sigma) \leq \frac{\mathbb{E}\left[\exp\left(\gamma \frac{d(X,A_s)^2}{4K^2}\right)\right] \exp\left(-\gamma \frac{(\sigma-s)^2}{4K^2}\right)}{\mathbb{E}\left[\exp\left(\gamma \frac{d(X,A_s)^2}{4K^2}\right)\right]} = \exp\left(-\gamma \frac{(\sigma - s)^2}{4K^2}\right).$$

II.1.b) On reste dans le cadre de la question précédente. Soit $m \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$. Supposons $\mathbb{P}(F(X) \geq m) \geq \frac{1}{2}$.

- Si $t = 0$ alors

$$\mathbb{P}(F(X) \leq m-t) = \mathbb{P}(F(X) \leq m) = \underbrace{\mathbb{P}(F(X) < m)}_{1-\mathbb{P}(F(X)\geq m)} + \mathbb{P}(F(X) = m) \leq \frac{1}{2} + \mathbb{P}(F(X) = m) \leq \frac{3}{2}$$

- Si $t > 0$ alors on pose $s = m - t$ et $\sigma = m > s$ et selon II.1.a on a

$$\mathbb{P}(F(X) \leq m-t)\mathbb{P}(F(X) \geq m) \leq \exp\left(-\gamma \frac{(m-(m-t))^2}{4K^2}\right)$$

d'où

$$\mathbb{P}(F(X) \leq m-t) \leq 2\exp\left(-\gamma \frac{t^2}{4K^2}\right).$$

On peut bien trouver β et α qui permettent d'avoir

$$\mathbb{P}(F(X) \leq m-t) \leq \beta e^{-\alpha t^2/K^2}$$

dans les deux cas. Ceci établit bien (37).

II.2.a) Les points dans $P_A(x)$ et $R_A(x)$ encodent la position relative possible d'éléments de a en termes d'intersection d'hyperplans, c'est-à-dire de système d'équations cartésiennes. Plus précisément, un point $z \in R_A(x)$ encode de manière exacte par ses coordonnées (qui sont dans $\{0,1\}$) l'emplacement d'un certain point a dans une des intersections possibles des hyperplans affines portés par les H_i et passant x. En effet, la proposition (43) signifie que la donnée des H_i auxquels z appartient coïncide avec la donnée des H_i auxquels $a - x$ appartient, c'est-à-dire des $H_i + x$ auxquels a appartient. L'ensemble $P_A(x)$, défini par (44), fait de même mais de manière plus lacunaire: la donnée des H_i auxquels z appartient est au moins contenue dans la donnée des $H_i + x$ auxquels a appartient mais rien n'assure qu'on puisse en connaître plus.

On peut à partir de là s'attaquer à la question:

- Soit $z' \in P_A(x)$. Il existe alors $a \in A$ tel que $\forall 1 \leq i \leq N, z' \in H_i \Longrightarrow a - x \in H_i$. On cherche $z \in R_A(x)$ tel que $z \leq z'$. L'idée est alors de choisir uniquement les composantes de z' qui portent l'information qui porte sur a (et x) et rien de plus. On pose alors

  $$I = \{i \in [\![1, N]\!] \mid a - x \notin H_i\}$$

  puis

  $$z = \sum_{i \in I} \langle z', e_i \rangle e_i = \sum_{i \in I} e_i$$

  (pour la dernière égalité: pour tout $i \in I$ on a $\langle z', e_i \rangle \neq 0$ donc $= 1$ car sinon $z' \in H_i$ et donc $a - x \in H_i$).

  On vérifie que $z \in R_A(x)$: pour tout $1 \leq i \leq N$,

  $$z \in H_i \Longleftrightarrow i \notin I \Longleftrightarrow a - x \in H_i.$$

  Ensuite, pour tout $1 \leq i \leq N$,

  $$\langle z', e_i \rangle = 0 \Longrightarrow z' \in H_i \Longrightarrow a - x \in H_i \Longrightarrow z \in H_i \Longrightarrow \langle z, e_i \rangle = 0$$

  donc $\langle z', e_i \rangle \geq \langle z, e_i \rangle$ (les coordonnées sont dans $\{0,1\}$). Ceci établit bien $z \leq z'$.
- Soit $z' \in P^N$ tel qu'il existe $z \in R_A(x)$ avec $z \leq z'$. Il existe $a \in A$ tel que $\forall 1 \leq i \leq N, z \in H_i \Longleftrightarrow a - x \in H_i$. Alors

  $$\forall 1 \leq i \leq N, \quad z' \in H_i \Longleftrightarrow \langle z', e_i \rangle = 0 \overset{z \leq z'}{\Longrightarrow} \langle z, e_i \rangle = 0 \Longleftrightarrow z \in H_i \Longleftrightarrow a - x \in H_i$$

  Donc $z' \in P_A(x)$.

Comme attendu on a donc bien

$$P_A(x) = \{z' \in P^N \mid \exists z \in R_A(x), z \leq z'\}.$$

II.2.b) Cette question mérite mieux une explication qui utilise l'interprétation faite dans la question précédente qu'une vérification formelle.

- Si $x \in A$ alors le point x appartient à tous les hyperplans affines portés par H_i et passant par x, ce qui est notamment encodé par le point 0 qui est bien normal à tous les hyperplans H_i. Donc $0 \in P_A(x)$.
- Si $0 \in P_A(x)$, alors on a $P_A(x) \supset P^N$ car 0 puisque appartient à $P_A(x)$, il faut aussi $0 \in R_A(x)$ car 0 appartient à tous les H_i, ce qui implique selon II.2.a. que n'importe quel $z \in P^N$ tel que $z \geq 0$ appartient aussi à $P_A(x)$, ce qui recouvre tout $P_A(x)$. L'inclusion $P_A(x) \subset P^N$ découle de la définition. Donc $P_A(x) = P^N$.
- Si $P_A(x) = P^N$ alors on a en particulier $0 \in P_A(x)$. Donc il existe $a \in A$ qui est dans l'intersection de tous les hyperplans affines portés par H_i et passant par x (car 0 appartient à tous les H_i). Cette intersection est réduite au singleton $\{x\}$, ce qui montre donc que $x = a \in A$.

On a bien:

$$x \in A \iff 0 \in P_A(x) \iff P_A(x) = P^N.$$

II.2.c) Il faut choisir A qui ne contienne pas de vecteurs appartenant à $H_1 + 0$ et $H_2 + 0$ (car e_3 appartient à ces deux hyperplans). Par exemple, $A = \{e_1\}$. Détaillons $R_A(0)$ et $P_A(0)$ dans ce cas.

- Le point $a = e_1$ appartient à $H_2 + 0$ et $H_3 + 0$ mais pas $H_1 + 0$, donc les seuls points possibles dans $R_A(0)$ doivent être dans P^N et appartenir à l'intersection de H_2 et H_3 mais pas H_1. On a $R_A(0) = \{e_1\}$.
- Selon II.2.a on en déduit que $P_A(0)$ est l'ensemble $\{e_1 + e_2, e_1 + e_3, e_1 + e_2 + e_3\}$ (tous les z qui ont des coordonnées $\geq$ à celles des vecteurs de $R_A(0)$).

II.2.d) On montre le résultat de l'indication, le résultat demandé ($\Gamma(B) = \Gamma_0(B)$) en découlant sans difficulté par une récurrence (ou argument de minimalité). Le raisonnement suivant est classique (théorème de Carathéodory) mais technique et il y a beaucoup de pièges.

On se donne $m > N$ et $z = \sum_{j=1}^{m+1} \theta_j z_j$ une combinaison linéaire convexe de vecteurs $v_j \in B$. L'idée est d'utiliser des combinaisons linéaires nulles issues de familles liées obtenues par argument de dimension pour « retirer » à z une de ses composantes. La difficulté est de bien s'y prendre pour conserver une combinaison linéaire convexe.

Puisque $m > N$, on a $(z_1, ..., z_m)$ et $(z_2, ..., z_{m+1})$ liées dans $\mathbb{R}^N$. On dispose donc de $(a_1, ..., a_m), (b_2, ..., b_{m+1}) \in \mathbb{R}^m \setminus \{(0, ..., 0)\}$ tels que

$$\begin{aligned} a_1 z_1 + a_2 z_2 + ... + a_m z_m \qquad\qquad &= 0 \\ b_2 z_2 + ... + b_m z_m + b_{m+1} z_{m+1} &= 0 \end{aligned}$$

avec, quitte à réordonner les z_j, b_{m+1} *le plus petit des* b_j *non-nuls.*

Il existe une certaine combinaison linéaire de ces deux égalités qui donne une relation de la forme

$$\lambda_1 z_1 + ... + \lambda_m z_m + \lambda z_{m+1} = 0$$

avec λ_{m+1} le plus petit des λ_j non nuls et $\lambda_1 + ... + \lambda_{m+1} = 0$, à savoir:

- si $b_2 + ... + b_{m+1} \neq 0$,

$$a_1 z_1 + (a_2 - \delta b_2) z_2 + ... + (a_m - \delta b_m) z_m - \delta b_{m+1} z_{m+1} = 0$$

obtenu en effectuant la première ligne moins δ fois la deuxième, avec $\delta := (a_1 + ... + a_m)/(b_2 + ... + b_m + b_{m+1})$

- si $b_2 + ... + b_{m+1} = 0$,

$$b_2 z_2 + ... + b_m z_m + b_{m+1} z_{m+1} = 0.$$

Ces trois conditions sur cette relation permettent d'écrire:

$$z = z - \frac{\theta_{m+1}}{\lambda_{m+1}} \underbrace{(\lambda_1 z_1 + ... + \lambda_{m+1} z_{m+1})}_{=0} = \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\left(\theta_j - \frac{\theta_{m+1}}{\lambda_{m+1}} \lambda_j\right)}_{:=\theta'_j} z_j = \sum_{j=1}^{m} \theta'_j z_j$$

avec chaque $\theta'_j \geq 0$ (car λ_{m+1} est le plus petit des λ_j non nuls) et

$$\sum_{j=1}^{m} \theta'_j = \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \theta_j}_{=1} - \frac{\theta_{m+1}}{\lambda_{m+1}} \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j}_{=0} = 1.$$

Donc z s'écrit comme combinaison linéaire convexe de m éléments de B.

II.2.e)

- Soient $z = \sum_{j=1}^{m} \theta_j z_j$ et $z' = \sum_{j=1}^{p} \theta'_j z'_j$ des éléments de $\Gamma(B)$. Pour tout $\lambda \in [0,1]$ on a

$$\begin{aligned}(1-\lambda)z + \lambda z' &= (1-\lambda)(\theta_1 z_1 + \ldots + \theta_m z_m) + \lambda\big(\theta'_1 z'_1 + \ldots + \theta'_p z'_p\big) \\ &= (1-\lambda)\theta_1 z_1 + \ldots + (1-\lambda)\theta_m z_m + \lambda\theta'_1 z'_1 + \ldots \lambda\theta'_p z'_p\end{aligned}$$

  avec $(1-\lambda)\theta_1 + \ldots + (1-\lambda)\theta_m + \lambda\theta'_1 + \ldots + \lambda\theta'_p = (1-\lambda)(\theta_1 + \ldots + \theta_m) + \lambda\big(\theta'_1 + \ldots + \theta'_p\big) = 1 - \lambda + \lambda = 1$ et chaque $(1-\lambda)\theta_j$ et $\lambda\theta'_j$ positifs. Donc

$$\forall \lambda \in [0,1], (1-\lambda)z + \lambda z \in \Gamma(B)$$

  d'où $\Gamma(B)$ partie convexe de $\mathbb{R}^N$.

- Supposons B compact. Selon II.2.d, $\Gamma(B) = \Gamma_0(B)$ est l'image de l'application

$$\varphi : \begin{cases} B^{N+1} \times \Lambda & \longrightarrow \mathbb{R}^N \\ \Big(\big(z_j\big)_{1\le j\le N+1}, \big(\theta_j\big)_{1\le j\le N+1}\Big) & \longmapsto \sum_{j=1}^{N+1} \theta_j z_j \end{cases}$$

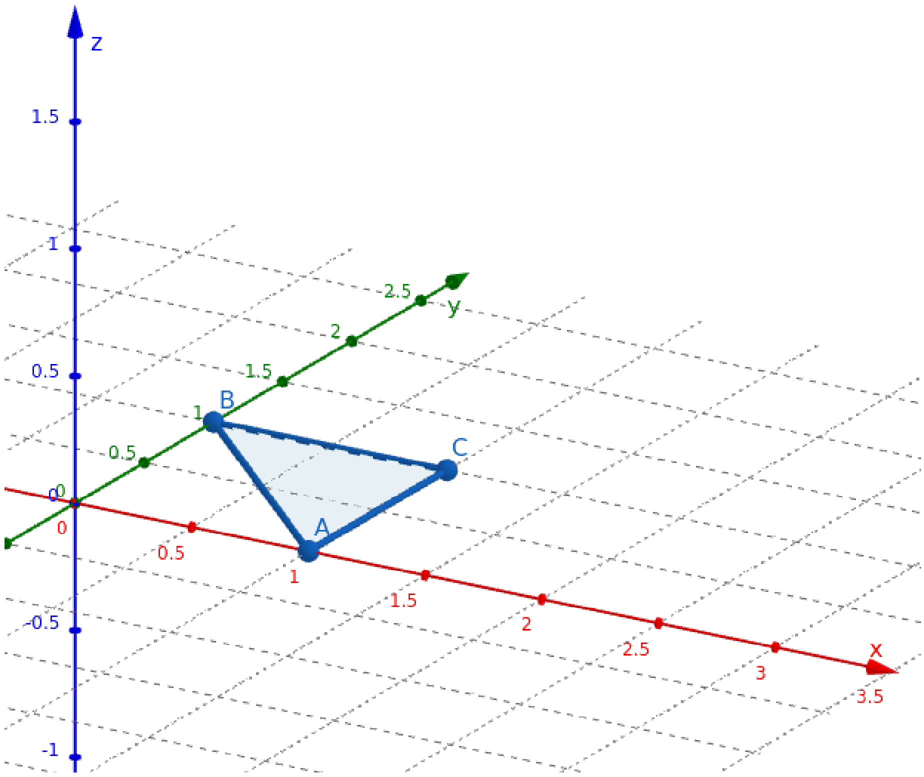
  avec $\Lambda := \left\{ \big(\theta_j\big)_{1\le j\le N+1} \in \mathbb{R}^{N+1} \,\middle|\, \theta_j \in [0,1], \sum_{j=1}^{N+1} \theta_j = 1 \right\}$.

  On a B compact par hypothèse. Λ est également compact car borné et fermé (car l'application $\big(\theta_j\big)_{1\le j\le N+1} \mapsto \Big(\theta_1, \ldots, \theta_j, \sum_{j=1}^{N+1} \theta_j\Big)$ est continue sur $\mathbb{R}^{N+1}$ et l'ensemble $[0,1] \times \ldots \times [0,1] \times \{1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^{N+2}$) et car $\mathbb{R}^{N+1}$ est de dimension finie. Ceci implique que le produit cartésien $B^{N+1} \times \Lambda$ est un compact de $\mathbb{R}^{2N+2}$.

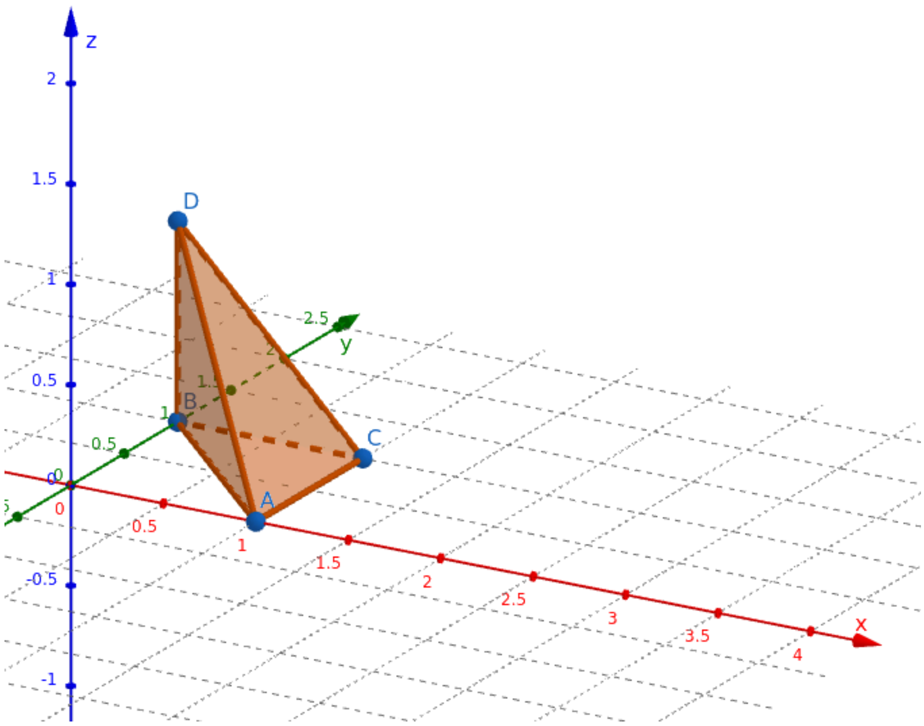
  L'application φ est continue sur $B^{N+1} \times \Lambda$ par opérations. On en déduit finalement que $\operatorname{im} \varphi = \Gamma(B)$ est un compact de $\mathbb{R}^N$.

II.2.f)

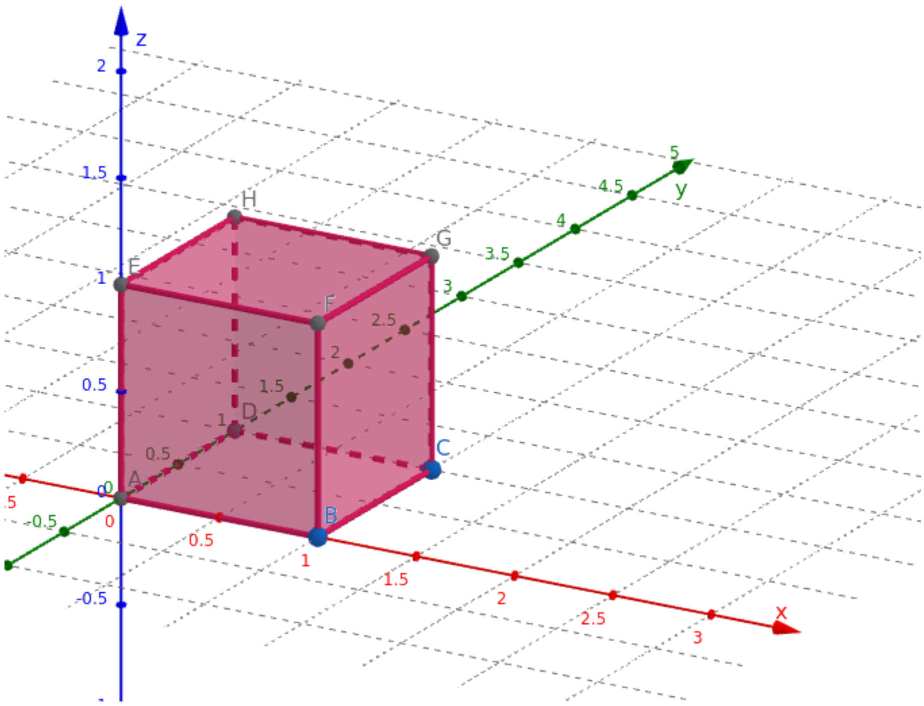
- Pour $B = \{e_1, e_2, e_1 + e_2\}$: $\Gamma(B)$ est la surface délimitée par triangle dont les points sont e_1, e_2 et $e_1 + e_2$. On ne peut pas exprimer B comme un $P_A(x)$ car B est non-vide donc si c'était le cas, $R_A(x)$ serait aussi non-vide et selon II.2.a, B devrait contenir $e_1 + e_2 + e_3$.



- Pour $B = \{e_1, e_2, e_1 + e_2, e_2 + e_3\}$: $\Gamma(B)$ est la pyramide de base le triangle précédent, passant par $e_2 + e_3$. Pour les mêmes raisons qu'au point précédent, B ne s'exprime pas comme un $P_A(x)$.



- Pour $B = P^N$: $\Gamma(B)$ est l'intérieur du cube dont les points sont donnés par P^N. On a vu dans II.2.b qu'il suffit que $x \in A$ pour que l'on ait $P^N = P_A(x)$.



II.2.g) Comme la fonction $x \mapsto |x|$ est continue, il suffit de montrer que $\Gamma(P_A(x))$ est un compact, ce qui découlerait de la compacité $P_A(x)$ si on utilise le résultat II.2.e. Or, $P_A(x)$ est inclus dans P^N, c'est donc un ensemble fini, donc fermé et borné dans l'espace $\mathbb{R}^N$ de dimension finie. Donc $P_A(x)$ est compact, et la borne inférieure $q(x, A) = \inf\{|z|, z \in \Gamma(P_A(x))\}$ est atteinte.

II.2.h) Comme A est non-vide, il existe $a \in A$ avec $a - x$ qui appartient à un certain nombre des hyperplans H_i, donc $R_A(x)$ est non-vide car il contient le vecteur de P^N qui appartient à la même intersection. Selon II.2.a, il faut alors que $z = e_1 + \ldots + e_N$ appartienne à $P_A(x)$. A fortiori, z appartient également à $\Gamma(P_A(x))$ et on a $|z| = \sqrt{1^2 + \ldots + 1^2} = \sqrt{N}$. Par définition, $q(x, A)$ minore $|z|$:

$$q(x, A) \leq \sqrt{N}.$$

Pour que $q(x, A) = 0$, il faut et il suffit, puisque la borne inférieure qui la définit est atteinte selon II.2.g, que

$$0 \in P_A(x)$$

(ce qui équivaut aussi l'une des deux autres propriétés équivalentes de la question II.2.b).

II.2.i) Posons $q'(x, A) := \inf\{|z|, z \in \Gamma(R_A(x))\}$.

- Puisque $R_A(x)$ est inclus dans $P_A(x)$ (conséquence immédiate de la définition), on a alors $\Gamma\left(R_{A(x)}\right) \subset \Gamma(P_A(x))$ donc on a déjà $q(x, A) \leq q'(x, A)$.
- Soit $z = \sum_{j=1}^m \theta_j z_j$ un élément de $\Gamma(P_A(x))$. Montrons que $|z| \geq q'(x, A)$. On a

$$|z|^2 = \sum_{i=1}^N \langle z, e_i \rangle^2 = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^m \theta_j \langle z_j, e_i \rangle \right)^2$$

  et selon II.2.a, pour tout $1 \leq j \leq m$, il existe $z'_j \in R_A(x)$ tel que $z'_j \leq z_j$. Donc en posant $z' = \sum_{j=1}^m \theta_j z'_j \in \Gamma(R_A(x))$,

$$|z|^2 = \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{m}\theta_j \underbrace{\langle z_j, e_i\rangle}_{\geq \langle z_j', e_i\rangle \geq 0}\right)^2 \geq \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{m}\theta_j\langle z_j', e_i\rangle\right)^2 = |z'|^2 \geq q'(x,A)^2$$

d'où $|z| \geq q'(x,A)$. Ceci est vrai pour tout $z \in \Gamma(P_A(x))$ donc $q(x,A) \geq q'(x,A)$.

Finalement, $q(x,A) = q'(x,A) = \inf\{|z|, z \in \Gamma(R_A(x))\}$.

II.2.j)

- Considérons pour commencer $z \in R_A(x)$ et montrons que $2K|z| \geq d(x,A)$. On étalera à $\Gamma(R_A(x))$ par la suite. Il existe $a \in A$ tel que $\forall 1 \leq i \leq N, z \in H_i \iff a - x \in H_i$. On remarque que puisque les coordonnées de z sont dans $\{0,1\}$, $|z|^2 = \sum_{i=1}^{N}\langle z, e_i\rangle^2$ est le nombre de composantes non-nulles de z, qui est alors aussi le nombre de composantes non-nulles de $a - x$. On trouve donc:

$$|a-x|^2 = \sum_{i=1}^{N}\langle a-x, e_i\rangle^2 \leq |z|^2|a-x|^2|e_i|^2$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur chacun des termes $\langle a-x, e_i\rangle^2$ qui sont non-nuls, ceux-ci étant au nombre de $|z|^2$. En majorant $|a-x|$ par $|a|+|x| \leq 2K$, et avec $|e_i| = 1$, on a finalement

$$\forall z \in R_A(x), \exists a \in A, \quad d(x,A) \leq |a-x| \leq 2K|z|.$$

- Soit $z = \sum_{j=1}^{m}\theta_j z_j \in \Gamma(R_A(x))$. Pour tout $1 \leq j \leq m$, on applique le point précédent: soit $a_j \in A$ tel que $z_j \in R_A(x)$ vérifie $|a_j - x| \leq 2K|z_j|$. Posons $a := \sum_{j=1}^{m}\theta_j a_j$. Alors

$$\begin{aligned}
|a-x|^2 &= \left|\sum_{j=1}^{m}\theta_j a_j - \sum_{j=1}^{m}\theta_j x\right|^2 = \left|\sum_{j=1}^{m}\theta_j(a_j - x)\right|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{m}\theta_j^2 \underbrace{|a_j - x|^2}_{\leq (2K|z_j|)^2} + 2\sum_{1\leq i<j\leq m}\theta_i\theta_j \underbrace{\langle a_i - x, a_j - x\rangle}_{\text{(par Cauchy-Schwarz) } \leq |a_i - x||a_j - x| \leq (2K)^2|z_i||z_j|} \\
&\leq (2K)^2\left(\sum_{j=1}^{m}\theta_j^2|z_j|^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq m}\theta_i\theta_j|z_i||z_j|\right) = (2K)^2|z|^2.
\end{aligned}$$

  Or, A est convexe, donc on a $a \in A$ et finalement on a établi

$$\forall z \in \Gamma(R_A(x)), \quad d(x,A) \leq |x - A| \leq 2K|z|.$$

Selon II.2.i on trouve alors

$$d(x,A) \leq 2Kq(x,A)$$

comme voulu.

II.2.k) La majoration de la question II.2.i montre que (53) implique (40) et on a vu dans II.1 que (40) implique (37).

II.3.a) Pour tout $A \subset Q^N$ convexe, en utilisant II.2.h, qui indique que si $x \in A$ alors $q(x,A) = 0$ et qui indique aussi $q(x,A) \leq \sqrt{N} = 1$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\exp(\gamma q(X,A)^2)] &= \mathbb{E}\Big[\exp(\gamma q(X,A)^2)\mathbf{1}_{X\in A} + \exp(\gamma q(X,A)^2)\mathbf{1}_{X\notin A}\Big] \\
&\leq \mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{X\in A} + e^{\gamma}\mathbf{1}_{X\notin A}\Big] = \mathbb{P}(X \in A) + e^{\gamma}\mathbb{P}(X \notin A)
\end{aligned}$$

Si on note $p := \mathbb{P}(X \in A)$ alors

$$\mathbb{P}(X \in A)\mathbb{E}[\exp(\gamma q(X,A)^2)] \leq p(p + e^\gamma(1-p)) = p^2 + e^\gamma p(1-p)$$

Or,

$$p^2 + e^\gamma p(1-p) \leq 1 \Longleftrightarrow e^\gamma \leq \frac{1-p^2}{p(1-p)} = \frac{(1-p)(1+p)}{p(1-p)} = \frac{1+p}{p} = 1 + \frac{1}{p}$$

Car $p \leq 1$ on a $1 + \frac{1}{p} \leq 2$ et on voit donc qu'il suffit que $e^\gamma \leq 2$ (i.e. $\gamma \leq \ln(2)$) pour que (53) soit vérifiée indépendamment de la variable X et de A.

II.3.b)

- Supposons $\overline{z} \in P_{A_{x_N}}(\overline{x})$. Il existe $\overline{a} \in A_{x_N}$ vérifiant (43). Si on pose $a = (\overline{a}, x_N)$ alors $a \in A$ par définition de A_{x_N}. Comme $z := (\overline{z}, 0)$ a les mêmes coordonnées que $\overline{z}$ sur $e_1, ..., e_{N-1}$, et pareil pour $a - x$ et $\overline{a} - \overline{x}$, on conserve

$$\forall 1 \leq i \leq N-1, \quad z \in H_i \Longrightarrow a - x \in H_i.$$

Pour $i = N$, on a $\langle a - x, e_N \rangle = x_N - x_N = 0$ donc $a - x \in H_N$ et l'implication $z \in H_N \Longrightarrow a - x \in H_N$ est toujours vraie. Ceci montre que $z = (\overline{z}, 0) \in P_A(x)$.
- Supposons $\overline{z} \in P_{\overline{A}}(\overline{x})$. Il existe $\overline{a} \in \overline{A}$ vérifiant (43). Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a := (\overline{a}, \theta)$ appartienne à A (c'est la définition de $\overline{A}$). Pour les mêmes raisons qu'au point précédent, si $z := (\overline{z}, 1)$ alors

$$\forall 1 \leq i \leq N-1, \quad z \in H_i \Longrightarrow a - x \in H_i.$$

Enfin, on a $z \in H_N \Longrightarrow a - x \in H_N$ car $\langle z, H_N \rangle = 1 \neq 0$ donc $z \notin H_N$ et l'implication est automatiquement vraie. Donc $z = (\overline{z}, 1) \in P_A(x)$.

II.3.c) Soient $\overline{z_1} \in P_{A_{x_N}}(\overline{x})$ et $\overline{z_2} \in P_{\overline{A}}(\overline{x})$. Selon II.3.b, on a $z_1 := (\overline{z_1}, 0)$ et $z_2 := (\overline{z_2}, 1)$ éléments de $P_A(x)$. Pour tout $\lambda \in [0,1]$:

$$\lambda z_1 + (1-\lambda) z_2 \in \Gamma(P_A(x))$$

donc

$$|\lambda z_1 + (1-\lambda) z_2|^2 \geq q(x,A)^2.$$

Or,

$$\begin{aligned} |\lambda z_1 + (1-\lambda) z_2|^2 &= |(\lambda \overline{z_1} + (1-\lambda)\overline{z_2}, 1-\lambda)|^2 \\ &= |\lambda \overline{z_1} + (1-\lambda)\overline{z_2}|^2 + (1-\lambda)^2 \\ &\leq \lambda^2 \ |\overline{z_1}|^2 + (1-\lambda)^2 \ |\overline{z_2}|^2 + (1-\lambda)^2 \\ &\overset{\lambda \in [0,1] \text{ donc } \lambda^2 \leq \lambda}{\leq} \lambda \ |\overline{z_1}|^2 + (1-\lambda) \ |\overline{z_2}|^2 + (1-\lambda)^2. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\forall \overline{z_1} \in P_{A_{x_N}}(\overline{x}), \overline{z_2} \in P_{\overline{A}}(\overline{x}), \quad q(x,A)^2 \leq \lambda \ |\overline{z_1}|^2 + (1-\lambda) \ |\overline{z_2}|^2 + (1-\lambda)^2$$

d'où

$$q(x,A)^2 \leq \lambda q\left(\overline{x}, A_{x_N}\right)^2 + (1-\lambda) q\left(\overline{x}, \overline{A}\right)^2 + (1-\lambda)^2.$$

II.3.d) On vérifie que $\left(\Omega, \mathcal{A}, \overline{\mathbb{P}}\right)$ est un espace probabilisé ($\overline{\mathbb{P}}$ est la loi conditionnelle associée à $\mathbb{P}$ et l'évènement $(X_N = x_N)$) et que la fonction

$$\overline{\mathbb{E}} : Z \mapsto \frac{1}{\mathbb{P}(X_N = x_N)} \mathbb{E}\left[Z \mathbf{1}_{X_N = x_N}\right]$$

définie par l'énoncé coïncide avec l'espérance induite par l'espace $\left(\Omega, \mathcal{A}, \overline{\mathbb{P}}\right)$: si Z est une variable aléatoire sur cet espace, alors son espérance par rapport à $\overline{\mathbb{P}}$ a pour expression

$$\sum_{z \in Z(\Omega)} z \overline{\mathbb{P}}(Z = z) = \sum_{z \in Z(\Omega)} z \frac{\mathbb{P}((Z = z) \cap (X_N = x_N))}{\mathbb{P}(X_N = x_N)}$$

et on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[Z \mathbf{1}_{X_N = x_N}\right] &= \sum_{z \in Z(\Omega)} z \times 1 \times \mathbb{P}\Big((Z = z) \cap \Big(\mathbf{1}_{X_N = x_N} = 1\Big)\Big) + \sum_{z \in Z(\Omega)} z \times 0 \times \mathbb{P}\Big((Z = z) \cap \Big(\mathbf{1}_{X_N = x_N} = 0\Big)\Big) \\ &= \sum_{z \in Z(\Omega)} z \mathbb{P}\Big((Z = z) \cap \Big(\mathbf{1}_{X_N = x_N} = 1\Big)\Big) \end{aligned}$$

donc

$$\sum_{z \in Z(\Omega)} z \overline{\mathbb{P}}(Z = z) = \frac{1}{\mathbb{P}(X_N = x_N)} \mathbb{E}\left[Z \mathbf{1}_{X_N = x_N}\right].$$

On peut donc appliquer H_{N-1} sur cet espace, de la manière suivante:

- On a

$$\overline{\mathbb{P}}\left(\overline{X} \in \overline{A}\right) \overline{\mathbb{E}}[\exp(\gamma_0 q(X, A)^2)] = \overline{\mathbb{P}}\left(\overline{X} \in \overline{A}\right) \frac{\mathbb{E}\left[\exp(\gamma_0 q(X, A)^2) \mathbf{1}_{X_N = x_n}\right]}{\mathbb{P}(X_N = x_N)}$$

Pour tout $\omega \in \Omega$, si $X_{N(\omega)} = x_N$ alors selon II.3.c avec $\lambda = 0$, $q(X(\omega), A)^2 \leq 1 + q\left(\overline{X(\omega)}, \overline{A}\right)^2$. Donc

$$\mathbb{E}\left[\exp(\gamma_0 q(X, A)^2) \mathbf{1}_{X_N = x_n}\right] \leq \mathbb{E}\left[\exp\left(\gamma_0 \left(1 + q\left(\overline{X(\omega)}, \overline{A}\right)^2\right)\right) \mathbf{1}_{X_N = x_n}\right]$$

d'où

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{P}}\left(\overline{X} \in \overline{A}\right) \overline{\mathbb{E}}[\exp(\gamma_0 q(X, A)^2)] &\leq \overline{\mathbb{P}}\left(\overline{X} \in \overline{A}\right) \overline{\mathbb{E}}\left[\exp\left(\gamma_0 \left(1 + q\left(\overline{X(\omega)}, \overline{A}\right)^2\right)\right)\right] \\ &= e^{\gamma_0} \overline{\mathbb{P}}\left(\overline{X} \in \overline{A}\right) \overline{\mathbb{E}}\left[\exp\left(\gamma_0 q\left(\overline{X(\omega)}, \overline{A}\right)^2\right)\right] \end{aligned}$$

Selon H_{N-1}, en vérifiant que si A est convexe alors $\overline{A}$ aussi (si $(\overline{a}, \alpha)$, $\left(\overline{b}, \beta\right)$ appartiennent à A et $\lambda \in [0,1]$ alors $(1-\lambda)(\overline{a}, \alpha) + \lambda\left(\overline{b}, \beta\right) = \left((1-\lambda)\overline{a} + \lambda \overline{b}, (1-\lambda)\alpha + \lambda\beta\right) \in A$ donc $(1-\lambda)\overline{a} + \lambda \overline{b} \in \overline{A}$), on peut ainsi majorer:

$$\overline{\mathbb{P}}\left(\overline{X} \in \overline{A}\right) \overline{\mathbb{E}}[\exp(\gamma_0 q(X, A)^2)] \leq e^{\gamma_0}.$$

- En majorant pour $\lambda \in [0, 1]$ quelconque, lorsque $\omega \in \Omega$ vérifie $X_{N(\omega)} = x_N$, selon II.3.c:

$$q(X(\omega), A)^2 \leq \lambda q\left(\overline{X(\omega)}, A_{x_N}\right)^2 + (1-\lambda) q\left(\overline{X(\omega)}, \overline{A}\right)^2 + (1-\lambda)^2$$

on obtient avec des arguments similaires

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{E}}[\exp(\gamma_0 q(X, A)^2)] &\leq \overline{\mathbb{E}}\left[\exp\left(\gamma_0 \left(\lambda q\left(\overline{X}, A_{x_N}\right)^2 + (1-\lambda) q\left(\overline{X}, \overline{A}\right)^2 + (1-\lambda)^2\right)\right)\right] \\ &\leq e^{\gamma_0 (1-\lambda)^2} \overline{\mathbb{E}}\left[\exp\left(\gamma_0 \left(\lambda q\left(\overline{X}, A_{x_N}\right)^2 + (1-\lambda) q\left(\overline{X}, \overline{A}\right)^2\right)\right)\right] \end{aligned}$$

puis en utilisant l'inégalité de Hölder

$$\overline{\mathbb{E}}[\exp(\gamma_0 q(X,A)^2)] \leq e^{\gamma_0(1-\lambda)^2}\overline{\mathbb{E}}\left[\exp\left(\gamma_0 q\left(\overline{X}, A_{x_N}\right)^2\right)\right]^{\lambda}\overline{\mathbb{E}}\left[\exp\left(\gamma_0 q\left(\overline{X}, \overline{A}\right)^2\right)\right]^{1-\lambda}.$$

On multiplie par $\overline{\mathbb{P}}\left(\overline{X} \in A_{x_N}\right)^{\lambda}\overline{\mathbb{P}}\left(\overline{X} \in \overline{A}\right)^{1-\lambda}$ et on applique H_{N-1} ($\overline{A}$ est convexe, on l'a vérifié plus haut, et A_{x_N} aussi car si $(\overline{a}, x_N)$, $\left(\overline{b}, x_N\right)$ appartiennent à A et $\lambda \in [0,1]$ alors $(1-\lambda)(\overline{a}, x_N) + \lambda\left(\overline{b}, x_N\right) = \left((1-\lambda)\overline{a} + \lambda\overline{b}, x_N\right) \in A$ donc $(1-\lambda)\overline{a} + \lambda\overline{b} \in A_{x_N}$):

$$\overline{\mathbb{P}}\left(\overline{X} \in A_{x_N}\right)^{\lambda}\overline{\mathbb{P}}\left(\overline{X} \in \overline{A}\right)^{1-\lambda}\overline{\mathbb{E}}[\exp(\gamma_0 q(X,A)^2)] \leq e^{\gamma_0(1-\lambda)^2}$$

C'est l'inégalité recherchée.

II.3.e) Sans difficulté. On injecte l'expression de r dans l'inégalité (64).

II.3.f)

- Si $\overline{\mathbb{P}}\left(\overline{X} \in A_{x_N}\right) > 0$, i.e. $r > 0$ alors le résultat admis (69) s'applique (on a toujours $r \leq 1$ car $A_{x_N} \subset \overline{A}$) et avec II.3.e on a

$$\forall \lambda \in [0,1], \quad \overline{\mathbb{P}}\left(\overline{X} \in \overline{A}\right)\overline{\mathbb{E}}[\exp(\gamma_0 q(X,A)^2)] \leq \frac{1}{r^{\lambda} e^{-\gamma_0(1-\lambda)^2}} \leq \frac{1}{\frac{1}{2-r}} = 2 - r$$

- Si $\overline{\mathbb{P}}\left(\overline{X} \in A_{x_N}\right) = 0$ i.e. $r = 0$: selon la première inégalité de II.3.d,

$$\overline{\mathbb{P}}\left(\overline{X} \in \overline{A}\right)\overline{\mathbb{E}}[\exp(\gamma_0 q(X,A)^2)] \leq e^{\gamma_0} = e^{\frac{1}{4}} \leq \frac{1}{e^{-\frac{1}{4}}} \leq \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3} < 2 = 2 - r$$

II.3.g) La clé pour cette question est de se rappeler que les $X_1, ..., X_N$ sont mutuellement indépendantes. Alors, le lemme des coalitions indique que $\overline{X} = (X_1, ..., X_{N-1})$ et X_N sont deux variables indépendantes. Par conséquent, $\overline{\mathbb{P}}\left(\overline{X} \in \overline{A}\right) = \mathbb{P}\left(\overline{X} \in \overline{A} \,\middle|\, X_N = x_N\right) = \mathbb{P}\left(\overline{X} \in \overline{A}\right)$. L'inégalité (71) est alors obtenue en injectant l'expression de R dans (70) et en réécrivant $\overline{\mathbb{E}}$ avec sa définition.

II.3.h)

- Si (66) n'est pas vérifié alors selon le raisonnement de II.3.g cela signifie que $\mathbb{P}\left(\overline{X} \in \overline{A}\right) = 0$. Mais $(X \in A) \subset \left(\overline{X} \in \overline{A}\right)$ donc cela implique $\mathbb{P}(X \in A) = 0$. L'inégalité (73) est alors triviale.
- Si (66) est vérifié, alors (71) établit pour tout $x_N \in X_N(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \in A)\mathbb{E}\left(\exp(\gamma_0 q(X,A))^2 \mathbf{1}_{X_N = x_N}\right) &\leq R\left(2 - \frac{\mathbb{P}\left(\overline{X} \in A_{x_N} \,\middle|\, X_N = x_N\right)}{\mathbb{P}\left(\overline{X} \in \overline{A}\right)}\right)\mathbb{P}(X_N = x_N) \\
&= R\left(2\mathbb{P}(X_N = x_N) - \frac{\mathbb{P}\left(\overline{X} \in A_{x_N} \,\middle|\, X_N = x_N\right)\mathbb{P}(X_N = x_N)}{\mathbb{P}\left(\overline{X} \in \overline{A}\right)}\right) \\
&\leq R\left(2 - \frac{\mathbb{P}\left(\overline{X} \in A_{x_N} \,\middle|\, X_N = x_N\right)\mathbb{P}(X_N = x_N)}{\mathbb{P}\left(\overline{X} \in \overline{A}\right)}\right)
\end{aligned}$$

Il suffit alors de sommer sur tous les $x_N \in X_N(\Omega)$ (ils sont en nombre fini):

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \in A)\mathbb{E}\Big(\exp(\gamma_0 q(X,A))^2\Big) &= \sum_{x_N \in X_N(\Omega)} \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{E}\Big(\exp(\gamma_0 q(X,A))^2 \mathbf{1}_{X_N = x_N}\Big) \\
&\leq \sum_{x_N \in X_N(\Omega)} R\left(2 - \frac{\mathbb{P}\Big(\overline{X} \in A_{x_N} \;\Big|\; X_N = x_N\Big)\mathbb{P}(X_N = x_N)}{\mathbb{P}\Big(\overline{X} \in \overline{A}\Big)}\right) \\
&= R\left(2 - \frac{1}{\mathbb{P}\Big(\overline{X} \in \overline{A}\Big)} \sum_{x_N \in X_N(\Omega)} \mathbb{P}\Big(\overline{X} \in A_{x_N} \;\Big|\; X_N = x_N\Big)\mathbb{P}(X_N = x_N)\right) \\
&= R\left(2 - \frac{\mathbb{P}\Big(\overline{X} \in A_{x_N}\Big)}{\mathbb{P}\Big(\overline{X} \in \overline{A}\Big)}\right) = R(2 - R).
\end{aligned}$$

Une fois (73) établi, il suffit de remarquer que $t \mapsto t(2-t)$ est, en tant que fonction polynomiale de degré 2, majorée par la valeur de son maximum, en $\frac{0+2}{2} = 1$, qui vaut $1(2-1) = 1$. Par conséquent, on a

$$\mathbb{P}(X \in A)\mathbb{E}\Big(\exp(\gamma_0 q(X,A))^2\Big) \leq 1$$

c'est-à-dire H_N.

II.3.i) On pose $f : \lambda \mapsto r^\lambda e^{-\gamma(1-\lambda)^2}(2-r)$, et on essaie de montrer que $\sup_{[0,1]} f \geq 1$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par opérations et on a

$$f'(\lambda) = (\ln r + 2\gamma(1-\lambda))f(\lambda),$$

de sorte que

$$f'(\lambda) > 0 \iff \lambda < 1 + \frac{\ln r}{2\gamma}.$$

Ainsi f admet un unique maximum sur $\mathbb{R}$ en $1 + \frac{\ln r}{2\gamma}$.

- Si $1 + \frac{\ln r}{2\gamma} < 0$ alors le maximum de f sur $[0,1]$ est en 0 et vaut

  $$\sup_{[0,1]} f = f(0) = e^{-\gamma}(2-r).$$

  L'inégalité $1 + \frac{\ln r}{2\gamma} < 0$ donne de plus $r < e^{-2\gamma}$ donc $e^{-\gamma}(2-r) > e^{-\gamma}\big(2 - e^{-2\gamma}\big)$. On pose et étudie alors $g : t \mapsto t(2-t^2) = t(2-t)(2+t)$ sur $\left[\frac{1}{\gamma_0}, 1\right]$ et on trouve que g est minorée par sa valeur en $\frac{1}{\gamma_0}$ et en 1 sur $\left[\frac{1}{\gamma_0}, 1\right]$. On a:

  $$g\left(\frac{1}{\gamma_0}\right) = g\big(e^{-1/4}\big) = e^{-1/4}\big(2 - e^{-1/2}\big) \approx 1.085 > 1$$

  (sans calculatrice??) et

  $$g(1) = 1.$$

  Donc $g(e^{-\gamma}) \geq 1$ d'où

  $$\sup_{[0,1]} f = f(0) \geq g(e^{-\gamma}) \geq 1$$

- Si $1 + \frac{\ln r}{2\gamma} > 0$ alors le maximum de f sur $[0,1]$ est atteint en $1 + \frac{\ln r}{2\gamma}$ et il vaut

  $$\sup_{[0,1]} f = f\left(1 + \frac{\ln r}{2\gamma}\right) = (2-r)\exp\left(\frac{\ln^2 r}{2\gamma} + \ln r - \gamma\frac{\ln^2 r}{4\gamma^2}\right).$$

Or

$$1+\frac{\ln r}{2\gamma}>0 \Longleftrightarrow r>e^{-2\gamma}$$

donc

$$f\left(1+\frac{\ln r}{2\gamma}\right)>(2-r)\exp\left(\frac{(2\gamma)^2}{2\gamma}-2\gamma-\gamma\frac{\ln^2 r}{4\gamma^2}\right)=(2-r)\exp\left(-\gamma\frac{\ln^2 r}{4\gamma^2}\right)$$

Comme $-1<\frac{\ln r}{2\gamma}<0$ on a $\frac{\ln^2 r}{(2\gamma)^2}<1$ et donc

$$f\left(1+\frac{\ln r}{2\gamma}\right)>(2-r)e^{-\gamma}$$

Enfin $2\gamma<-\ln r$ donc $e^{-\gamma}>e^{\frac{\ln r}{2}}=\sqrt{r}$, donc

$$\sup_{[0,1]} f=f\left(1+\frac{\ln r}{2\gamma}\right)>(2-r)\sqrt{r}=g(\sqrt{r})\geq 1$$

car $e^{-\gamma_0}\leq e^{-\gamma}<\sqrt{r}\leq 1$.

Finalement

$$\sup_{\lambda\in[0,1]} r^\lambda e^{-\gamma(1-\lambda)^2}\geq\frac{1}{2-r}$$

comme attendu.