

POINTS ENTIERS DANS UN POLYTOPE



Nous ne sommes pas professeurs de mathématiques. S'il y a une erreur, vous pouvez nous contacter via les adresses suivantes : andre.chambrillon@ens.psl.eu et yanis.hedjem@ens.psl.eu.

Nous avons cherché à détailler la résolution des questions et à utiliser des arguments élémentaires dans la mesure du possible (sacrés polytopes...). Les questions 27, 38, 40, 42 et 45 sont moins détaillées. Nos solutions peuvent bien sûr ne pas être optimales.

PARTIE PRÉLIMINAIRE.

1. On montre que les fonctions quasi-polynomiales $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{C}$ forment un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{C}$.
 - * Clairement, la fonction nulle $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{C}$ est quasi-polynomiale.
 - * Soit $P, Q : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{C}$ quasi-polynomiales et $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$. Notons, si $n \in \mathbf{Z}$:

$$P(n) = \sum_{i=0}^k c_i(n)n^i \quad \text{et} \quad Q(n) = \sum_{j=0}^{\ell} d_j(n)n^j,$$

avec les $c_i, d_j : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{C}$ périodiques. Par symétrie, supposons que $k \leq \ell$. Alors, si $n \in \mathbf{Z}$:

$$\lambda P(n) + \mu Q(n) = \sum_{i=0}^k (\lambda c_i(n) + \mu d_i(n)) \cdot n^i + \sum_{i=k+1}^{\ell} \mu d_i(n) \cdot n^i.$$

Les μd_i sont périodiques, et pour $i \leq k$ donné, en notant m_1 une période de c_i et m_2 une période de d_i , la fonction $\lambda c_i + \mu d_i$ est $m_1 m_2$ -périodique, ce qui prouve que $\lambda P + \mu Q$ est quasi-polynomiale.

2. Notons $P(n) = \sum_{i=0}^k c_i(n)n^i$ et $Q(n) = \sum_{j=0}^{\ell} d_j(n)n^j$ comme ci-dessus et fixons $n \in \mathbf{Z}$. Introduisons les polynômes :

$$A_n = \sum_{i=0}^k c_i(n)X^i \quad \text{et} \quad B_n = \sum_{j=0}^{\ell} d_j(n)X^j.$$

Il existe $m \in \mathbf{N}^*$ tel que les c_i et d_j soient m -périodiques (il suffit de choisir des périodes pour chacun des c_i et d_j puis de prendre pour m leur produit). Si $p \in \mathbf{N}$ est assez grand, $n + pm \in \mathbf{N}$ et la m -périodicité des c_i et d_j donne que :

$$A_n(n + pm) = P(n + pm) = Q(n + pm) = B_n(n + pm),$$

Les polynômes A_n et B_n coïncidant en une infinité de points, ils sont égaux. Ceci vaut pour tout $n \in \mathbf{Z}$, donc $k = \ell$ et $c_i(n) = d_i(n)$ pour tous $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$ et $n \in \mathbf{Z}$: ainsi, $P = Q$.

REMARQUE.

Voici une autre solution. Quitte à rajouter des coefficients nuls, supposons $k = \ell$. Notons $e_i = c_i - d_i$ pour tout $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$, de sorte que $P(n) - Q(n) = \sum_{i=0}^k e_i(n)n^i = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Fixons ensuite $n \in \mathbf{Z}$. Si m est une période commune aux e_i , il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $n + pm \in \mathbf{N}$, et par m -périodicité,

$\sum_{i=0}^k e_i(n)(n + \ell m)^i = 0$ pour $p \leq \ell \leq p + k$. Dit autrement :

$$\begin{pmatrix} 1 & n + pm & \cdots & (n + pm)^k \\ 1 & n + (p + 1)m & \cdots & (n + (p + 1)m)^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & n + (p + k)m & \cdots & (n + (p + k)m)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_0(n) \\ e_1(n) \\ \vdots \\ e_k(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'inversibilité d'une matrice de VANDERMONDE de paramètres $n + pm, \dots, n + (p + k)m$ entraîne que $e_0(n) = \dots = e_k(n) = 0$, et ce pour tout $n \in \mathbf{Z}$. Ainsi, $P = Q$.

- 3. • (\Rightarrow) Supposons P quasi-polynomiale et notons $P(n) = \sum_{i=0}^n c_i(n)n^i$. Notons $m \in \mathbf{N}^*$ une période commune aux c_i . Si $j \in \llbracket 0, m - 1 \rrbracket$ et $n \in \mathbf{Z}$ est congru à j modulo m , on a $c_i(n) = c_i(j)$ pour tout $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$ puis :

$$P(n) = P_j(n) \quad \text{où} \quad P_j = \sum_{i=0}^k c_i(j)X^i.$$

- (\Leftarrow) Supposons donnés $P_0, \dots, P_{m-1} \in \mathbf{C}[X]$ tels que $P(n) = P_j(n)$ pour tous $j \in \llbracket 0, m - 1 \rrbracket$ et $n \in \mathbf{Z}$ congru à j modulo m . Quitte à rajouter des coefficients nuls, on peut noter pour un $k \in \mathbf{N}$:

$$\forall j \in \llbracket 0, m - 1 \rrbracket, \quad P_j = \sum_{i=0}^k c_i(j)X^i.$$

Notons $c_i : n \in \mathbf{Z} \mapsto c_i(n \bmod m)$ pour tout $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$. Ce sont des fonctions m -périodiques. Si $j \in \llbracket 0, m - 1 \rrbracket$ et $n \in \mathbf{Z}$ est congru à j modulo m :

$$P(n) = P_j(n) = \sum_{i=0}^k c_i(j)n^i = \sum_{i=0}^k c_i(n)n^i.$$

- 4. • Si $x \in] - 1, 1[$, par un développement en série géométrique et une sommation par paquets (une justification de cette sommation est donnée plus généralement à la question 6) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1 - \omega x)^p} &= \left(\sum_{k_1=0}^{+\infty} (\omega x)^{k_1} \right) \cdots \left(\sum_{k_p=0}^{+\infty} (\omega x)^{k_p} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k_1 + \dots + k_p = n} (\omega x)^{k_1} \cdots (\omega x)^{k_p} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_p(n) \omega^n x^n, \end{aligned}$$

où $\alpha_p(n)$ est le nombre de p -uplets $(k_1, \dots, k_p) \in \mathbf{N}^p$ tels que $k_1 + \dots + k_p = n$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad R(n) = \omega^n \cdot \alpha_p(n).$$

- Déterminons $\alpha_p(n)$. On a une bijection qui à $(k_1, \dots, k_p) \in \mathbf{N}^k$ tel que $k_1 + \dots + k_p = n$ associe le $(p - 1)$ -uplet strictement croissant $(k_1 + 1, k_1 + k_2 + 2, \dots, k_1 + \dots + k_{p-1} + (p - 1))$ dans $\llbracket 1, n + p - 1 \rrbracket$, ce qui donne :

$$\alpha_p(n) = \binom{n + p - 1}{p - 1} = \frac{(n + 1)(n + 2) \cdots (n + p - 1)}{(p - 1)!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{p-1}}{(p - 1)!}.$$

Ceci montre dans un premier temps que α_p est polynomiale, puis que son degré vaut $p - 1$ et que son coefficient dominant vaut $1/(p - 1)!$.

- R est donc quasi-polynomiale, de degré $p - 1$ et de coefficient dominant $n \mapsto \omega^n / (p - 1)!$.

REMARQUE.

Voici une façon de faire qui ne repose pas sur une formule explicite de $\alpha_p(n)$. Si $n \in \mathbf{N}$, choisir $(k_0, \dots, k_p) \in \mathbf{N}^{p+1}$ tel que $k_0 + \dots + k_p = n$ revient d'abord à choisir $k_0 \in \llbracket 0, n \rrbracket$ puis à choisir $(k_1, \dots, k_p) \in \mathbf{N}^p$ tel que $k_1 + \dots + k_p = n - k_0$, donc :

$$\alpha_{p+1}(n) = \sum_{k_0=0}^n \alpha_p(n - k_0) = \sum_{j=0}^n \alpha_p(j).$$

Moyennant une récurrence sur p , on montre que α_p est polynomiale, de degré $p - 1$ et de coefficient dominant $1/(p - 1)!$. Si en effet ceci est vrai à un rang p , alors $\alpha_p(j) \sim j^{p-1}/(p - 1)!$ quand $j \rightarrow +\infty$ puis $\alpha_{p+1}(n) \sim \sum_{j=0}^n \frac{j^{p-1}}{(p-1)!} \sim \frac{n^p}{p!}$ quand $n \rightarrow +\infty$ par sommation des relations de comparaison puis par comparaison série-intégrale.

1. — DÉCOMPOSITION D'UN ENTIER EN PARTIES.

5. Si $(n_1, \dots, n_k) \in P(n)$, nécessairement $n_1, \dots, n_k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, et donc $P(n) = O(n^k)$. Le rayon de convergence de F est donc supérieur ou égal à 1.

REMARQUE.

Ce rayon est en fait égal à 1, puisque $P(n) \geq 1$ dès que n est un multiple de $a_1 \cdots a_k$.

6. Soit $x \in] - 1, 1[$. Notons $\mathcal{P}_n = \{(n_1, \dots, n_k) \in \mathbf{N}^k \mid n_1 a_1 + \dots + n_k a_k = n\}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$; ils forment un recouvrement disjoint de \mathbf{N}^k . Il s'agit essentiellement d'utiliser des développements en séries géométriques puis d'effectuer un produit de CAUCHY, justifions-les :

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^k \frac{1}{1 - x^{a_i}} &\leq \prod_{i=1}^k \frac{1}{1 - |x|^{a_i}} = \prod_{i=1}^k \sum_{n_i \in \mathbf{N}} |x|^{n_i a_i} \\ &= \sum_{(n_1, \dots, n_k) \in \mathbf{N}^k} |x|^{n_1 a_1 + \dots + n_k a_k} && \text{(FUBINI positif itéré)} \\ &= \sum_{n \in \mathbf{N}} \sum_{(n_1, \dots, n_k) \in \mathcal{P}_n} |x|^{n_1 a_1 + \dots + n_k a_k} && \text{(Somme par paquets)} \\ &= \sum_{n \in \mathbf{N}} P(n) |x|^n = F(|x|) < +\infty. \end{aligned}$$

La justification étant faite, on peut écrire (par des calculs quasi-identiques) que :

$$F(x) = \prod_{i=1}^k \frac{1}{1 - x^{a_i}}.$$

7. Si $j \in \mathbf{N}^*$, notons $\omega_j = \exp(2i\pi/j)$. Si $m = a_1 \cdots a_k$, les polynômes $(1 - x^{a_i})$ ont pour racines des racines m -ièmes de l'unité. Une décomposition en éléments simples donne donc :

$$\forall x \in] - 1, 1[, \quad F(x) = \prod_{i=1}^k \frac{1}{1 - x^{a_i}} = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_{i,j}}{(1 - \omega_j x)^i},$$

pour certains $\lambda_{i,j} \in \mathbf{C}$ (éventuellement nuls). Par la question 4 :

$$\forall n \in \mathbf{Z}, \quad P(n) = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=1}^k \lambda_{i,j} R_{i,j}(n),$$

où $R_{i,j}$ est la fonction quasi-polynomiale de la même question 4 (obtenue pour $\omega = \omega_j$ et $p = i$). Par combinaisons linéaires, P est quasi-polynomiale.

8. • Supposons $k = 1$. Alors $P(n) = 0$ si a_1 ne divise pas n , et $P(n) = 1 + n/a_1$ sinon. Ce calcul direct montre que P est quasi-polynomiale, de degré 1 et de coefficient dominant $n \mapsto \mathbf{1}_{(a_1|n)}/a_1$.
- Désormais, on suppose que $k \geq 2$. Reprenons les notations de la question précédente, et précisons les $\lambda_{k,j}$. D'abord, 1 est l'unique racine commune aux $1 - X^{a_i}$,¹ entraînant que $\lambda_{k,j} = 0$ pour tout $j \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$. Quant à $\lambda_{k,0}$, comme :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad (1-x)^k F(x) = \prod_{i=1}^k \frac{1-x}{1-x^{a_i}} = \prod_{i=1}^k \frac{1}{1+x+\dots+x^{a_i-1}},$$

on obtient que $\lambda_{k,0} = 1/(a_1 \cdots a_k)$ en faisant tendre $x \rightarrow 1^-$ dans $(1-x)^k F(x)$. La question 4 indiquant que chaque $R_{i,j}$ est de degré $i-1$ et de coefficient dominant $n \mapsto \omega_j^n / (i-1)!$, le degré de P est $k-1$ et son coefficient dominant est $n \mapsto 1/((k-1)!a_1 \cdots a_k)$.

9. Soit $n \in \mathbf{N}$, qu'on écrit $n = 6k+r$ avec $k \in \mathbf{N}$ et $r \in \llbracket 0, 5 \rrbracket$. Soit $(n_1, n_2) \in \mathbf{N}^2$ vérifiant $2n_1 + 3n_2 = n$. Distinguons plusieurs cas.
- * Si $r = 0$, alors $2n_1 + 3n_2 = 6k$ puis 3 divise $2n_1$, donc divise n_1 (par GAUSS) et on peut écrire $n_1 = 3p$, puis $n_2 = 2(k-p)$. Pour que n_1 et n_2 soient positifs, il faut : $0 \leq p \leq k$. Réciproquement, les couples $(3p, 2(k-p))$ conviennent, donc $P(n) = k+1$.
 - * Si $r = 1$, alors $2(n_1 + 1) + 3(n_2 - 1) = 6k$ et le premier cas permet d'écrire $n_1 + 1 = 3p$, puis $n_2 - 1 = 2(k-p)$. Pour que n_1 et n_2 soient positifs, il faut : $1 \leq p \leq k$. Réciproquement, les couples $(3p-1, 2(k-p)+1)$ conviennent (pour $k \geq 1$), et $P(n) = k$ même si $k = 0$.
 - * Si $r = 2$, alors $2(n_1 - 1) + 3n_2 = 6k$ et le premier cas donne $n_1 - 1 = 3p$, puis $n_2 = 2(k-p)$. Pour que n_1 et n_2 soient positifs, il faut : $0 \leq p \leq k$. Réciproquement, les couples $(3p+1, 2(k-p))$ conviennent, et $P(n) = k+1$.
 - * Si $r = 3$, alors $2n_1 + 3(n_2 - 1) = 6k$ puis $n_1 = 3p$ et $n_2 - 1 = 2(k-p)$, et il faut : $0 \leq p \leq k$. De tels couples conviennent, et $P(n) = k+1$.
 - * Si $r = 4$, alors $2(n_1 - 2) + 3n_2 = 6k$ puis $n_1 - 2 = 3p$ et $n_2 = 2(k-p)$, et il faut : $0 \leq p \leq k$. De tels couples conviennent, et $P(n) = k+1$.
 - * Si $r = 5$, alors $2(n_1 - 1) + 3(n_2 - 1) = 6k$ puis $n_1 - 1 = 3p$ et $n_2 - 1 = 2(k-p)$, et il faut : $0 \leq p \leq k$. De tels couples conviennent, et $P(n) = k+1$.

Tout ceci permet d'en déduire (en notant que $k = \lfloor n/6 \rfloor$) que :

$$P(n) = \begin{cases} \lfloor n/6 \rfloor & \text{si } n \equiv 1 \pmod{6} \\ \lfloor n/6 \rfloor + 1 & \text{si } n \not\equiv 1 \pmod{6}, \end{cases}$$

c'est-à-dire que :

$$P(n) = \frac{n + \phi(n)}{6} \quad \text{où} \quad \phi(n) = \begin{cases} -1 & \text{si } n \equiv 1 \pmod{6} \\ 6 - (n \pmod{6}) & \text{si } n \not\equiv 1 \pmod{6}. \end{cases}$$

REMARQUE.

Suivant le raisonnement des questions 7 et 8, on pourrait également passer par une décomposition en éléments simples de $1/(1-X)^2(1-X)^3$. C'est d'ailleurs ce qui se fait plus généralement aux questions 10 et 11.

1. Une telle racine ω_m^p (avec $p \in \mathbf{Z}$) vérifie $\omega_m^{pa_i} = 1$ pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$; les a_i étant premiers entre eux dans leur ensemble, le théorème de BÉZOUT fournit $n_1, \dots, n_k \in \mathbf{N}$ tels que $n_1 a_1 + \dots + n_k a_k = 1$, et $\omega_m^p = \omega_m^{p(n_1 a_1 + \dots + n_k a_k)} = 1$.

10. • Une décomposition en éléments simples donne pour certains scalaires (dans \mathbf{C}) que :

$$\frac{1}{(1-X^a)(1-X^b)} = \frac{\lambda_1}{X-1} + \frac{\lambda_2}{(X-1)^2} + \sum_{j=1}^{a-1} \frac{\mu_j}{X-\omega_a^j} + \sum_{k=1}^{b-1} \frac{\nu_k}{X-\omega_b^k}. \quad (*)$$

(sachant que a et b sont premiers entre eux, 1 est l'unique racine commune à $1-X^a$ et $1-X^b$). On a déjà vu (question 8) que $\lambda_2 = 1/(ab)$. Fixons $j \in \llbracket 1, a-1 \rrbracket$. En multipliant par $X-\omega_a^j$ puis en évaluant en ω_a^j :

$$\frac{1}{\mu_j} = (\omega_a^{jb} - 1) \prod_{\substack{1 \leq i \leq a-1 \\ i \neq j}} (\omega_a^j - \omega_a^i).$$

En dérivant la relation polynomiale $X^a - 1 = \prod_{i=1}^{a-1} (X - \omega_a^i)$ puis en évaluant en ω_a^j , on voit que le produit apparu ci-dessus vaut $a \cdot \omega_a^{j(a-1)}$, d'où :

$$\frac{1}{\mu_j} = a \cdot \omega_a^{j(a-1)} (\omega_a^{jb} - 1) = a \cdot \omega_a^{-j} (\omega_a^{jb} - 1).$$

Les ν_k s'obtiennent de façon analogue. Quant à λ_1 , en multipliant la relation (*) par $X-1$ et en évaluant ensuite en $x \neq 1$, au voisinage de 1 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{ab(x-1)} + \lambda_1 + \underset{x \rightarrow 1}{o}(1) &= \frac{x-1}{(x^a-1)(x^b-1)} \underset{x=1+h}{=} \frac{h}{(ah + \frac{a(a-1)}{2}h^2)(bh + \frac{b(b-1)}{2}h^2) + \underset{h \rightarrow 0}{o}(h^3)} \\ &= \frac{1}{abh} \cdot \frac{1}{1 + (\frac{a-1}{2} + \frac{b-1}{2})h + \underset{h \rightarrow 0}{o}(h)} = \frac{1}{abh} - \frac{a+b-2}{2ab} + \underset{h \rightarrow 0}{o}(1). \end{aligned}$$

On a donc $\lambda_1 = \frac{1}{ab} - \frac{1}{2a} - \frac{1}{2b}$, et :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-X^a)(1-X^b)} &= \frac{1}{2a(1-X)} + \frac{1}{2b(1-X)} - \frac{1}{ab(1-X)} + \frac{1}{ab(1-X)^2} \\ &\quad + \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{a-1} \frac{\omega_a^j}{(1-\omega_a^{jb})(\omega_a^j-X)} + \frac{1}{b} \sum_{k=1}^{b-1} \frac{\omega_b^k}{(1-\omega_b^{ka})(\omega_b^k-X)}. \end{aligned}$$

- Si $x \in]-1, 1[$, des développements en série entière permettent ensuite d'écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} P(n)x^n &= \left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} - \frac{1}{ab} \right) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \frac{1}{ab} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n \\ &\quad + \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{a-1} \frac{1}{1-\omega_a^{jb}} \sum_{n=0}^{+\infty} \omega_a^{-jn} x^n + \frac{1}{b} \sum_{k=1}^{b-1} \frac{1}{1-\omega_b^{ka}} \sum_{n=0}^{+\infty} \omega_b^{-kn} x^n. \end{aligned}$$

L'identification des coefficients de ces séries entières donne la formule attendue :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad P(n) = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{n}{ab} + \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{a-1} \frac{\omega_a^{-jn}}{1-\omega_a^{jb}} + \frac{1}{b} \sum_{k=1}^{b-1} \frac{\omega_b^{-kn}}{1-\omega_b^{ka}}.$$

11. • On suppose (comme suggéré) dans un premier temps que $b = 1$. La formule précédente s'écrit (les indices $a, 1$ suivant le P permettant de préciser sa dépendance) :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad P_{a,1}(n) = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2} + \frac{n}{a} + \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{a-1} \frac{\omega_a^{-jn}}{1-\omega_a^j}.$$

Or, choisir $(n_1, n_2) \in \mathbf{N}^2$ tel que $an_1 + n_2 = n$ revient à choisir $n_1 \in \mathbf{N}$ tel que $n - an_1 \geq 0$, c'est-à-dire $0 \leq n_1 \leq \lfloor n/a \rfloor$. Il s'ensuit que $P_{a,1}(n) = 1 + \lfloor n/a \rfloor$ et :

$$\forall a \in \mathbf{N}^*, \forall n \in \mathbf{N}, \quad \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{a-1} \frac{\omega_a^{-jn}}{1 - \omega_a^j} = -\frac{1}{2a} - \left\{ \frac{n}{a} \right\} + \frac{1}{2}. \quad (**)$$

- Revenons au cas général. Effectuer des changements d'indices dans la formule de la question 10 permet d'écrire, puisque a et b^* (resp. b et a^*) sont premiers entre eux :

$$\begin{aligned} P(n) &= \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{n}{ab} + \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{a-1} \frac{\omega_a^{-jn}}{1 - \omega_a^j} + \frac{1}{b} \sum_{k=1}^{b-1} \frac{\omega_b^{-kn}}{1 - \omega_b^k} \\ &= \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{n}{ab} + \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{a-1} \frac{\omega_a^{-jb^*n}}{1 - \omega_a^j} + \frac{1}{b} \sum_{k=1}^{b-1} \frac{\omega_b^{-ka^*n}}{1 - \omega_b^k}. \end{aligned}$$

On peut alors utiliser la relation (**), de sorte que pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$P(n) = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{n}{ab} - \frac{1}{2a} - \left\{ \frac{b^*n}{a} \right\} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2b} - \left\{ \frac{a^*n}{b} \right\} + \frac{1}{2} = \frac{n}{ab} - \left\{ \frac{b^*n}{a} \right\} - \left\{ \frac{a^*n}{b} \right\} + 1.$$

2. — ÉTUDE DES POLYTOPES.

Bien que les polytopes soient des objets qui visuellement se comprennent bien, leur description algébrique est ardue. Le long de cette partie, nous utiliserons de nombreuses fois les mêmes types de raisonnements ou d'hypothèses simplificatrices.

2.1. — Enveloppe convexe des sommets.

12. • Notons $P = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \forall i \in I, \ell_i(x) \leq a_i\}$ et $F = F_J$ avec $J \subset I$ non vide, comme dans l'énoncé. Si $x \in \mathbf{R}^n$ et $j \in J$, dire que $\ell_j(x) = a_j$ revient à dire que $\ell_j(x) \leq a_j$ et $-\ell_j(x) \leq -a_j$, donc :

$$F = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \forall j \in J, \ell_j(x) \leq a_j \text{ et } -\ell_j(x) \leq -a_j\}.$$

F est aussi une partie fermée (comme intersection des $\ell_j^{-1}(\{a_j\})$, les ℓ_j étant des formes linéaires sur \mathbf{R}^n , donc continues) du compact P ; c'est donc un compact. F est donc un polytope.

- Puisque $F \subset P$, on a $\vec{F} \subset \vec{P}$ et donc $\dim F \leq \dim P$.

Supposons de plus que $\dim F = \dim P$, de sorte que $\vec{F} = \vec{P}$. Si $x \in P$ et $x_0 \in F$ (une face étant non vide), alors $x - x_0 \in \vec{P} = \vec{F}$ et il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbf{R}$ et $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m \in F$ tels que $x - x_0 = \sum_{k=1}^m \lambda_k(x_k - y_k)$. Si $j \in J$, on a donc $\ell_j(x - x_0) = \sum_{k=1}^m \lambda_k(a_j - a_j) = 0$, puis $\ell_j(x) = \ell_j(x_0) = a_j$. Ainsi, $x \in F$. Ceci prouve que $F = P$.

REMARQUES.

- * Un polytope P de \mathbf{R}^n est de dimension $\leq n$, et est convexe. En effet, si $\ell : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ est une forme linéaire, ses ensembles de sous-niveaux $\{x \in \mathbf{R}^n \mid \ell(x) \leq a\}$ sont convexes pour tout $a \in \mathbf{R}$.
- * En particulier, en dimension ≤ 1 , un polytope P est un compact convexe d'une droite affine de \mathbf{R}^n , donc un segment de celle-ci (les convexes de \mathbf{R} étant les intervalles). Notant $P = [a, b]$, si $a = b$, P est de dimension 0, égal à son intérieur relatif et à son unique sommet. Si $a \neq b$, P est de dimension 1, d'intérieur relatif $]a, b[$ et de sommets a et b .

* Soit P un polytope de dimension $< n$ de \mathbf{R}^n . Moyennant une bijection affine, on peut voir P comme un polytope de \mathbf{R}^{n-1} . En effet, si H est un hyperplan de \mathbf{R}^n contenant \vec{P} et $p \in P$, alors $P \subset p + H$. Si $A \in \mathcal{L}(H, \mathbf{R}^{n-1})$ est bijective, la bijection affine $-p + A$ envoie $p + H$ sur \mathbf{R}^{n-1} .

Notant $P = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \forall i \in I, \ell_i(x) \leq a_i\}$, $-p + A$ envoie le polytope P sur le polytope P' de \mathbf{R}^{n-1} défini par les équations $\ell_i \circ A(x) \leq a_i + \ell_i(p)$ pour tout $i \in I$. On vérifie également que la bijection affine $p + A$ fait correspondre faces de P et P' , intérieurs relatifs de P et de P' ...

13. • Les faces de P sont ses parties non vides de la forme F_J avec $J \subset I$. L'ensemble I étant fini, ces faces sont en nombre fini.

• Pour montrer qu'un polytope admet au moins un sommet, montrons d'abord par récurrence sur n qu'un polytope de \mathbf{R}^n de dimension ≥ 1 possède une face stricte.

* Si P est un polytope de \mathbf{R} de dimension 1, c'est un segment non réduit à un point et ses bords sont des sommets (donc des faces strictes).

* Supposons l'assertion vérifiée au rang n , et notons $P = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \forall i \in I, \ell_i(x) \leq a_i\}$ un polytope de \mathbf{R}^{n+1} , où l'on peut supposer les ℓ_i non nulles.

Disons par l'absurde que $\ell_i(x) < a_i$ pour tous $x \in P$ et $i \in I$. La compacité de P et le théorème des bornes atteintes fournissent $\varepsilon > 0$ tel que $\ell_i(x) \leq \frac{a_i}{1+\varepsilon}$ pour tous $i \in I$ et $x \in P$. On en déduit : $(1 + \varepsilon)P \subset P$, impliquant que $P = \{0\}$,² contradiction.

Il existe donc $i_0 \in I$ et $x_0 \in P$ tels que $\ell_{i_0}(x_0) = a_{i_0}$. Par suite, $F = F_{\{i_0\}}$ est une face de P . Si $F \subsetneq P$, il n'y a rien à dire. Supposons donc que $\ell_{i_0}(x) = a_{i_0}$ pour tout $x \in P$. Comme $\ell_{i_0} \neq 0$, P est contenu dans l'hyperplan affine $x_0 + \text{Ker}(\ell_{i_0})$, et on peut supposer que P est un polytope de \mathbf{R}^n , donc contient une face stricte par hypothèse de récurrence.

• On peut désormais conclure que P possède un sommet. Puisqu'une face stricte de P est de dimension $< \dim P$, et qu'une face d'une face de P est encore une face de P (vérification simple), une récurrence (forte) sur la dimension de P permet d'établir que P possède un sommet.

REMARQUE.

Il semblait préférable de raisonner par récurrence sur n et non sur la dimension de P : on peut faire diminuer l'exposant n dans \mathbf{R}^n (moyennant une bijection affine), tandis que diminuer la dimension du polytope implique de (peiblement trop) le modifier.

14. Montrons par récurrence sur n que tout polytope P de \mathbf{R}^n est l'enveloppe convexe de l'ensemble (non-vide) de ses sommets. Le cas $n = 1$ est simple.

Supposons l'assertion vérifiée au rang n . Soit $P = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \forall i \in I, \ell_i(x) \leq a_i\}$ un polytope de \mathbf{R}^{n+1} , où $\ell_i \neq 0$ pour tout $i \in I$. Soit V l'ensemble des sommets de P . Par convexité, P contient $\text{Conv}(V)$. Réciproquement, soit $x \in P$.

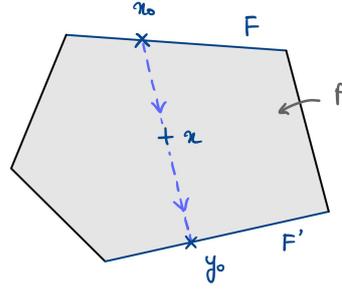
On a vu (question 13) qu'il existe $i_0 \in I$ et $x_0 \in P$ tels que $\ell_{i_0}(x_0) = a_{i_0}$; on note $F = F_{\{i_0\}}$. Si $F = P$, on peut supposer que $P \subset \mathbf{R}^n$ et conclure par hypothèse de récurrence. Supposons la face F stricte. Puisque P est compact, on peut définir :

$$m = \max \{ \lambda \in \mathbf{R}_+ \mid x_0 + \lambda(x - x_0) \in P \}.$$

Notons $y_0 = x_0 + m(x - x_0) \in P$. Si pour tout $i \in I : \ell_i(y_0) < a_i$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\ell_i(y_0 + \varepsilon(x - x_0)) \leq a_i$ pour tout $i \in I$, contredisant la maximalité de m . Il existe donc $j_0 \in I$ tel que $\ell_{j_0}(y_0) = a_{j_0}$. Notons $F' = F_{\{j_0\}}$. Si $F' = P$, on se ramène au cas où $P \subset \mathbf{R}^n$ et on conclut par récurrence. Disons donc que F' est une face stricte.

2. Si $\|\cdot\|$ est une norme sur \mathbf{R}^n , la compacité de P fournit $x \in P$ de norme maximale. L'inclusion $(1 + \varepsilon)P \subset P$ implique que $(1 + \varepsilon)x \in P$, donc $(1 + \varepsilon)\|x\| \leq \|x\|$, d'où $\|x\| = 0$.

En appliquant l'hypothèse de récurrence aux faces strictes F et F' (que l'on peut voir — chacune respectivement — comme des polytopes de \mathbf{R}^n) et sachant qu'un sommet d'une face de P est un sommet de P , on obtient : $x_0, y_0 \in \text{Conv}(V)$. Enfin, $x \in [x_0, y_0]$, donc $x \in \text{Conv}(V)$ également. Ceci achève la récurrence.



REMARQUE.

Un polytope est essentiellement une généralisation des polygones convexes (en dimension 2) et des polyèdres convexes (en dimension 3). Si $\ell \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ est non nulle et $a \in \mathbf{R}$, alors $\{x \in \mathbf{R}^n \mid \ell(x) \leq a\}$ représente un demi-espace affine (fermé) de \mathbf{R}^n et $\{x \in \mathbf{R}^n \mid \ell(x) = a\}$ représente un hyperplan affine de \mathbf{R}^n . On a deux visions géométriques des polytopes :

- * une première où l'on voit un polytope comme une intersection finie et bornée de demi-espaces fermés de \mathbf{R}^n (c'est la définition de l'énoncé) ;
- * une seconde où l'on voit un polytope comme l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points (c'est la définition équivalente qui découle des questions 14 à 17).

15. • Si $\text{Conv}(V)$ est inclus dans un hyperplan de \mathbf{R}^n , en considérant une bijection affine envoyant cet hyperplan sur \mathbf{R}^{n-1} , on se ramène au cas où $\text{Conv}(V) \subset \mathbf{R}^{n-1}$: ceci permet de raisonner par récurrence sur n (le cas $n = 1$ étant simple). On peut donc supposer que $\text{Conv}(V)$ n'est contenu dans aucun hyperplan de \mathbf{R}^n .³

- Quitte à translater V , on peut d'abord supposer que $0 \in V$. Supposons $\text{Conv}(V)$ d'intérieur vide, et montrons qu'il est contenu dans un hyperplan de \mathbf{R}^n . Si ce n'est pas le cas, il contient une base (u_1, \dots, u_n) de \mathbf{R}^n . On obtient une contradiction en voyant que $\text{Conv}(0, u_1, \dots, u_n)$ n'est pas d'intérieur vide.⁴ On est ramené au premier point.

On peut donc supposer $\text{Conv}(V)$ d'intérieur non vide — et quitte à translater à nouveau V — que 0 est dans l'intérieur de $\text{Conv}(V)$, ce qui conclut.

16. Si $x \in V$, introduisons la forme linéaire $\ell_x : v \in \mathbf{R}^n \mapsto \langle v, x \rangle$, de sorte que Q soit l'intersection des $\ell_x^{-1}(] - \infty, 1])$ pour x décrivant V . Q est ainsi fermé (par continuité des ℓ_x), et pour montrer que Q est un polytope, il suffit de montrer que Q est non-vide et borné (les compacts de \mathbf{R}^n étant les parties fermées et bornées). Déjà, Q contient 0 .

Soit $q \in Q$, disons non nul. Si $x_1, \dots, x_m \in V$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbf{R}_+$ sont de somme 1, alors :

$$\left\langle q, \sum_{k=1}^m \lambda_k x_k \right\rangle = \sum_{k=1}^m \lambda_k \langle q, x_k \rangle \leq \sum_{k=1}^m \lambda_k = 1,$$

de sorte que $\langle q, x \rangle \leq 1$ pour tout $x \in \text{Conv}(V)$. Par hypothèse, il existe $r > 0$ tel que $\text{Conv}(V)$ contienne la boule fermée $\overline{\mathcal{B}}(0, r)$. En prenant $x = r q / \|q\|$, alors $x \in \text{Conv}(V)$ et l'inégalité $\langle q, x \rangle \leq 1$ entraîne que $\|q\| \leq 1/r$. Q est donc borné.

3. C'est à peu de choses près le même argument que celui utilisé plusieurs fois dans les questions 13 et 14. D'ailleurs, n'aurait-il pas été raisonnable de placer au moins la première partie de cette question avant la question 13 ?

4. Si $u = (u_1 + \dots + u_n)/2$ et $\|\cdot\|$ désigne la norme infinie associée à la base (u_1, \dots, u_n) , alors $\text{Conv}(0, u_1, \dots, u_n)$ contient la boule de centre u et de rayon $1/2$ pour la norme $\|\cdot\|$.

17. Q est un polytope donc s'écrit $Q = \text{Conv}(S)$ où S est l'ensemble (fini, non vide) des sommets de Q . En outre, la définition de Q , la finitude de V et la continuité des $y \in \mathbf{R}^n \mapsto \langle y, x \rangle$ pour x décrivant V font que 0 est un point intérieur à Q (et Q n'est a fortiori inclus dans aucun hyperplan de \mathbf{R}^n). Par la question 16, il suffit de montrer que :

$$\text{Conv}(V) = \left\{ x \in \mathbf{R}^n \mid \forall s \in S, \langle s, x \rangle \leq 1 \right\}.$$

- * Une inclusion est simple : on a montré dans la question précédente que $\langle q, x \rangle \leq 1$ pour tous $q \in Q$ et $x \in \text{Conv}(V)$, donc $\langle s, x \rangle \leq 1$ pour tous $s \in S$ et $x \in \text{Conv}(V)$.
- * Réciproquement, soit $x \in \mathbf{R}^n$ tel que $x \notin \text{Conv}(V)$. Par finitude de V , on voit que $\text{Conv}(V)$ est un convexe fermé non-vide. Le point admis montre qu'il existe un unique $x_0 \in \text{Conv}(V)$ tel que $\langle x - x_0, y - x_0 \rangle \leq 0$ pour tout $y \in \text{Conv}(V)$. En particulier : $\langle x - x_0, x_0 \rangle > 0$. En effet, si $r > 0$ est suffisamment petit, $y_r = r(x - x_0) \in \text{Conv}(V)$ car 0 y est intérieur, et :

$$\langle x - x_0, x_0 \rangle = \langle x - x_0, y_r \rangle - \underbrace{\langle x - x_0, y_r - x_0 \rangle}_{\leq 0} \geq r \cdot \|x - x_0\|^2 > 0.$$

Posons $q = \frac{x - x_0}{\langle x - x_0, x_0 \rangle}$. D'une part, si $v \in \text{Conv}(V)$:

$$\langle q, v \rangle = \frac{\langle x - x_0, v \rangle}{\langle x - x_0, x_0 \rangle} = \frac{\langle x - x_0, v - x_0 \rangle + \langle x - x_0, x_0 \rangle}{\langle x - x_0, x_0 \rangle} \leq \frac{\langle x - x_0, x_0 \rangle}{\langle x - x_0, x_0 \rangle} = 1,$$

donc $q \in Q$. D'autre part : $\|x - x_0\|^2 > 0$, donc $\langle x - x_0, x \rangle > \langle x - x_0, x_0 \rangle$ puis $\langle q, x \rangle > 1$. Si par l'absurde $\langle s, x \rangle \leq 1$ pour tout $s \in S$, alors $\langle q, x \rangle \leq 1$ puisque $q \in Q = \text{Conv}(S)$; contradiction.

REMARQUES.

- * Q est appelé dual du polytope $\text{Conv}(V)$. La résolution effectuée consistait essentiellement à dire que si C est un convexe fermé contenant 0 en son intérieur et si C^* est le dual de C (formé des $x \in \mathbf{R}^n$ tels que $\langle c, x \rangle \leq 1$ pour tout $c \in C$), alors $C^{**} = C$.

Par exemple, le polytope dual d'un tétraèdre est un octaèdre (et vice-versa), et le polytope dual d'un dodécaèdre est un icosaèdre (et vice-versa). Grosso modo, en passant au dual, un sommet devient le centre d'une face et vice-versa (modulo une dilatation...).

Il nous aurait paru souhaitable dans le sujet de mieux illustrer cette notion de polytope dual (idem pour la projection sur un convexe fermé dans l'indication, même si c'est bien plus classique)...

- * Dans le point admis de l'énoncé, l'élément $y \in C$ est la projection de x sur le convexe fermé C . C'est aussi l'élément de C le plus proche de x pour la norme euclidienne standard de \mathbf{R}^n .

18. Disons que $|V| \geq 2$. Soit $x_0 \in \text{Conv}(V) \setminus V$; montrons que x_0 n'est pas un sommet de $\text{Conv}(V)$. Notons de façon usuelle $\text{Conv}(V) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \forall i \in I, \ell_i(x) \leq a_i\}$. Si par l'absurde x_0 est un sommet de $\text{Conv}(V)$, il existe $J \subset I$ fini tel que $\{x \in \text{Conv}(V) \mid \forall j \in J, \ell_j(x) = a_j\} = \{x_0\}$.

Comme $x_0 \in \text{Conv}(V) \setminus V$, il existe un entier $m \geq 2$, des $v_1, \dots, v_m \in V$ deux à deux distincts et des $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in]0, 1[$ de somme 1 tels que $x_0 = \sum_{k=1}^m \lambda_k v_k$. Considérons :

$$x_1 = (\lambda_1 + \lambda_2)v_1 + \sum_{k=3}^m \lambda_k v_k \in \text{Conv}(V) \quad \text{et} \quad x_2 = (\lambda_1 + \lambda_2)v_2 + \sum_{k=3}^m \lambda_k v_k \in \text{Conv}(V).$$

Soit $j \in J$. L'inégalité $\ell_j(x_1) \leq a_j = \ell_j(x_0)$ donne $(\lambda_1 + \lambda_2)\ell_j(v_1) \leq \lambda_1\ell_j(v_1) + \lambda_2\ell_j(v_2)$, soit : $\ell_j(v_1) \leq \ell_j(v_2)$. En considérant de même l'inégalité $\ell_j(x_2) \leq \ell_j(x_0)$, on a en fait $\ell_j(v_1) = \ell_j(v_2)$, et donc $\ell_j(x_1) = \ell_j(x_2) = a_j$. Ceci vaut pour tout $j \in J$, donc $x_1 = x_0 = x_2$: c'est absurde ($v_1 \neq v_2$).

REMARQUE.

De façon plus honnête, cette méthode consiste essentiellement à dire qu'un sommet de $\text{Conv}(V)$ est un point extrémal,⁵ et qu'un point extrémal de $\text{Conv}(V)$ est nécessairement un élément de V .

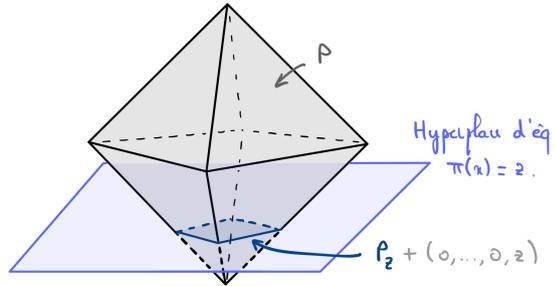
2.2. — Formule d'EULER.

19. Un polytope de \mathbf{R} est un segment. L'espace vectoriel \mathcal{U}_1 est donc engendré par les indicatrices $\mathbf{1}_{[a,b]}$ avec $a \leq b$ dans \mathbf{R} , lesquelles admettent une limite à droite en tout point de \mathbf{R} , qui de plus coïncident avec la valeur en ce point, sauf en b (auquel cas la différence $\mathbf{1}_{[a,b]}(b) - \mathbf{1}_{[a,b]}(b^+)$ vaut 1). Par combinaisons linéaires, ceci conclut.

20. • Montrons, si P est un polytope de \mathbf{R}^n et $z \in \mathbf{R}$, que l'ensemble P_z des $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbf{R}^{n-1}$ tels que $(x_1, \dots, x_{n-1}, z) \in P$ est soit vide, soit un polytope de \mathbf{R}^{n-1} . Ecrivons $P = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \forall i \in I, \ell_i(x) \leq a_i\}$. Si $P_z \neq \emptyset$ et $\pi : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ désigne la projection sur la dernière coordonnée :

$$\{x \in \mathbf{R}^n \mid \pi(x) = z \text{ et } \forall i \in I, \ell_i(x) \leq a_i\}$$

est une partie fermée non-vide de P ; c'est donc un polytope et il s'écrit $\text{Conv}(V)$ avec $V \subset \mathbf{R}^n$ fini non-vide. De là, $P_z = \text{Conv}(V')$ où V' est l'image de V par la translation $\mathbf{R}^{n-1} \times \{z\} \rightarrow \mathbf{R}^{n-1}$ de vecteur $-(0, \dots, 0, z)$.



- Si P est un polytope de \mathbf{R}^n , $z \in \mathbf{R}$ et $f = \mathbf{1}_P$, alors f_z vaut 1 en un point de P_z et vaut 0 sinon. Comme P_z est soit vide (auquel cas $f_z = 0$), soit un polytope de \mathbf{R}^{n-1} , on en déduit que $f_z \in \mathcal{U}_{n-1}$. Par combinaisons linéaires, si plus généralement $f \in \mathcal{U}_n$, on a donc $f_z \in \mathcal{U}_{n-1}$.
- 21. • On montre d'abord par récurrence sur n que χ_n est une forme linéaire sur \mathcal{U}_n telle que $\chi_n(\mathbf{1}_P) = 1$ pour tout polytope P de \mathbf{R}^n .
 - * Pour $n = 1$, la linéarité est simple et on a déjà vu que $\chi_1(P) = 1$ pour tout polytope $P \subset \mathbf{R}$.
 - * Supposons l'assertion vérifiée à un rang n . Si $f, g \in \mathcal{U}_{n+1}$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, par linéarité de χ_1 et χ_n :

$$\begin{aligned} \chi_{n+1}(f + \lambda g) &= \chi_1(x \mapsto \chi_n((f + \lambda g)_x)) = \chi_1(x \mapsto \chi_n(f_x + \lambda g_x)) \\ &= \chi_1(x \mapsto \chi_n(f_x) + \lambda \cdot \chi_n(g_x)) = \chi_1(x \mapsto \chi_n(f_x)) + \lambda \cdot \chi_1(x \mapsto \chi_n(g_x)) \\ &= \chi_{n+1}(f) + \lambda \cdot \chi_{n+1}(g), \end{aligned}$$

justifiant la linéarité de χ_{n+1} . C'est donc une forme linéaire sur \mathcal{U}_{n+1} .

Si ensuite P est un polytope de \mathbf{R}^{n+1} et $x \in \mathbf{R}$, P_x est soit vide, soit un polytope de \mathbf{R}^n (question 20). En outre, la convexité et la compacité de P fait que l'ensemble des $x \in \mathbf{R}$ tels que $P_x \neq \emptyset$ est un segment non vide (soit un polytope) de \mathbf{R} . Moyennant l'hypothèse de récurrence, $x \mapsto \chi_n(\mathbf{1}_{P_x})$ vaut donc 1 sur ce segment et 0 ailleurs, et donc $\chi_{n+1}(\mathbf{1}_P) = 1$ en utilisant l'assertion au rang 1.

5. On dit qu'un point x de $\text{Conv}(V)$ est extrémal lorsque pour tous $x_1, x_2 \in \text{Conv}(V)$ vérifiant : $x = (x_1 + x_2)/2$, on a nécessairement $x_1 = x_2 = x$.

- Soit $A \in \text{GL}(\mathbf{R}^n)$. Si P est un polytope de \mathbf{R}^n , on peut écrire $P = \text{Conv}(V)$ avec V un ensemble fini non-vidé. Alors : $A^{-1}(\text{Conv}(V)) = \text{Conv}(A^{-1}(V))$ par linéarité de A^{-1} et $A^{-1}(V)$ est fini non-vidé, donc $A^{-1}(P)$ est un polytope de \mathbf{R}^n et $\chi_n(\mathbf{1}_P \circ A) = 1 = \chi_n(\mathbf{1}_P)$. Les $\mathbf{1}_P$ engendrent \mathcal{U}_n , donc $\chi_n(f \circ A) = \chi_n(f)$ pour tout $f \in \mathcal{U}_n$ par linéarité.

REMARQUE.

Mieux, si $h \in \mathbf{R}^n$ et $\tau_h : \mathcal{U}_n \rightarrow \mathcal{U}_n$ est la translation qui à $f \in \mathcal{U}_n$ associe $x \mapsto f(x + \tau)$, alors χ_n est invariante par translation : $\chi_n(f \circ \tau_h) = \chi_n(f)$ pour tous $f \in \mathcal{U}_n$ et $h \in \mathbf{R}^n$. χ_n est donc invariante par bijection affine. La preuve est la même.

22. Soit $x \in P \setminus P^\circ$. Par définition de P° , il existe $i_0 \in I \setminus S_P$ tel que $\ell_{i_0}(x) = a_{i_0}$. Notons $F = F_{\{i_0\}}$; F contient x et on montre que F est une face stricte de P . En effet, si $F = P$, on aurait $\ell_{i_0}(x) = a_{i_0}$ pour tout $x \in P$, soit $i_0 \in S_P$: c'est absurde.

REMARQUE.

L'intérieur relatif P° d'un polytope P est l'intérieur (topologique) de P , vu comme partie de l'espace affine $p + \vec{P}$ (avec $p \in P$ arbitraire) engendré par P . Il coïncide en particulier avec l'intérieur de P (au sens topologique usuel) lorsque $\dim P = n$.

23. • Justifions que $\mathbf{1}_{P^\circ} \in \mathcal{U}_n$. La question précédente montre qu'il existe des faces F_1, \dots, F_m de P telles que P soit l'union disjointe de P° et de $F_1 \cup \dots \cup F_m$. Par la formule du crible :

$$\mathbf{1}_{P^\circ} = \mathbf{1}_P + \sum_{k=1}^m (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} \mathbf{1}_{F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k}}.$$

Une intersection finie de faces de P est soit vide, soit une face de P (cf. question 25 si besoin de détails), donc dans ce second cas un polytope de \mathbf{R}^n . Par la formule ci-dessus : $\mathbf{1}_{P^\circ} \in \mathcal{U}_n$.

- Par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$, montrons que $\chi_n(\mathbf{1}_{P^\circ}) = (-1)^{\dim P}$.
 - * Si $n = 1$, P est un segment de \mathbf{R} , disons $P = [a, b]$. Si $a = b$, son intérieur relatif est lui-même, sinon c'est $P^\circ =]a, b[$. Dans ces 2 cas : $\chi_1(\mathbf{1}_P) = (-1)^{\dim P}$.
 - * Supposons l'assertion vérifiée à un rang $n \in \mathbf{N}^*$. Soit P un polytope de \mathbf{R}^{n+1} . On peut supposer que 0 est intérieur à P (cf. question 15). Déjà, $\dim P = n + 1$ (\vec{P} contient une boule de rayon > 0 centrée en 0 , donc une base de \mathbf{R}^{n+1}).

Par compacité et convexité de P , l'ensemble des $x \in \mathbf{R}$ tels que $P_x \neq \emptyset$ forme un segment, disons $[a, b]$, de \mathbf{R} . Puisque 0 est un point intérieur à P , on a $a < 0 < b$ et P_0 contient une boule fermée $\overline{\mathcal{B}(0, r)} \subset \mathbf{R}^n$ avec $r > 0$, donc $\dim P_0 = n$.

Montrons que $\dim P_x = n$ pour tout $x \in]a, b[$. Fixons à cet effet $(t_1, \dots, t_n, b) \in P$ (P_b étant non vide). Moyennant la convexité de P , si $\lambda \in [0, 1[$, $P_{\lambda b}$ contient la boule fermée de \mathbf{R}^n de centre $\lambda(t_1, \dots, t_n)$ et de rayon $(1 - \lambda)r > 0$. Ceci justifie que $\dim P_x = n$ pour tout $x \in]0, b[$. On montre de même que $\dim P_x = n$ lorsque $x \in]a, 0[$.

Venons-en aux $(P^\circ)_x$. On peut noter : $P = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \forall i \in \llbracket 0, m \rrbracket, \ell_i(x) \leq a_i\}$ où $m \geq 2$, $\ell_1 = -\ell_0$ est la projection sur la dernière coordonnée, $a_0 = -a$ et $a_1 = b$.⁶ Avec ce système d'équations, on voit que $(P^\circ)_a = (P^\circ)_b = \emptyset$ et que $(P^\circ)_x = (P_x)^\circ$ pour tout $x \in]a, b[$.

Par hypothèse de récurrence, $\chi_{n+1}(\mathbf{1}_{P^\circ}) = \chi_1(g)$ où g vérifie $g(x) = 0$ si $x \notin]a, b[$ et $g(x) = (-1)^{\dim P_x} = (-1)^n$ sinon. Ceci conclut, puisqu'alors :

$$\chi_{n+1}(\mathbf{1}_{P^\circ}) = -(-1)^n = (-1)^{\dim P}.$$

6. Rappelons que l'énoncé permet d'admettre que les notions de face et d'intérieur relatif ne dépendent pas du système d'équations choisi pour le polytope. C'est pourquoi on se permet de choisir ℓ_0 et ℓ_1 ainsi.

24. • Justifions que les intérieurs relatifs des faces d'un polytope P le partitionnent. Si $x \in P$, une application itérée de la question 22 montre que x est dans l'intérieur relatif d'une face de P (une face d'une face étant encore une face). Soit ensuite F, G deux faces de P telles qu'il existe $x \in F^\circ \cap G^\circ$; on note :

$$P = \{y \in \mathbf{R}^n \mid \forall i \in I, \ell_i(y) \leq a_i\}.$$

Si $i \in S_F$, alors $\ell_i(x) = a_i$ car $x \in F^\circ$, puis $i \in G^\circ$ car $x \in G^\circ$. Par symétrie des rôles de F et G , on a donc $S_F = S_G$, puis $F = G$.

- De là, les questions 21 et 23 montrent que : $\sum_F (-1)^{\dim F} = \sum_F \chi_n(\mathbf{1}_{F^\circ}) = \chi_n(\mathbf{1}_P) = 1$.

2.3. — Triangulations.

On rencontre de nombreuses subtilités dans les questions de cette sous-partie. Il est difficile de savoir jusqu'où pousser les justifications et à quelles occasions on peut se contenter de l'intuition géométrique. Noter que notre solution de la question 26 est probablement excessivement lourde.

25. • On montre que l'intersection de deux faces de P est soit vide, soit une face de P . En effet, si on note $P = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \forall i \in I, \ell_i(x) \leq a_i\}$ et si $J, K \subset I$, alors $F_J \cap F_K = F_{J \cup K}$ (on montrerait par le même argument qu'une intersection quelconque de faces de P est soit vide, soit une face de P).
- Il reste à prouver qu'il existe une face de P de dimension $k - 1$ où $k = \dim P$. On supposera que $\dim P = n$ et que 0 est intérieur à P (cf. question 15).

On a vu (cf. question 17) qu'on peut écrire que : $P = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \forall v \in P^*, \langle v, x \rangle \leq 1\}$, où $P^* = \{v \in \mathbf{R}^n \mid \forall x \in P, \langle v, x \rangle \leq 1\}$ (et est un polytope). Notons s un sommet de P^* ; on souhaiterait montrer que $F = \{x \in P \mid \langle s, x \rangle = 1\}$ est une face de dimension $\dim P - 1$ de P .

Avant cela, faisons une nouvelle hypothèse : quitte à appliquer une homothétie adéquate et à changer de sommet considéré, la compacité de P^* fait qu'on peut supposer que tous les sommets de P^* soient de norme ≤ 1 et qu'on ait choisi $s \in P^*$ de norme 1.

L'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ et son cas d'égalité assurent que $\langle s', s \rangle < 1$ pour tout autre sommet s' de P^* (sinon, s' est contenu dans l'intervalle $[0, s[$ et ne saurait être un sommet de P^* , car non extrémal), donc que F est stricte dans P . De plus, par finitude du nombre de sommets et un argument de continuité, F contient une boule ouverte $s + \mathcal{B}(0, r)$ (avec $r > 0$ suffisamment petit) de l'espace affine $s + s^\perp$, assurant que $\dim F = n - 1$.

REMARQUE.

Il est possible de se passer de l'utilisation du polytope dual (pas très bien introduit dans le sujet), mais au prix d'une rédaction très lourde. On montre ci-après que si P possède une face F de dimension $m < k - 1$, alors P possède également une face stricte de dimension $> m$ et contenant F .

- Notons $P = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \forall i \in I, \ell_i(x) \leq a_i\}$ et $F = F_J$ pour un $J \subset I$. Il existe $j_0 \in J$ tel que $\ell_{j_0} \neq 0$ (sinon $F = P$); on note H l'hyperplan affine $\ell_{j_0}^{-1}(\{a_{j_0}\})$, il contient F . On peut :
 - * supposer que $k = n$ et que 0 est intérieur à P ;
 - * considérer que $\ell_{i_0} : x \mapsto \langle e_n, x \rangle$ où (e_1, \dots, e_n) désigne la base canonique de \mathbf{R}^n , et $a_{i_0} = 0$;
 - * supposer F contenu dans le sous-espace affine $e_n + \text{Vect}(e_2, \dots, e_{n-1})$.

En quelques mots, nous allons construire un demi-espace contenant P , dont le bord contient F et intersecte P en son bord de sorte à donner lieu à une face stricte de dimension $> m$ contenant F .

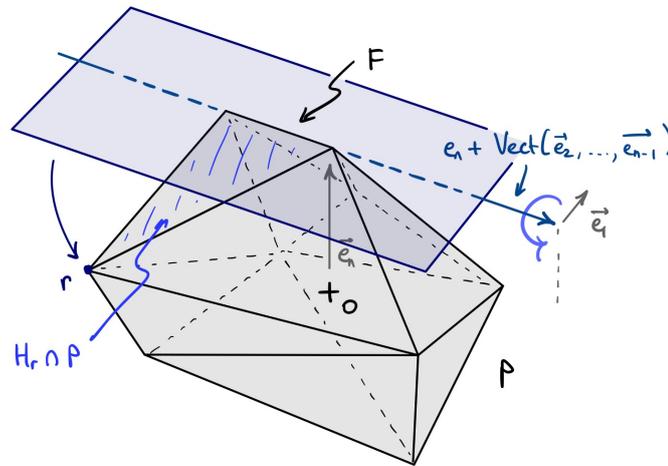
7. Sinon, si $\langle s, e_1 \rangle \geq 0$ pour tout sommet de P , 0 ne pourrait être intérieur à P en sachant que P est l'enveloppe convexe de ses sommets.

- Quitte à symétriser selon e_1^\perp , disons qu'il existe un sommet $s \notin F$ de P tel que $\langle s, e_1 \rangle \leq 0$, et même $\langle s, e_1 \rangle < 0$.⁷ L'hyperplan affine H_s contenant s et $e_n + \text{Vect}(e_2, \dots, e_{n-1})$ s'écrit :

$$H_s = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid \frac{1-s_n}{s_1} \cdot x_1 + x_n = 1 \right\}.$$

Notons $H_s^\leq = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid \frac{1-s_n}{s_1} \cdot x_1 + x_n \leq 1 \right\}$. S'il existe un sommet r de P qui ne soit pas dans le demi-espace H_s^\leq , alors $s \in H_r^\leq$.⁸ En itérant, puisque P possède un nombre fini de sommets, on peut donc supposer que H_r^\leq contient tous les sommets de P , donc contient P .

- Quitte à modifier I et J (cf. ⁶), on peut supposer qu'il existe $j_1 \in J$ tel que $a_{j_1} = 1$ et $\ell_{j_1}(x) = \frac{1-s_n}{s_1} \cdot x_1 + x_n$. Comme $P \subset H_r^\leq$ et H_r contient $r \in P$, on note d'abord que $F_{\{j_1\}}$ est une face de P , stricte car $0 \notin H_r$ et contenant F car $e_n + \text{Vect}(e_2, \dots, e_{n-1}) \subset H_r$. Enfin, $F_{\{j_1\}}$ est de dimension $\geq m + 1$, car elle contient F et un élément de P (à savoir r) qui n'appartient à $e_n + \text{Vect}(e_2, \dots, e_{n-1})$ (espace affine de dimension $\geq m$ contenant F).



26. • La famille des F_x est finie et non-vidé (questions 13 et 25), et les F_x sont bien des polytopes (par exemple en écrivant $F = \text{Conv}(V)$ avec V fini et en utilisant la question 17).

- Soit F, G deux faces de dimension $k - 1$ de P . On note : $P = \{y \in \mathbf{R}^n \mid \forall i \in I, \ell_i(y) \leq a_i\}$, $F = F_J$ et $G = F_K$ où l'on peut supposer choisir $J, K \neq \emptyset$ disjoints de S_P (sinon, la face F ou G considérée ne saurait être stricte). Si $F = G$, il n'y a rien à dire. Supposons donc que $F \neq G$ (auquel cas $\dim(F \cap G) \leq k - 2$). Commençons par montrer que :

$$F_x \cap G_x = (F \cap G)_x, \quad \text{c.à.d. : } \text{Conv}(\{x\} \cup F) \cap \text{Conv}(\{x\} \cup G) = \text{Conv}(\{x\} \cup (F \cap G)).$$

L'inclusion " \supset " est immédiate. Inversement, soit $y \in F_x \cap G_x$, qu'on écrit $y = \lambda x + (1 - \lambda)y_F = \mu x + (1 - \mu)y_G$ avec $\lambda, \mu \in [0, 1]$, $y_F \in F$ et $y_G \in G$ (ce qui est possible par convexité de F et de G). Si $i \in J$, on a d'abord $(\lambda - \mu)\ell_i(x) = (\lambda - 1)a_i + (1 - \mu)\ell_i(y_G)$ en écrivant que $a_i = \ell_i(y_F)$. Si l'on suppose que $\lambda < \mu$:

$$(\lambda - \mu)a_i \geq (\lambda - 1)a_i + (1 - \mu)\ell_i(y_G) = (\lambda - \mu)\ell_i(x),$$

ce qui est absurde car $\ell_i(x) < a_i$ (rappelons qu'on a choisi J disjoint de S_P). Ceci implique que $\lambda \leq \mu$, puis par symétrie (en considérant de même $i \in K$) que $\lambda = \mu$, d'où l'égalité voulue.

⁸. Si $r \notin H_s^\leq$, alors $\frac{1-s_n}{s_1} \cdot r_1 + r_n > 1$ puis $r_1 - s_n r_1 + r_n s_1 < s_1$ (car $s_1 < 0$). Ensuite, $s_1 - r_n s_1 + s_n r_1 > r_1$, donc $\frac{1-r_n}{r_1} \cdot s_1 + s_n < 1$ comme voulu en divisant par $r_1 < 0$ (noter que si $r_1 \geq 0$, alors $r \in H_s^\leq$ car $\frac{1-s_n}{s_1} \leq 0$ et $r_n \leq 1$).

Déterminons désormais un système d'équations permettant de définir le polytope F_x (qui n'est a priori pas une face de P !). On supposera que $x = e_1$, $F \subset \text{Vect}(e_2, \dots, e_n)$ et 0 intérieur à F .⁹ Soit $\pi : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ la projection sur la première coordonnée.

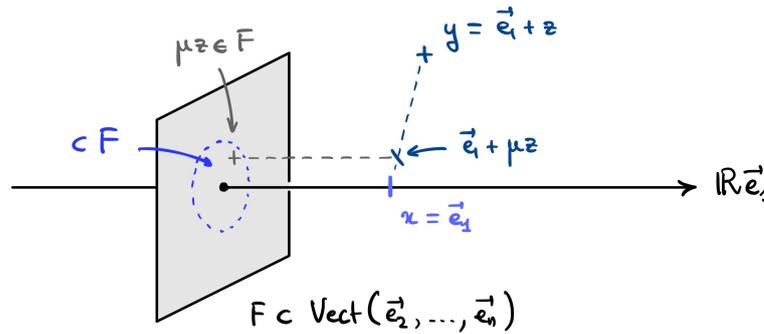
Soit $y \in F_x$, qu'on écrit $y = \lambda e_1 + (1 - \lambda)y_F$ avec $y_F \in F$ et $\lambda \in [0, 1]$. Déjà : $0 \leq \pi(y) \leq 1$ car $\pi(y) = \lambda$. Reste à voir comment adapter les équations sur les ℓ_j ($j \in J$) : Puisque $\ell_j(y_F) = a_j$ et $\lambda = \pi(y)$, on voit que $\ell_j(y) = \pi(y)(\ell_j(e_1) - a_j) + a_j$, donc que $L_j(y) = a_j$ en introduisant la forme linéaire $L_j = \ell_j + (a_j - \ell_j(e_1)) \cdot \pi$.

Réciproquement, soit $y \in P$; supposons que $0 \leq \pi(y) \leq 1$ et $L_j(y) = a_j$ pour tout $j \in J$.

- * Si $\pi(y) < 1$, on peut écrire $y = \lambda e_1 + (1 - \lambda)z$ avec $\lambda = \pi(y) \in [0, 1[$ et $z \in \text{Vect}(e_2, \dots, e_n)$. Si $j \in J$, l'égalité $L_j(y) = a_j$ entraîne que $\ell_j(z) = a_j$, montrant que $z \in F$ puis $y \in F_x$.
- * Si $\pi(y) = 1$, ce raisonnement tombe en défaut. Notons $y = e_1 + z$ avec $z \in \text{Vect}(e_2, \dots, e_n)$; on veut montrer que $z = 0$. Par un argument de convexité, il suffit de montrer qu'il existe $\mu \in]0, 1[$ tel que $e_1 + \mu z$ ne vérifie par toutes les inégalités (avec les L_j et les ℓ_i) prescrites sur y .

0 étant intérieur à F , il existe $\mu \in]0, 1[$ vérifiant $\mu z \in F$. Soit $d > 0$ tel que les éléments de F soient bornés en norme par d . Alors, si $\lambda \in [0, 1]$, les éléments de $\lambda e_1 + (1 - \lambda)F$ sont bornés en norme par $(1 - \lambda)d$.

Si $\lambda \in]0, 1[$ est assez grand, $(1 - \lambda)d < \mu \|z\|$ et donc $\lambda e_1 + \mu z \notin F_x$. Par le point précédent, il existe $i \in I$ tel que $\ell_i(\lambda e_1 + \mu z) > a_i$ ou $j \in J$ tel que $L_j(\lambda e_1 + \mu z) \neq a_j$, et il en va de même pour $e_1 + \mu z$ par un argument de convexité (car $\lambda e_1 + \mu z \in [\mu z, e_1 + \mu z]$). Ceci conclut.



F_x est donc l'ensemble des y vérifiant $\ell_i(y) \leq a_i$ pour $i \in I$, $0 \leq \pi(y) \leq 1$ et $L_j(y) = a_j$ pour $j \in J$.

On peut alors justifier que $F_x \cap G_x$ est une face de F_x en écrivant qu'il s'agit de l'ensemble des $y \in F_x$ vérifiant de plus $L_k(y) = a_k$ pour tout $k \in K$, où $L_k = \ell_k + (a_k - \ell_k(x)) \cdot \pi$ pour $k \in K$.

L'inclusion directe découle du fait que $F_x \cap G_x = (F \cap G)_x$. Inversement, soit $y \in F_x$ qu'on note $y = \lambda x + (1 - \lambda)y_F$ avec $y_F \in F$, et supposons que $L_k(y) = a_k$ pour tout $k \in K$. Le calcul montre que $(1 - \lambda)\ell_k(y_F) = (1 - \lambda)a_k$. Si $\lambda = 1$, on a simplement $y = x \in F_x \cap G_x$. Sinon, $\ell_k(y_F) = a_k$ pour tout $k \in K$, donc $y_F \in F \cap G$ et $y \in F_x \cap G_x$.

- Il reste à voir, par récurrence n que la réalisation du complexe formé des F_x est le polytope P .
 - * Pour $n = 1$, c'est simple : P est un segment $[a, b]$ de \mathbf{R} , et $x \in]a, b[$ dès que $a < b$.
 - * Supposons l'assertion vérifiée à un rang n . Si P est de dimension $\leq n$, on applique l'hypothèse de récurrence. Sinon, on écrit $P = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \forall i \in I, \ell_i(x) \leq a_i\}$ où le système d'équations $(\ell_i)_{i \in I}$ est minimal; ce faisant, $\ell_i(x) < a_i$ pour tout $i \in I$, sans quoi S_P serait non vide et P serait inclus dans un hyperplan affine,¹⁰ donc de dimension $\leq n$.

⁹. Il faut pour cela que $k = n$ et $n \geq 2$. Or si $k = \dim P = 1$, il est simple de voir que la famille des F_x forme un complexe dont la réalisation est P , puisque P est un segment.

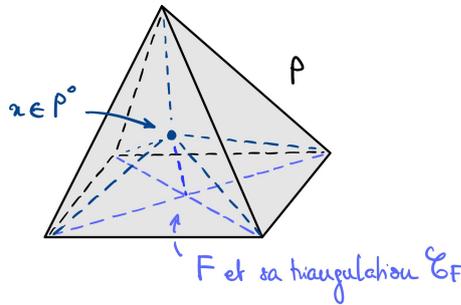
¹⁰. Si $i \in S_P$, la forme linéaire ℓ_i est non nulle (minimalité du système d'équations) et $\{y \in \mathbf{R}^n \mid \ell_i(y) = a_i\}$ est un hyperplan affine contenant P .

Quitte à translater, supposons que $x = 0$. Par finitude de I et continuité des ℓ_i , il existe $r > 0$ tel que $\ell_i(y) \leq a_i$ pour tout $y \in \mathcal{B}(0, r)$. Soit désormais $v \in P$ non nul. Il existe un plus grand $\lambda \geq 1$ tel que $\lambda v \in P$ (compacité de P), et nécessairement $\lambda v \notin P^\circ$ (sinon $\ell_i(\lambda v) < a_i$ pour tout $i \in I$ et λ ne saurait être maximal). La question 22 et le résultat prouvé en remarque (après la question 25) fournissent une face F de dimension n contenant λv , de sorte que $v \in F_x$.

27. Montrons par récurrence sur $\dim P$ qu'un polytope P possède une triangulation.

- * En dimension 1, un polytope est un segment non réduit à un point et contient deux sommets. C'est donc un simplexe, et la triangulation est triviale.
- * Supposons l'assertion vérifiée à un rang $k \in \mathbf{N}^*$, et soit P un polytope de dimension $k + 1$. Si $x \in P^\circ$, la question précédente montre qu'on dispose d'un complexe $(F_x)_F$ de réalisation P , où F décrit l'ensemble des faces de dimension k de P . Soit F une telle face.

L'hypothèse de récurrence fournit une triangulation \mathcal{C}_F de F . Si $T \in \mathcal{C}_F$, on peut noter $T = \text{Conv}(x_1, \dots, x_{k+1})$. Posons $T_F = \text{Conv}(\{x\} \cup T) = \text{Conv}(x, x_1, \dots, x_{k+1})$. Il est de dimension $k + 1$ et possède $k + 2$ sommets. En notant \mathcal{C}'_F l'ensemble des T_F ainsi formés, on obtient une triangulation de T_x . La réunion \mathcal{C} des \mathcal{C}'_F (F décrivant les faces de dimension k de P) est alors une triangulation de P , ce qui conclut.



REMARQUES.

- * Noter qu'un polytope P de dimension k possède au moins $k + 1$ sommets. En effet, s'il en possède au plus k , disons x_1, \dots, x_k , une translation permet de supposer que $x_k = 0$. Par la question 14 : $P = \text{Conv}(0, x_1, \dots, x_{k-1}) \subset \text{Vect}(x_1, \dots, x_{k-1})$ et P est de dimension $\leq k - 1$, absurde.
- * En fait, on peut trouver une triangulation d'un polytope P dont les simplexes sont de même dimension que P et leurs sommets sont tous des sommets de P .

On le montre par récurrence sur $\dim P$, en isolant un sommet x de P et en triangulant les faces de dimension $\dim P - 1$ ne contenant pas x . Si S décrit l'ensemble des simplexes dans les triangulations de ces faces, alors les $S_x = \text{Conv}(S \cup \{x\})$ fournissent une triangulation adéquate de P .

28. • Soit \mathcal{C} un complexe de réalisation $|\mathcal{C}|$ convexe. Comme à la question 24, justifions que les intérieurs relatifs des faces de \mathcal{C} partitionnent $|\mathcal{C}|$. D'abord, un point $x \in |\mathcal{C}|$ appartient à un polytope P de \mathcal{C} , donc à l'intérieur relatif d'une face de P (question 24), donc de \mathcal{C} .

Ensuite, soit F et G deux faces de \mathcal{C} , P et Q deux polytopes les contenant respectivement. Déjà, $P \cap Q$ est une face de P et de Q (par définition d'un complexe), donc un polytope.

Supposons qu'il existe $x \in F^\circ \cap G^\circ$. Alors $F \cap Q$ est non vide, et c'est une face de P (comme intersection des faces F et $P \cap Q$) contenant x . Comme $x \in F^\circ$, nécessairement $F \cap Q = F$ ¹¹ puis $F \subset Q$. De façon symétrique : $G \subset P$. De là : $F, G \subset P \cap Q$, et ce sont même des faces de $P \cap Q$,¹² ce qui permet de se ramener au cadre de la question 24 (où l'on voyait F et G comme des faces d'un polytope). Ainsi, $F^\circ = G^\circ$.

11. L'unique face d'un polytope contenant un élément de son intérieur (relatif) est le polytope lui-même.

12. Notons $P = \{y \in \mathbf{R}^n \mid \ell_i(y) = a_i\}$, $F = F_J$ et $P \cap Q = F_K$. Comme $x \in F^\circ$ et $x \in P \cap Q$, on a $K \subset S_F$. On en déduit que $F = \{y \in P \cap Q \mid \forall j \in S_F, \ell_j(y) = a_j\}$. Si en effet $y \in P \cap Q$ vérifie $\ell_j(y) = a_j$ pour tout $j \in S_F$, l'inclusion $J \subset S_F$ montre que $y \in F$. F est donc une face de $P \cap Q$. Idem pour G .

- Ceci étant montré, on peut conclure. $|\mathcal{C}|$ est un polytope (par convexité, c'est l'enveloppe convexe des sommets des polytopes de \mathcal{C}) de \mathbf{R}^n , donc par les questions 21 et 23 :

$$\chi(\mathcal{C}) = \sum_F (-1)^{\dim F} = \chi_n \left(\sum_F \mathbf{1}_{F^\circ} \right) = \chi_n(\mathbf{1}_{|\mathcal{C}|}) = 1.$$

3. — LE POLYTOPE DE BIRKHOFF.

29. • Il est clair que \mathcal{B}_n est fermé et non-vide (\mathcal{B}_n contient I_n). Si $M \in \mathcal{B}_n$, ses coefficients sont dans $[0, 1]$: \mathcal{B}_n est donc borné, puis compact ($\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ étant de dimension finie). La définition donnée de \mathcal{B}_n montre donc que c'est un polytope de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ ($\simeq \mathbf{R}^{n^2}$).
- Déterminons sa dimension. Si $n = 1$, $\dim \mathcal{B}_n = 0$. Supposons $n \geq 2$. L'application qui à $M \in \vec{\mathcal{B}}_n$ envoie sa matrice extraite $(M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{R})$ est linéaire et injective, donc $\dim \mathcal{B}_n \leq (n-1)^2$. On va montrer que $\dim \mathcal{B}_n = (n-1)^2$.

Notons $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Introduisons pour $i, j \in \llbracket 2, n \rrbracket$ les matrices $F_{i,j} = E_{1,1} - E_{i,1} - E_{1,j} + E_{i,j}$, et notons également $J \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ n'ayant que des coefficients égaux à 1. La famille des $F_{i,j}$ est libre, et si $0 \leq \varepsilon \leq \frac{1}{n}$: $\frac{1}{n}J + \varepsilon F_{i,j} \in \mathcal{B}_n$ pour tous $i, j \in \llbracket 2, n \rrbracket$. Ceci implique que $\dim \mathcal{B}_n \geq (n-1)^2$.

30. Soit $\sigma \in S_n$. Il est simple de voir que $P^\sigma \in \mathcal{B}_n$. Pour montrer que P^σ est un sommet de \mathcal{B}_n , il suffit de dire que $\{P^\sigma\}$ est une face de \mathcal{B}_n , ce qui se voit en écrivant que :

$$\{P^\sigma\} = \{M \in \mathcal{B}_n \mid \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, M_{i,j} = 1 \text{ si } j = \sigma(i) \text{ et } M_{i,j} = 0 \text{ sinon}\}.$$

31. Nécessairement, $n \geq 2$. L'observation de départ est la suivante : là où $M \in \mathcal{B}_n$ possède un coefficient disons d'indice (i, j) non entier (donc dans $]0, 1[$), la ligne i et la colonne j possèdent chacune encore un autre coefficient non entier (dans $]0, 1[$). Il faudra alors itérer.

Formalisons. Soit $(i_0, j_0) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $0 < M_{i_0, j_0} < 1$. Nécessairement, il existe (i_0, j_1) et (i_{-1}, j_0) avec $i_{-1} \neq i_0$ et $j_0 \neq j_1$, vérifiant $0 < M_{i_0, j_1} < 1$ et $0 < M_{i_{-1}, j_0} < 1$. En itérant, on construit une suite $((i_k, j_k))_{k \in \mathbf{Z}}$ de $\llbracket 1, n \rrbracket^2$ vérifiant $0 < M_{i_k, j_k} < 1$, $0 < M_{i_k, j_{k+1}} < 1$ et $i_k \neq i_{k+1}$, $j_k \neq j_{k+1}$.

* Notons $k \geq 1$ le plus petit entier pour lequel il existe $\ell \in \mathbf{Z}$ tel que les couples (i_ℓ, j_ℓ) jusque $(i_{\ell+k-1}, j_{\ell+k-1})$ soient 2 à 2 distincts et $(i_{\ell+k}, j_{\ell+k}) = (i_\ell, j_\ell)$. Un tel k existe par finitude de $\llbracket 1, n \rrbracket^2$; nécessairement $k \geq 2$ car par construction $i_{m+1} \neq i_m$ et $j_{m+1} \neq j_m$ pour tout $m \in \mathbf{Z}$. En posant $(r_m, j_m) = (i_{\ell+m-1}, j_{\ell+m-1})$ pour tout $m \in \llbracket 1, k+1 \rrbracket$, on obtient que $(r_{k+1}, s_{k+1}) = (r_0, s_0)$ et $M_{r_i, s_i}, M_{r_i, s_{i+1}} \in]0, 1[$ pour tout $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$.¹³

* Notons $k \geq 2$ le plus petit entier pour lequel il existe $\ell \in \mathbf{Z}$ tel que les $i_\ell, \dots, i_{\ell+k-1}$ (resp. les $j_\ell, \dots, j_{\ell+k-1}$) soient 2 à 2 distincts et $i_{\ell+k} = i_\ell$ ou $j_{\ell+k} = j_\ell$. Quitte à remplacer M par M^\top ,¹⁴ on peut supposer que $j_{\ell+k} = j_\ell$. On peut alors poser $(r_1, s_1) = (i_\ell, j_\ell)$ jusque $(r_k, s_k) = (i_{\ell+k-1}, j_{\ell+k-1})$ et $(r_{k+1}, s_{k+1}) = (r_1, s_1)$. Les couples $(r_1, s_1), \dots, (r_k, s_k)$ et (r_k, s_{k+1}) sont bien tous deux à deux distincts.

32. • Reprenons les notations de la question précédente, et introduisons :

$$Q = \sum_{i=0}^k (E_{r_i, s_i} - E_{r_i, s_{i+1}}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}).$$

¹³. La formulation $k \geq 2$ de l'énoncé est maladroite, car la première partie de la question est immédiate pour $k = 2$ et la seconde partie nécessite que $k \geq 3$. Nous faisons le choix de conserver l'hypothèse $k \geq 2$, en remplaçant le rôle de (r_k, s_k) dans l'énoncé par celui de (r_{k+1}, s_{k+1}) .

¹⁴. M^\top est encore dans $\mathcal{B}_n \setminus \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$ (la transposition stabilise \mathcal{B}_n). En outre, si $\sigma \in S_n$: $(P^\sigma)^\top = P^{(\sigma^{-1})}$.

Les r_0, \dots, r_k (resp. s_0, \dots, s_k) sont 2 à 2 distincts et $r_{k+1} = r_0, s_{k+1} = s_0$, donc sur chaque ligne ou colonne de Q , la somme des coefficients est nulle. De plus : $M_{r_i, s_i}, M_{r_i, s_{i+1}} \in]0, 1[$ pour $0 \leq i \leq k$, donc pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, $M + tQ$ est à coefficients dans $[0, 1]$ puis dans \mathcal{B}_n pour tout $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.

- Puisque $M + tQ \in \mathcal{B}_n$ pour tout $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ et Q est non-nulle, le point M n'est pas extrémal, donc n'est pas un sommet de \mathcal{B}_n (voir la question 18 et la remarque après). Il s'ensuit qu'un sommet de \mathcal{B}_n est nécessairement un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$. De là, on peut conclure.

En effet, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Z}) \cap \mathcal{B}_n$, chaque ligne de \mathcal{B}_n contient exactement un coefficient non nul, égal à 1. Si $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $\sigma(i) \in \llbracket 1, n \rrbracket$ l'unique indice tel que $M_{i, \sigma(i)} = 1$. Comme de même chaque colonne de \mathcal{B}_n contient exactement un coefficient non nul (égal à 1), σ est dans S_n et $M = P^\sigma$.

4. — DÉVELOPPEMENT DES FRACTIONS RATIONNELLES.

Nous utiliserons un vocabulaire se rapprochant de celui des polynômes (et plus généralement de celui des séries formelles). Si $f \in \mathbf{C}[[\mathbf{Z}^n]]$, on peut écrire que :

$$f = \sum_{\gamma \in \mathbf{Z}^n} f(\gamma)x^\gamma,$$

et on appellera par exemple coefficient de f devant x^γ ($\gamma \in \mathbf{Z}^n$) le complexe $f(\gamma)$. En particulier, f est un élément de $\mathbf{C}[[\mathbf{Z}^n]]$ (qu'on peut voir comme des polynômes de LAURENT à n variables) si et seulement s'il possède un nombre fini de coefficients non nuls.

33. * L'inclusion $\{0\} \subset \mathcal{T}$ est stricte, puisque $\sum_{k \in \mathbf{Z}} x^k \in \mathbf{C}[[\mathbf{Z}]]$ est non nul et :

$$(x - 1) \sum_{k \in \mathbf{Z}} x^k = \sum_{k \in \mathbf{Z}} x^{k+1} - \sum_{k \in \mathbf{Z}} x^k = 0.$$

- * L'inclusion $\mathcal{T} \subset \mathcal{R}$ est stricte. Considérons à cet effet $f = \sum_{k \in \mathbf{N}} x^k$, qui est dans \mathcal{R} puisqu'on a : $(1 - x) \sum_{k \in \mathbf{N}} x^k = 1$. Si $P \in \mathbf{C}[[\mathbf{Z}]]$ est non nul, on peut l'écrire $P = a_\ell x^\ell + \dots + a_m x^m$ avec $\ell \leq m$ dans \mathbf{Z} et $a_\ell \neq 0$. Le coefficient de Pf devant x^ℓ est $a_\ell \neq 0$, donc $Pf \neq 0$ et $f \notin \mathcal{T}$.
- * L'inclusion $\mathcal{R} \subset \mathbf{C}[[\mathbf{Z}]]$ est stricte : notons $f = \sum_{k \geq 1} x^{k^2}$, et fixons $P \in \mathbf{C}[[\mathbf{Z}]]$ non nul, qu'on note $P = a_\ell x^\ell + \dots + a_m x^m$ avec $\ell \leq m$ dans \mathbf{Z} et $a_\ell \neq 0$. Si $N \in \mathbf{N}$ est suffisamment grand, $N^2 - (N - 1)^2 > m - \ell$ et l'unique couple (k, j) de $\mathbf{N}^* \times \llbracket \ell, m \rrbracket$ vérifiant $k^2 + j = N^2 + \ell$ est donc $(k, j) = (N, \ell)$, puis le coefficient de Pf devant $x^{N^2 + \ell}$ vaut $a_\ell \neq 0$. Pf possède donc une infinité de coefficients non nuls, et $Pf \notin \mathbf{C}[[\mathbf{Z}]]$. On en déduit que $f \notin \mathcal{R}$.

REMARQUE.

On prendra garde à ne pas confondre $\mathbf{C}[[\mathbf{Z}^n]]$ avec l'algèbre $\mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]$ des polynômes sur \mathbf{C} à n indéterminées (qui s'identifierait plutôt à $\mathbf{C}[[\mathbf{N}^n]]$).

34. NB : lorsqu'il est écrit dans la définition de I que $Qf = P$, il faut supposer de plus que $Q \neq 0$...

- Soit $f \in \mathbf{C}[[\mathbf{Z}^n]]$ et $P_1, P_2, Q_1, Q_2 \in \mathbf{C}[[\mathbf{Z}^n]]$ avec Q_1, Q_2 non nuls, tels que $Q_1 f = P_1$ et $Q_2 f = P_2$. En calculant $Q_1 Q_2 f$ de deux façons, on obtient que $Q_1 P_2 = Q_2 P_1$, donc que $P_1 / Q_1 = P_2 / Q_2$. Ceci justifie que I est bien définie.
- Soit $f, g \in \mathcal{R}$ et $\lambda \in \mathbf{C}$. Si $P_1, P_2, Q_1, Q_2 \in \mathbf{C}[[\mathbf{Z}^n]]$ sont tels que $Q_1, Q_2 \neq 0$ puis $Q_1 f = P_1$ et $Q_2 g = P_2$, alors $Q_1 Q_2 \cdot (f + \lambda g) = P_1 Q_2 + \lambda P_2 Q_1$ avec $Q_1 Q_2 \neq 0$, donc $f + \lambda g \in \mathcal{R}$ et :

$$I(f + \lambda g) = \frac{P_1 Q_2 + \lambda P_2 Q_1}{Q_1 Q_2} = \frac{P_1}{Q_1} + \lambda \cdot \frac{P_2}{Q_2} = I(f) + \lambda I(g),$$

ce qui justifie que I est \mathbf{C} -linéaire. Si de plus $I(f) = 0$, alors $P/Q = 0 = 0/1$ puis $1 \cdot P = 0 \cdot Q$, et donc $P = 0$. Ainsi, $Qf = 0$ et $f \in \mathcal{T}$. Réciproquement, un élément de \mathcal{T} est clairement dans le noyau de I (car $0/Q = 0$ pour tout $Q \in \mathbf{C}[\mathbf{Z}^n]$ non nul), donc : $\text{Ker}(I) = \mathcal{T}$.

- Si $P \in \mathbf{C}[\mathbf{Z}^n]$, $f \in \mathcal{R}$ et $P_1, Q_1 \in \mathbf{C}[\mathbf{Z}^n]$ vérifient $Q_1 \neq 0$ et $Q_1 f = P_1$, alors $Q_1 P f = P P_1$, et donc on obtient : $I(Pf) = \frac{P P_1}{Q_1} = P \cdot \frac{P_1}{Q_1} = P \cdot I(f)$.

35. • Soit d'abord $P_0/Q_0 \in \mathbf{C}(\mathbf{Z}^n)$ avec $Q_0 \neq 0$ dans $\mathbf{C}[\mathbf{Z}^n]$, qu'on écrit :

$$Q_0 = \sum_{i \in I_0} \lambda_i x^{\gamma_i},$$

où I_0 est fini non-vidé et pour tout $i \in I_0$, $\lambda_i \in \mathbf{C}^*$ et les $\gamma_i \in \mathbf{Z}^n$ sont 2 à 2 distincts. L'injectivité de u fait qu'il existe un unique $i_0 \in I_0$ tel que $u(\gamma_{i_0})$ soit minimal parmi les $u(\gamma_i)$. Si $i \in I_0 \setminus \{i_0\}$, on a $u(\gamma_i - \gamma_{i_0}) = u(\gamma_i) - u(\gamma_{i_0}) > 0$ et on peut écrire :

$$Q_0 = \lambda_{i_0} x^{\gamma_{i_0}} (1 - R_0) \quad \text{avec} \quad R_0 = - \sum_{i \in I_0 \setminus \{i_0\}} \frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}} \cdot x^{\gamma_i - \gamma_{i_0}}.$$

- Ceci permet déjà de justifier l'unicité de s_u , puisque par les conditions (a) et (c) :

$$s_u\left(\frac{P_0}{Q_0}\right) = \lambda_{i_0}^{-1} x^{-\gamma_{i_0}} P_0 \cdot s_u\left(\frac{1}{1 - R_0}\right) = \lambda_{i_0}^{-1} x^{-\gamma_{i_0}} P_0 \cdot \sum_{m \in \mathbf{N}} R_0^m,$$

où la somme $\sum_m R_0^m$ est bien définie, le coefficient devant x^0 de R_0 étant nul.

- Inversement, on définit $s_u(P_0/Q_0) = \lambda_{i_0}^{-1} x^{-\gamma_{i_0}} P_0 \cdot \sum_{m \in \mathbf{N}} R_0^m$ (avec les notations précédentes). Vérifions d'abord que s_u est bien définie.

* D'une part, $(1 - R_0) \cdot \sum_m R_0^m = 1$ donc $s_u(P_0/Q_0) \in \mathcal{R}$.

* D'autre part, si $P_0/Q_0 = P_1/Q_1$ avec $P_1, Q_1 \in \mathbf{C}[\mathbf{Z}^n]$ et $Q_1 \neq 0$, alors avec des notations analogues (l'indice 0 devenant l'indice 1), la relation $P_0/Q_0 = P_1/Q_1$ se réécrit :

$$\frac{\lambda_{i_0}^{-1} x^{-\gamma_{i_0}} P_0}{1 - R_0} = \frac{\lambda_{i_1}^{-1} x^{-\gamma_{i_1}} P_1}{1 - R_1}.$$

En multipliant cette relation par $(1 - R_0)(1 - R_1)(\sum_m R_0^m)(\sum_m R_1^m)$, on obtient :

$$\lambda_{i_0}^{-1} x^{-\gamma_{i_0}} P_0 \cdot \sum_{m \in \mathbf{N}} R_0^m = \lambda_{i_1}^{-1} x^{-\gamma_{i_1}} P_1 \cdot \sum_{m \in \mathbf{N}} R_1^m$$

car $(1 - R_0) \sum_m R_0^m = 1$ et $(1 - R_1) \sum_m R_1^m = 1$. Ceci justifie que $s_u(P_0/Q_0)$ ne dépend pas du système de représentants choisi pour la fraction P_0/Q_0 .

- La construction de s_u montre de façon immédiate qu'elle vérifie la condition (c). Soit ensuite $P \in \mathbf{C}[\mathbf{Z}^n]$. Comme Q_0 est un dénominateur commun à P_0/Q_0 et PP_0/Q_0 :

$$s_u\left(\frac{PP_0}{Q_0}\right) = \lambda_{i_0}^{-1} x^{-\gamma_{i_0}} (PP_0) \cdot \sum_{m \in \mathbf{N}} R_0^m = P \cdot \lambda_{i_0}^{-1} x^{-\gamma_{i_0}} P_0 \cdot \sum_{m \in \mathbf{N}} R_0^m = P \cdot s_u\left(\frac{P_0}{Q_0}\right),$$

donc s_u vérifie la condition (a). Enfin, $(1 - R_0) \sum_{m \in \mathbf{N}} R_0^m = 1$ donc $I(\sum_{m \in \mathbf{N}} R_0^m) = \frac{1}{1 - R_0}$ puis $I \circ s_u(P_0/Q_0) = P_0/Q_0$ car $Q_0 = \lambda_{i_0} x^{\gamma_{i_0}} (1 - R_0)$, et s_u vérifie la condition (b).

5. — SÉRIES D'EULER-MACLAURIN.

AVERTISSEMENT : Nous nous contenterons la plupart du temps de l'intuition géométrique lorsqu'il sera question de cônes convexes, tels que les $C(\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ et les C_F .

5.1. — Rationalité des séries associées aux cônes.

36. Soit $A, B \subset \mathbf{R}^n$ et $\gamma \in \mathbf{Z}^n$. D'une part, A (resp. B) est la réunion disjointe de $A \cap B$ et de $A \setminus (A \cap B)$ (resp. $B \setminus (A \cap B)$), donc : $E_{A \cup B} + E_{A \cap B} = E_{A \setminus (A \cap B)} + E_{B \setminus (A \cap B)} + 2E_{A \cap B} = E_A + E_B$.

D'autre part, $(\gamma + A) \cap \mathbf{Z}^n = \gamma + (A \cap \mathbf{Z}^n)$ car $\gamma \in \mathbf{Z}^n$, donc $E_{\gamma+A} = x^\gamma E_A$ (translation par γ).

37. Soit $v \in \mathbf{R}^n$. Supposons $(\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ libre. Tout élément w de $C(\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ s'écrit donc de façon unique $w = (n_1 + t_1)\gamma_1 + \dots + (n_k + t_k)\gamma_k$ avec les $n_i \in \mathbf{N}$ et les $t_i \in [0, 1[$. En particulier, $w \in \mathbf{Z}^n$ si et seulement si $t_1\gamma_1 + \dots + t_k\gamma_k \in \mathbf{Z}^n$.

Notons $C_0(\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ l'ensemble des $t_1\gamma_1 + \dots + t_k\gamma_k$ pour (t_1, \dots, t_k) décrivant $[0, 1[^k$. Alors :

$$\begin{aligned} E_{v+C(\gamma_1, \dots, \gamma_k)} &= E_{C(\gamma_1, \dots, \gamma_k)} = \sum_{(n_1, \dots, n_k) \in \mathbf{N}^k} E_{n_1\gamma_1 + \dots + n_k\gamma_k + v + C_0(\gamma_1, \dots, \gamma_k)} \\ &= \sum_{(n_1, \dots, n_k) \in \mathbf{N}^k} x^{n_1\gamma_1 + \dots + n_k\gamma_k} E_{v+C_0(\gamma_1, \dots, \gamma_k)} \\ &= \left(\prod_{i=1}^k \sum_{n_i \in \mathbf{N}} x^{n_i\gamma_i} \right) E_{v+C_0(\gamma_1, \dots, \gamma_k)}. \end{aligned}$$

D'une part, $(v + C_0(\gamma_1, \dots, \gamma_k)) \cap \mathbf{Z}^n$ est borné, puis fini : $E_{v+C_0(\gamma_1, \dots, \gamma_k)} \in \mathbf{C}[\mathbf{Z}^n]$. D'autre part, $(1 - x^{\gamma_i}) \sum_{n_i} x^{n_i\gamma_i} = 1$ pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, donc $E_{v+C(\gamma_1, \dots, \gamma_k)}$ est rationnel.

REMARQUE.

Soit $P = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \forall i \in I, \ell_i(x) \leq a_i\}$ un polytope rationnel (cf. partie 5.2). Si $i \in I$, ℓ_i envoie \mathbf{Z}^n dans \mathbf{Z} donc ℓ_i s'identifie à un vecteur ligne de \mathbf{Z}^n . Un sommet s de P est alors solution d'une équation $As = s_0$ avec $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{Z})$ (où $m \leq |I|$) et $s_0 \in \mathbf{Z}^m$, donc $s \in \mathbf{Q}^n$ (par exemple par pivot de GAUSS). Les sommets d'un polytope rationnel sont donc rationnels.

38. Raisonnons par récurrence forte sur le nombre k de vecteurs $\gamma_1, \dots, \gamma_k \in \mathbf{Z}^n$, et supposons de plus que la forme linéaire ℓ de l'énoncé vérifie $\ell(\mathbf{Z}^n) \subset \mathbf{Z}$. Ceci permet de faire en sorte que le polytope suggéré dans l'indication soit rationnel, donc à sommets rationnels.

* Le cas $k = 1$ découle de la question précédente.

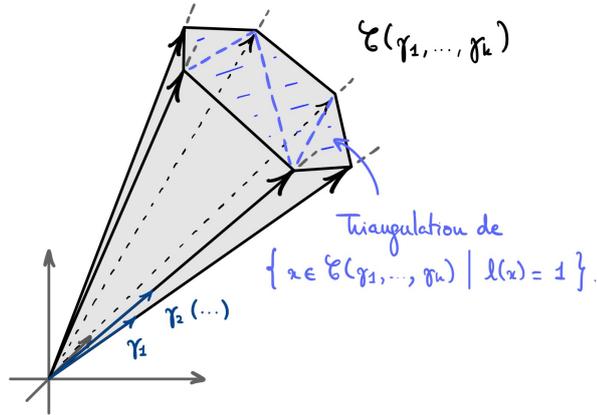
* Supposons l'assertion vraie aux rangs $< k$. Quitte à remplacer 1 par un entier $n \in \mathbf{N}^*$ assez grand, disons que le polytope rationnel $\{x \in C(\gamma_1, \dots, \gamma_k) \mid \ell(x) = 1\}$ est à coefficients entiers.

On note $(\Delta_j)_{1 \leq j \leq m}$ une triangulation de ce polytope, et pour $1 \leq j \leq m$, on note V_j l'ensemble des sommets de Δ_j , qu'on peut supposer être tous dans \mathbf{Z}^n (cf. rq. après la question 27). Si $J \subset \llbracket 1, m \rrbracket$ est non-vide, l'intersection $\bigcap_{j \in J} \Delta_j$ est une face commune aux Δ_j pour $j \in J$ dont l'ensemble des sommets est $V_J = \bigcap_{j \in J} V_j$.

Fixons $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$. Puisque Δ_j est un simplexe, ses sommets forment une famille libre de \mathbf{Z}^n et la question précédente montre que $E_{v+C(V_j)}$ est rationnel. Ensuite, $v + C(\gamma_0, \dots, \gamma_k)$ est l'union des $v + C(V_1), \dots, v + C(V_m)$, donc par la formule du crible :

$$E_{v+C(\gamma_1, \dots, \gamma_k)} = \sum_{j=1}^k E_{v+C(V_j)} + \sum_{\substack{J \subset \llbracket 1, m \rrbracket \\ |J| \geq 2}} (-1)^{|J|-1} E_{v+C(V_J)}.$$

Si $|J| \geq 2$ et $j \in J$, V_J contient strictement moins d'éléments que V_j , sans quoi $\Delta_j \subset \Delta_k$ si $k \in J \setminus \{j\}$ puis $\Delta_j = \Delta_k$ par égalité des dimensions (cf. rq. après la question 27). Comme le polytope $\{x \in C(\gamma_1, \dots, \gamma_k) \mid \ell(x) = 1\}$ contient $\leq k + 1$ sommets, $|V_J| \leq k - 1$ et $E_{v+C(V_J)}$ est rationnel par récurrence. Par combinaisons linéaires, ceci conclut.



5.2. — Le théorème de BRION.

39. L'intersection d'un nombre fini de faces étant soit vide, soit une face commune à celles-ci, il suffit de montrer que si y voit un point $x \in P$, alors y voit l'unique face F de P dont $x \in F^\circ$.

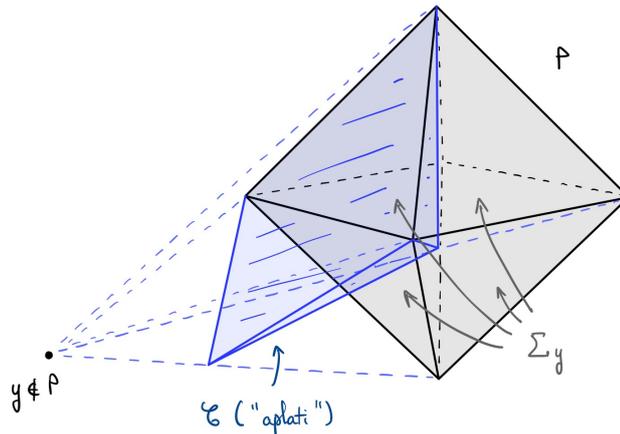
Notons $P = \{y \in \mathbf{R}^n \mid \forall i \in I, \ell_i(y) \leq a_i\}$. Puisque $x \in F^\circ$, F est la plus petite face contenant x et on peut noter $F = F_J$ où J est précisément l'ensemble des $j \in I$ tels que $\ell_j(x) = a_j$. Supposons que y ne voit pas un point $x' \in F$, donc qu'il existe $\lambda_0 \in]0, 1[$ tel que $(1 - \lambda_0)x' + \lambda_0 y \in P$. Comme $x' \in F : \ell_j(y) \leq a_j$ pour tout $j \in J$. Soit $\lambda \in]0, 1[$. On va obtenir une contradiction en montrant que $x_\lambda = (1 - \lambda)x' + \lambda y \in P$ pour λ suffisamment petit.

D'une part, si $j \in J$, le point précédent montre que $\ell_j(x_\lambda) \leq a_j$. D'autre part, comme $\ell_i(x) < a_i$ pour tout $i \in I \setminus J$, la continuité des ℓ_i et la finitude de $I \setminus J$ permettent de choisir $\lambda \in]0, 1[$ tel que $\ell_i(x_\lambda) \leq a_i$ pour tout $i \in I \setminus J$, ce qui conclut.

40. • Comme $y \notin P$, il existe $i_0 \in I$ tel que $\ell_{i_0} \neq 0$ et $\ell_{i_0}(y) > a_{i_0}$. Notons H l'hyperplan affine $\{y \in \mathbf{R}^n \mid \ell_{i_0}(y) = a_{i_0}\}$ et posons $\mathcal{C} = \{[y, z] \cap H \mid z \in \Sigma_y\}$ (qu'on peut voir comme la projection centrale du complexe Σ_y depuis le point y , sur H). On peut montrer que :

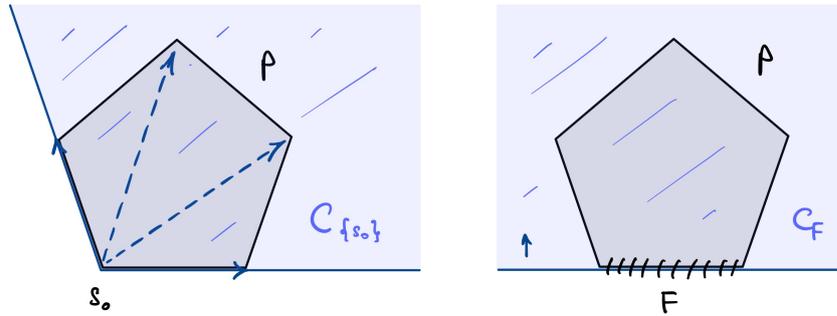
- * \mathcal{C} est muni d'une structure de complexe de réalisation convexe ;
- * il existe une bijection entre les faces du complexe Σ_y et les faces de \mathcal{C} , et cette bijection envoie une face de Σ_y sur une face de même dimension de \mathcal{C} .

Ceci impliquera que $\chi(\Sigma_y) = \chi(\mathcal{C})$ puis comme voulu que $\chi(\Sigma_y) = 1$ par la question 28.



- Si $z \in \Sigma_y$, l'intersection $[y, z] \cap H$ est réduite précisément à un unique point $p(z) \in H$. L'existence de $p(z)$ découle du fait que $\ell_{i_0}(y) > a_{i_0}$ et $\ell(z) \leq a_{i_0}$ (car $z \in P$); s'il n'y a pas unicité, on obtiendrait que $\ell_{i_0}(y) = a_{i_0}$.¹⁵ Ceci fournit une bijection $p : \Sigma_y \rightarrow \mathcal{C}$ (qui est la projection centrale depuis y sur H sus-mentionnée). Justifions très rapidement les assertions annoncées.
 - * Soit F une face de Σ_y . $p|_F$ est la restriction d'une bijection affine, donc $p(F)$ est un polytope, de même dimension que F . En outre, si V_F désigne l'ensemble des sommets de F , alors $p(V_F)$ est l'ensemble des sommets de $p(F)$.
 - * Si F, G sont des faces de Σ_y , l'intersection $p(F) \cap p(G)$ s'écrit $\text{Conv}(p(V))$ où $V = V_F \cap V_G$; elle est soit vide, soit une face commune à $p(F)$ et $p(G)$ (essentiellement car $\text{Conv}(V)$ est soit vide, soit une face commune à F et G).
 - * Si $x_0, x_1 \in \Sigma_y$ et $\lambda \in [0, 1]$, le point $x_\lambda = (1 - \lambda)x_0 + \lambda x_1$ est dans P , donc le segment $[y, x_\lambda]$ passe par un point de Σ_y . On en déduit que $[p(x_0), p(x_1)] \subset \mathcal{C}$, puis que \mathcal{C} est convexe.

41. • (\Rightarrow) Supposons que $\ell_j(y) \leq a_j$ pour tout $j \in S_F$. Fixant $x \in F^\circ$, si $i \in I$, on a $\ell_i(x) = a_i$ lorsque $i \in S_F$ et $\ell_i(x) < a_i$ sinon. Par finitude de $I \setminus S_F$ et continuité des ℓ_i , il existe $\lambda \in]0, 1[$ tel que $\ell_i((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq a_i$ pour tout $i \in I$, donc $(1 - \lambda)x + \lambda y \in P$ et y ne peut pas voir x .
- (\Leftarrow) Supposons que $y \notin C_F$; soit $i_0 \in S_F$ tel que $\ell_{i_0}(y) > a_{i_0}$ et $x \in F$. Si $\lambda \in]0, 1]$, alors $\ell((1 - \lambda)x + \lambda y) > a_{i_0}$ (cf. ¹⁵) et donc $[x, y] \cap P = \{x\}$, puis y voit F .
42. • Soit s_0 un sommet de P ; on notera s_1, \dots, s_m les autres sommets de P . Par rationalité de P , on trouve une forme linéaire $\ell : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $\ell(\mathbf{Z}^n) \subset \mathbf{Z}$ et $\ell(s_i - s_0) > 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$. Comme $C_{\{s_0\}} = s_0 + C(s_1 - s_0, \dots, s_m - s_0)$, la question 38 montre que $E_{C_{\{s_0\}}}$ est rationnel.¹⁶
- Soit F une face de P de dimension ≥ 1 . Si $x \neq y$ sont des sommets de F , alors $x, y \in \mathbf{Q}^n$ puis $\gamma = N(x - y) \in \mathbf{Z}^n$ pour N suffisamment grand. De là, l'espace affine $x + \vec{F}$ engendré par F contient la droite $x_0 + \gamma \mathbf{Z}^n$ et le cône C_F est invariant par translation par γ . Par la question 36 : $(1 - x^\gamma)E_{C_F} = 0$ et E_{C_F} est de torsion (et a fortiori est rationnel).



43. Soit $\gamma \in \mathbf{Z}^n$; il faut comparer les coefficients devant x^γ de E_P et de $\sum_F (-1)^{\dim F} E_{C_F}$.
- * Supposons que $\gamma \in P$. D'une part, $E_P(\gamma) = 1$. D'autre part, $\gamma \in C_F$ pour toute face F de P (si on note P comme dans l'énoncé, $\ell_i(\gamma) \leq a_i$ pour tout $i \in I$ et I contient S_F), donc $\sum_F (-1)^{\dim F} E_{C_F}(\gamma) = \sum_F (-1)^{\dim F} = 1$ par la question 24.
 - * Supposons que $\gamma \notin P$. D'une part, $E_P(\gamma) = 0$. D'autre part, si F est une face de P , alors $\gamma \notin C_F$ si et seulement si $F \subset \Sigma_\gamma$ (question 41), et donc par les questions 24 et 40 :

$$\sum_{F \text{ face de } P} (-1)^{\dim F} E_{C_F}(\gamma) = \sum_{F \text{ face de } P} (-1)^{\dim F} - \sum_{F \text{ face de } \Sigma_\gamma} (-1)^{\dim F} = 1 - 1 = 0.$$

¹⁵. La restriction de ℓ_{i_0} à la droite affine contenant z et y s'identifie à une fonction affine de \mathbf{R} dans \mathbf{R} , qui est constante dès qu'elle prend la même valeur en deux points distincts.

¹⁶. Il faudrait a priori que les $s_i - s_0$ soient à coordonnées entières. Néanmoins, la remarque précédant la question 38 indique que les $s_i - s_0$ sont dans \mathbf{Q}^n , donc si $N \in \mathbf{N}^*$ est assez grand, $N(s_i - s_0) \in \mathbf{Z}^n$ pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ et $C(s_1 - s_0, \dots, s_m - s_0) = C(N(s_1 - s_0), \dots, N(s_m - s_0))$.

44. Si F est une face de dimension ≥ 1 de P , la question 42 indique que E_{C_F} est de torsion, et donc $IE_{C_F} = 0$. Moyennant la question précédente et la linéarité de I , on en déduit le théorème de BRION :

$$IE_P = \sum_{v \text{ sommet de } P} IE_{C_v}.$$

REMARQUES.

- * Noter, comme P est compact, qu'il possède un nombre fini de points de \mathbf{Z}^n et donc que la fraction rationnelle IE_P s'identifie au polynôme E_P .
- * On peut voir ce théorème comme une généralisation annoncée en introduction du sujet de la formule $\sum_{k=m}^{n-1} x^k = \frac{x^m - x^n}{1-x}$, qu'on peut retrouver en appliquant le théorème de BRION au polytope rationnel $[m, n-1]$ (on sait retrouver — même s'il faut avouer que c'est loufoque — les expressions de IE_{C_m} et $IE_{C_{n-1}}$ à partir de la question 37).

5.3. — Application au théorème d'EHRHART.

Nous n'avons pas résolu les questions 46 à 48. Des éléments de réponse plausibles pourraient se trouver dans les notes de cours "Lattices in Optimization" d'Andreas PAFFEHOLZ, aux sections 9 et 10.

45. Notons (comme à la question 42) s_0 un sommet de P et s_1, \dots, s_m les autres sommets. D'abord, les s_i sont dans \mathbf{Z}^n (ils sont parmi les $\gamma_1, \dots, \gamma_k$) et si $t \in \mathbf{N}^*$, les sommets de tP sont précisément ts_0, \dots, ts_m . Comme $C_{s_0} = s_0 + C(s_1 - s_0, \dots, s_m - s_0)$ et $C_{ts_0} = ts_0 + C(t(s_1 - s_0), \dots, t(s_m - s_0)) = ts_0 + C(s_1 - s_0, \dots, s_m - s_0)$, on obtient $C_{ts_0} - ts_0 = C_{s_0} - s_0$, et par le théorème de BRION :

$$IE_{tP} = \sum_{v \text{ sommet de } tP} IE_{C_{tv}} = \sum_{v \text{ sommet de } P} x^{tv-v} IE_{C_v}.$$

46. Déterminer $\text{Card}(tP \cap \mathbf{Z}^n)$ revient à compter le nombre de monômes apparaissant dans $E_{tP} = IE_{tP}$ (E_{tP} étant polynomial car tP est borné), soit encore à prendre $\sum_{\gamma \in \mathbf{Z}^n} E_{tP}(\gamma)$. Malheureusement, les IE_{C_v} sont rarement polynomiaux et l'écriture $\sum_{\gamma} IE_{C_v}(\gamma)$ est dépourvue de sens.

Une façon de faire serait peut-être d'appliquer s_u à la formule de la question 45 pour un bon choix de u (question 35), afin de se ramener dans $\mathbf{C}[[\mathbf{Z}^n]]$, mais ceci semble délicat dans la mesure où u doit convenir pour tous les C_v .

Sinon, une autre façon de faire serait peut-être d'étudier plus en détail les fractions rationnelles IE_{C_v} en reprenant les raisonnements menés aux questions 37, 38 et 42.

47. Comme les sommets de P ne sont plus à coordonnées entières mais rationnelles, si m est un multiple commun aux dénominateurs des coordonnées des sommets de P , alors on peut s'attendre à ce que $t \mapsto \text{Card}(tP \cap \mathbf{Z}^n)$ soit quasi-polynomiale avec des coefficients (fonctions $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{C}$) de période m .
48. Si on parvient à montrer à la question 46 que $f_P(t) = \text{Card}(tP \cap \mathbf{Z}^n)$ a pour degré la dimension de P , alors cette question découle immédiatement de la question 29.