

Proposition de corrigé de l'épreuve de mathématiques D

U - Filière MP

2025.

Par *Eloi Descamps*

Version du 23 mai 2025

Dans ce document, nous proposons deux rédactions. La première ne présente que les arguments essentiels, laissant au lecteur le soin de traiter les détails techniques. La seconde entre dans les détails, en s'efforçant de justifier précisément tout ce qui dépasse le cadre strict du programme de spé. Un lecteur souhaitant résoudre cette épreuve et ayant besoin d'un coup de pouce pourra d'abord consulter la version courte pour y trouver des indications, puis se référer, dans un second temps, à la correction détaillée.

Deux autres corrigés (au moment de la rédaction du présent document) ont été mis en ligne sur CPGE Paradise : un premier, partiel (jusqu'à la question 37), rédigé par Jean Nougayrède et Pierre Vandaële, et un second, presque complet (ne traitant pas en détail les trois dernières questions), rédigé par André Chambrillon et Yanis Hedjem. Je conseille également la lecture de ces corrigés, certaines démonstrations y étant abordées selon des méthodes différentes. J'ai intégré certaines de leurs idées dans cette version, et leur lecture m'a permis de déceler des erreurs. Je les remercie pour leur travail.

Avertissement : Je ne suis ni professeur de mathématiques, ni spécialiste du sujet de cette épreuve. Je ne peux donc garantir ni l'exactitude de mes propositions, ni leur optimalité. L'essentiel du sujet porte sur l'étude des polytopes, qui sont des objets géométriques aux propriétés fortement visuelles. Nous nous sommes efforcés, bien qu'inspirés par l'intuition géométrique, de ne pas y recourir dans les démonstrations. Il en résulte certaines preuves déraisonnablement longues, en raison de la quantité d'éléments à vérifier. Il n'est donc pas évident de déterminer le niveau de rédaction attendu par les concepteurs du sujet.

N.B. : Si vous repérez des erreurs de français ou de mathématiques, ou si vous avez des questions ou des suggestions (notamment si les corrections courtes ne sont pas assez lapidaires), n'hésitez pas à envoyer un e-mail à :

eloi.descamps@u-paris.fr

Points entiers dans les polytopes

* * *

L'objectif de ce problème est de prouver une généralisation en dimension supérieure de l'égalité $\sum_{i=m}^{n-1} x^i = \frac{x^m - x^n}{1-x}$ où $m < n$ sont deux entiers, découverte par Michel Brion en 1988.

* * *

Le problème comprend une partie préliminaire, puis 5 parties numérotées de 1 à 5. Les parties 1 et 2 sont indépendantes l'une de l'autre. La partie 3 repose sur des notions et sur des résultats de la partie 2. La partie 4 est indépendante des parties précédentes.

À tout moment, il est possible d'admettre le résultat d'une question et de l'utiliser ultérieurement, à condition de l'indiquer clairement.

Le sujet est long et comporte des questions délicates : il est tout à fait normal de bloquer sur des questions, et il est possible de réussir l'épreuve sans traiter une part substantielle du sujet.

La clarté, la concision et la précision de la rédaction seront prises en compte dans la notation.

* * *

Notations

On note $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ l'ensemble des entiers positifs ou nuls et $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ l'ensemble des entiers strictement positifs. On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs, $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. Pour un ensemble A on note $\text{Card } A$ son cardinal.

Lorsque $n \geq 1$ est un nombre entier, on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor x \rfloor$ le plus grand entier inférieur ou égal à x et $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

Partie préliminaire

Une fonction $P : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ est dite quasi-polynomiale s'il existe $k \in \mathbb{N}$ et $(k+1)$ fonctions périodiques $c_0, \dots, c_k : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ telles que $P(n) = \sum_{i=0}^k c_i(n)n^i$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Si la fonction c_k n'est pas nulle, on dira que le degré de la fonction P est k et que la fonction c_k est son coefficient dominant.

(1) Montrer que l'ensemble des fonctions quasi-polynomiales forme un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

Version courte :

C'est une vérification immédiate dès lors que l'on observe que deux fonctions périodiques de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$ possèdent toujours une période commune.

Version détaillée :

Cela repose essentiellement sur le fait qu'une combinaison linéaire de fonctions $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ périodiques est également périodique. En effet, soient $c_1, c_2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions périodiques. Notons p_k une période de c_k pour $k = 1, 2$, et posons $p = p_1 p_2$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, on a :

$$\lambda_1 c_1(n+p) + \lambda_2 c_2(n+p) = \lambda_1 c_1(n+p_1 p_2) + \lambda_2 c_2(n+p_2 p_1) = \lambda_1 c_1(n) + \lambda_2 c_2(n)$$

ce qui montre que p est une période de $\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2$.

Une fois ce fait établi, on peut passer à la démonstration :

- L'ensemble des fonctions quasi-polynomiales est un sous-ensemble de l'espace vectoriel complexe des fonctions de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$.
- La fonction nulle est quasi-polynomiale (pour $k = 0$ et c_0 la fonction nulle).
- Si $P, Q : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ sont deux fonctions quasi-polynomiales et si $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, alors on peut écrire :

$$P(n) = \sum_{i=0}^k c_i(n)n^i, \quad Q(n) = \sum_{i=0}^k d_i(n)n^i,$$

où les c_i et d_i sont des fonctions périodiques (quitte à ajouter des termes nuls pour avoir le même degré k). Alors, pour tout $i = 0, \dots, k$, la fonction $\lambda c_i + \mu d_i$ est périodique, ce qui implique que $\lambda P + \mu Q$ est également quasi-polynomiale.

Ainsi, par la caractérisation des sous-espaces vectoriels, l'ensemble des fonctions quasi-polynomiales est un espace vectoriel complexe.

(2) Montrer que si $P, Q : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ sont deux fonctions quasi-polynomiales telles que $P(n) = Q(n)$ pour tout $n \geq 0$, alors $P = Q$.

Version courte :

Par linéarité, il suffit de vérifier que si P est nulle sur $\mathbb{N}$, alors elle l'est également sur $\mathbb{Z}$. En introduisant p comme une période commune à tous les coefficients de P , on considère l'évaluation de P en $pn + j$ pour $n \in \mathbb{Z}$ et $j \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$. Cette expression est un polynôme en n , nul sur $\mathbb{N}$, donc nul sur $\mathbb{Z}$. Comme cela vaut pour tout $j \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, on en déduit que P est identiquement nulle.

Version détaillée :

Comme on a montré que l'ensemble des fonctions quasi-polynomiales forme un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, il suffit de prouver que si $P : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction quasi-polynomiale qui s'annule sur $\mathbb{N}$, alors P est nécessairement la fonction nulle sur $\mathbb{Z}$. On écrit alors : $P(n) = \sum_{i=0}^k c_i(n)n^i$, où chaque $c_i : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction périodique. Dans la question (1), on a montré que la somme de deux fonctions périodiques est elle-même périodique, en utilisant le fait que le produit de leurs périodes est une période commune. En généralisant ce raisonnement aux $(k+1)$ fonctions $c_0, c_1, \dots, c_k$, on peut supposer qu'elles sont toutes périodiques de période $p \in \mathbb{N}$.

Soit $j \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$. Comme P est nulle sur $\mathbb{N}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P(pn + j) = \sum_{i=0}^k c_i(pn + j)(pn + j)^i = \sum_{i=0}^k c_i(j)(pn + j)^i = 0.$$

Ainsi, le polynôme $P_j = \sum_{i=0}^k c_i(j)X^i$ s'annule en une infinité de points $X = pn + j$ avec $n \in \mathbb{N}$, ce qui implique que P_j est le polynôme nul. Autrement dit, pour tout $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$, on a $c_i(j) = 0$. Cela étant vrai pour toute valeur $j \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, et comme chaque fonction c_i est périodique de période p , on en déduit que $c_i(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Ainsi

$$\forall i \in \llbracket 0, k \rrbracket, \forall n \in \mathbb{Z}, c_i(n) = 0$$

ce qui donne $\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}, P(n) = 0}$. Par conséquent, si deux fonctions quasi-polynomiales P et Q coïncident sur $\mathbb{N}$, alors elles sont égales sur $\mathbb{Z}$.

Remarque : Dans cette démonstration, nous avons sorti l'artillerie lourde en exploitant l'infinité de racines d'un polynôme. Toutefois, l'ensemble d'annulation $\mathbb{N}$ n'est pas un ensemble quelconque : il permet notamment de considérer des limites à l'infini. Cela autorise une rédaction plus rapide et moins redondante pour la question suivante, en se concentrant sur le comportement asymptotique du terme dominant de la fonction quasi-polynomiale. C'est l'approche adoptée dans les corrigés de Jean Nougayrède et Pierre Vandaële, ainsi que dans celui d'André Chambrillon et Yanis Hedjem.

Dans la suite, on dira que $P : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ est quasi-polynomiale si c'est la restriction à $\mathbb{N}$ d'une application quasi-polynomiale (uniquement définie grâce au résultat de la question (2)).

- (3) Montrer qu'une fonction $P : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ est quasi-polynomiale si et seulement si il existe un entier $m \in \mathbb{N}^*$ et m polynômes $P_0, \dots, P_{m-1}$ à coefficients complexes tels que pour tout $j \in \{0, \dots, m-1\}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$ congru à j modulo m , on ait $P(n) = P_j(n)$.

Version courte :

$\Rightarrow$: Soit m une période commune des c_i . On vérifie alors que $P_j = \sum_{i=0}^k c_i(j)X^i$ convient.

$\Leftarrow$: En posant $P_j(X) = \sum_{i=0}^k c_i(j)X^i$ et en prolongeant les fonctions $c_i : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ par m -périodicité, on vérifie que pour $n \in \mathbb{Z}$, $P(n) = \sum_{i=0}^k c_i(n)n^i$, et donc que P est une fonction quasi-polynomiale.

Version détaillée :

$\Rightarrow$:

Pour le sens direct, il s'agit de réutiliser l'argument présenté dans la question (2). Si P est une fonction quasi-polynomiale, que l'on peut écrire, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, sous la forme $P(n) = \sum_{i=0}^k c_i(n)n^i$, alors il existe un entier $m > 0$ qui est une période commune à toutes les fonctions c_i . On définit alors, pour tout $j \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$, le polynôme $P_j = \sum_{i=0}^k c_i(j)X^i \in \mathbb{C}[X]$.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \equiv j \pmod{m}$, on peut écrire $n = qm + j$ pour un certain $q \in \mathbb{Z}$. On vérifie alors que

$$P(n) = \sum_{i=0}^k c_i(n)n^i = \sum_{i=0}^k c_i(qm + j)n^i = \sum_{i=0}^k c_i(j)n^i = \boxed{P_j(n)}.$$

$\Leftarrow$:

Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $P_0, \dots, P_{m-1}$ des polynômes à coefficients complexes. Définissons une fonction $P : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ par la règle suivante : pour tout $n \in \mathbb{Z}$, si $n \equiv j \pmod{m}$, alors $P(n) = P_j(n)$. Écrivons chaque P_j sous la forme $P_j(X) = \sum_{i=0}^k c_i(j)X^i$, où les $c_i(j) \in \mathbb{C}$ et où, comme précédemment, on peut supposer que la borne supérieure k est indépendante de j .

On étend alors chaque application $j \mapsto c_i(j)$ en une fonction $c_i : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ périodique de période m . Ainsi, pour tout $n = qm + j \in \mathbb{Z}$, avec $j \in \{0, \dots, m-1\}$, on a

$$P(n) = P_j(n) = \sum_{i=0}^k c_i(j)n^i = \sum_{i=0}^k c_i(qm+j)n^i = \sum_{i=0}^k c_i(n)n^i.$$

Comme chaque c_i est périodique, P est bien une fonction quasi-polynomiale.

- (4) Soit ω une racine de l'unité et $p \in \mathbb{N}^*$. Notons $\sum_{n=0}^{+\infty} R(n)x^n$ le développement en série entière de $\frac{1}{(1-\omega x)^p}$.
Monter que R est une fonction quasi-polynomiale puis déterminer son degré et son coefficient dominant.

Version courte :

On a le développement $\frac{1}{(1-\omega x)^p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-p}{n} (-\omega x)^n$. Alors, $R(n) = (-\omega)^n \binom{-p}{n} = \omega^n \binom{p+n-1}{p-1}$ est clairement quasi-polynomial de degrés $p-1$ et de coefficient dominant $\frac{\omega^n}{(p-1)!}$.

Version détaillée :

On sait que $\frac{1}{(1-\omega x)^p}$ est développable en série entière dès que $|\omega x| = |x| < 1$, selon la formule

$$\frac{1}{(1-\omega x)^p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-p}{n} (-\omega x)^n,$$

où $\binom{-p}{n} = \frac{(-p)(-p-1)\cdots(-p-n+1)}{n!}$ est l'extension naturelle des coefficients binomiaux aux entiers négatifs. On en déduit alors que $R(n) = \binom{-p}{n} (-\omega)^n$. En manipulant cette expression, on obtient

$$\begin{aligned} R(n) &= \frac{(-p)(-p-1)\cdots(-p-n+1)}{n!} (-\omega)^n = \omega^n \frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!}, \\ &= \omega^n \binom{p+n-1}{n} = \omega^n \binom{p+n-1}{p-1}, \\ &= \omega^n \frac{(p+n-1)(p+n-2)\cdots(n+1)}{(p-1)!}, \\ &= \frac{\omega^n}{(p-1)!} n^{p-1} + \text{termes de degré inférieur.} \end{aligned}$$

Comme ω est une racine de l'unité, le facteur ω^n , multiplié par les constantes (indépendantes de n) issues du développement polynomial $\frac{(p+n-1)(p+n-2)\cdots(n+1)}{(p-1)!}$, est périodique. Par conséquent, R est une fonction quasi-polynomiale.

De plus, comme indiqué précédemment, le terme de plus haut degré est $\frac{\omega^n}{(p-1)!} n^{p-1}$, ce qui implique que

R est de degré $p-1$ et que son coefficient dominant est $\frac{\omega^n}{(p-1)!}$.

1 Décomposition d'un entier en parties

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_k) \in (\mathbb{N}^*)^k$ un k -uplet d'entiers strictement positifs. Lorsque $k \geq 2$, on les suppose premiers entre eux dans leur ensemble. On définit une fonction $P : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$P(n) = \text{Card} \left\{ (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k \mid n_1 a_1 + \dots + n_k a_k = n \right\},$$

puis on définit la série entière $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n)x^n$.

- (5) Montrer que le rayon de convergence de F est supérieur ou égal à 1.

Version courte :

La majoration $n \in \mathbb{N} : P(n) \leq (n+1)^k$, la règle de d'Alembert et la comparaison de séries permettent de conclure.

Version détaillée :

Si $(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k$ sont tels que $n_1 a_1 + \dots + n_k a_k = n$, alors il est clair que $0 \leq n_i \leq n$ pour tout $i = 1, \dots, k$. On en déduit la majoration suivante : $P(n) \leq (n+1)^k$. Par la règle de d'Alembert comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^k}{(n+1)^k} = 1$, la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^k x^n$ à pour rayon de convergence 1. L'inégalité $0 \leq P(n) \leq (n+1)^k$, implique alors que le rayon de convergence de F est au moins 1.

(6) Prouver l'égalité $F(x) = \prod_{i=1}^k \frac{1}{1-x^{a_i}}$, pour tout $x \in]-1, 1[$.

Version courte :

Immédiat en développant par produits de Cauchy.

Version détaillée :

Si $x \in]-1, 1[$, alors $x^{a_i} \in]-1, 1[$ également, et l'on peut donc développer en série entière : $\frac{1}{1-x^{a_i}} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n a_i}$. Par le produit de Cauchy, valable puisque toutes les séries considérées ont un rayon de convergence supérieur à 1, on obtient alors

$$\prod_{i=1}^k \frac{1}{1-x^{a_i}} = \prod_{i=1}^k \left(\sum_{n_i=0}^{\infty} x^{n_i a_i} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{n_1, \dots, n_k=0 \\ n_1 a_1 + \dots + n_k a_k = n}}^{\infty} x^n \right) = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} P(n) x^n},$$

puisque le nombre de termes dans la somme intérieure est exactement $P(n) = \text{Card} \{ (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k \mid n_1 a_1 + \dots + n_k a_k = n \}$.

(7) En déduire que P est une fonction quasi-polynomiale.

Version courte :

On observe que l'on peut factoriser $1 - x^a = \prod_{k=0}^{a-1} (1 - \omega_a^k x)$. Ainsi par décomposition en éléments simples. On peut écrire

$$F(x) = \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{l=1}^{p_{\omega}} \frac{\lambda_{\omega, l}}{(1 - \omega x)^l},$$

où Ω est l'ensemble des racines de $\prod_{i=1}^k (1 - x^{a_i})$ et pour $\omega \in \Omega$, p_{ω} est la multiplicité de ω . On peut alors développer $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n) x^n$. Par les questions (4) puis (1), P est alors quasi-polynomiale.

Version détaillée :

On commence par observer que, pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, on a : $1 - x^a = \prod_{k=0}^{a-1} (1 - \omega_a^k x)$ où $\omega_a = \exp(2i\pi/a)$. En effet, les ω_a^k sont précisément les racines de $1 - x^a$, dont le coefficient dominant est -1 . Ainsi,

$$\begin{aligned} 1 - x^a &= - \prod_{k=0}^{a-1} (x - \omega_a^k) = (-1)^{a-1} \prod_{k=0}^{a-1} \omega_a^k \prod_{k=0}^{a-1} (1 - x \omega_a^{-k}) \\ &= (-1)^{a-1} \omega_a^{\sum_{k=0}^{a-1} k} \prod_{k=0}^{a-1} (1 - x \omega_a^k) = (-1)^{a-1} \omega_a^{a(a-1)/2} \prod_{k=0}^{a-1} (1 - x \omega_a^k) \\ &= \prod_{k=0}^{a-1} (1 - x \omega_a^k), \end{aligned}$$

puisque $\omega_a^{a(a-1)/2} = \exp(2i\pi a(a-1)/2a) = \exp(i\pi(a-1)) = (-1)^{a-1}$ et que dans le produit de la première

ligne, les ensembles $\{\omega_a^k | k = 0, \dots, a-1\}$ et $\{\omega_a^{-k} | k = 0, \dots, a-1\}$ coïncident. On peut alors écrire

$$F(x) = \prod_{i=1}^k \frac{1}{1-x^{a_i}} = \prod_{i=1}^k \prod_{l_i=0}^{a_i-1} \frac{1}{1-\omega_{a_i}^{l_i} x} = \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{l=1}^{p_\omega} \frac{\lambda_{\omega,l}}{(1-\omega x)^l},$$

où cette dernière égalité résulte d'une décomposition en éléments simples. On a défini :

$$\Omega = \{\omega_{a_i}^l | i \in \llbracket 1, k \rrbracket, l \in \llbracket 0, a_i - 1 \rrbracket\},$$

comme l'ensemble des racines de l'unité apparaissant dans le double produit ci-dessus. Pour chaque $\omega \in \Omega$, on note

$$p_\omega = \text{Card}\{(i, l) | i \in \llbracket 1, k \rrbracket, l \in \llbracket 0, a_i - 1 \rrbracket, \text{ et } \omega_{a_i}^l = \omega\},$$

c'est-à-dire le nombre de fois où la racine ω apparaît dans le produit. D'après la question (4), on sait que pour tout $\omega \in \Omega$ et tout $l \in \mathbb{N}^*$, on peut développer $\frac{1}{(1-\omega x)^l} = \sum_{n=0}^{\infty} R_{\omega,l}(n) x^n$ où $R_{\omega,l}$ est une fonction quasi-polynomiale. Il en résulte que

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{l=1}^{p_\omega} \lambda_{\omega,l} R_{\omega,l}(n) x^n.$$

Par conséquent, on a $P = \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{l=1}^{p_\omega} \lambda_{\omega,l} R_{\omega,l}$ et, d'après la question (1), une combinaison linéaire de fonctions quasi-polynomiales étant encore quasi-polynomiale, on en déduit que P est alors également quasi-polynomiale.

(8) Calculer le coefficient dominant de P .

Version courte :

Le cas $k = 1$ est clair, on suppose alors $k > 1$. Comme les a_i sont premiers entre eux, on observe que $\omega = 1$ est la seule racine commune à tous les polynômes $1 - x^{a_i}$. Avec les notations de la question précédente, le terme $\frac{\lambda_{1,k}}{(1-x)^k}$ est le seul possédant un pôle d'ordre k dans la décomposition en éléments simples de F . La question (4) montre alors que c'est ce terme seul qui contribue au terme de degré $k-1$ dans le développement en série entière, d'où $\deg P = k-1$. Comme les calculs donnent $\lambda_{1,k} = 1/\prod a_i$, le coefficient dominant de P est donc $\frac{1}{(k-1)! \prod a_i}$.

Version détaillée :

Il s'agit de reprendre le raisonnement de la question précédente en précisant le degré des différents termes. Il est nécessaire de traiter le cas $k = 1$ séparément, car tous les termes ont alors le même degré. Dans ce cas, on a

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{na_1}.$$

Ainsi, $P : n \mapsto \mathbb{1}_{a_1 | n}$, qui est bien une fonction quasi-polynomiale de degré 0, de coefficient dominant $n \mapsto \mathbb{1}_{a_1 | n}$.

On suppose désormais $k > 1$ et l'on reprend les notations de la question précédente. Nous avons vu dans la question (4) que $\deg R_{\omega,l} = l-1$. Comme le degré des fonctions quasi-polynomiales satisfait les mêmes propriétés que celui des polynômes, on a

$$\deg P \leq \max_{\omega,l} \deg R_{\omega,l} = \max_{\omega} \deg R_{\omega,p_\omega}.$$

On peut en réalité être encore plus précis. En effet, si $\omega = 1$, alors 1 est racine de tous les polynômes $(1-x^{a_i})$, donc $p_1 = k$. Réciproquement, si $p_\omega = k$, alors pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, on a $\omega^{a_i} = 1$. En notant $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{d}\right)$, cela implique que d divise chacun des a_i . Or, nous avons supposé que les a_i sont premiers entre eux, donc $d = 1$ et ainsi $\omega = 1$. Par conséquent, il n'existe qu'une seule fonction quasi-polynomiale $R_{\omega,l}$ de degré maximal $k-1$, correspondant à $\omega = 1$ et $l = k$. Il reste à calculer $\lambda_{1,k}$. D'après les méthodes

de décomposition en éléments simples, on a

$$\begin{aligned}\lambda_{1,k} &= \lim_{x \rightarrow 1} F(x)(1-x)^k = \lim_{x \rightarrow 1} \prod_{i=1}^k \frac{1-x}{1-x^{a_i}} = \lim_{x \rightarrow 1} \prod_{i=1}^k \frac{1}{\sum_{l=0}^{a_i-1} x^l} \\ &= \prod_{i=1}^k \frac{1}{\sum_{l=0}^{a_i-1} 1} = \prod_{i=1}^k \frac{1}{a_i} \neq 0.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que $\deg P = k - 1$, et que le coefficient dominant de P est égal à $\lambda_{1,k}$ fois celui de $R_{1,k}$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{(k-1)! \prod a_i}.$$

On suppose dans la suite de cette partie que $k = 2$.

- (9) On suppose dans cette question que $(a_1, a_2) = (2, 3)$. Construire une fonction $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ de période 6 telle que $P(n) = \frac{n+\phi(n)}{6}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Version courte :

Par un raisonnement combinatoire directe on obtient $P(n) = \lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 1$ si n est pair et $P(n) = \lfloor \frac{n-3}{6} \rfloor + 1$ si n est impair. Ainsi, la fonction

$$\phi : n \mapsto \begin{cases} 6 - 6 \left\{ \frac{n}{6} \right\}, & \text{si } n \text{ est pair} \\ 3 - 6 \left\{ \frac{n-3}{6} \right\}, & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

convient. Sinon on utilise la question suivante pour obtenir l'expression ($j = e^{2i\pi/3}$)

$$\phi(n) = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}(-1)^n + \frac{2}{1-j}j^n + \frac{2}{1-j^2}j^{2n}.$$

Version détaillée :

Première méthode : ^a On observe que, dans ce cas simple, $P(n)$ peut être calculé directement. Si $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ sont tels que $2n_1 + 3n_2 = n$, alors on constate que n_2 et n ont nécessairement la même parité.

- Si n est pair, on peut écrire $n_2 = 2k$, puis $n_1 = \frac{n-6k}{2}$. Le paramètre k doit alors satisfaire $0 \leq k \leq \frac{n}{6}$. Ainsi, dans ce cas, on obtient $P(n) = \lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 1 = \frac{n}{6} - \left\{ \frac{n}{6} \right\} + 1$.
- Si n est impair, on peut écrire $n_2 = 2k + 1$, puis $n_1 = \frac{n-6k-3}{2}$. Le paramètre k doit alors vérifier $0 \leq k \leq \frac{n-3}{6}$. Et, dans ce cas, on a $P(n) = \lfloor \frac{n-3}{6} \rfloor + 1 = \frac{n}{6} - \left\{ \frac{n-3}{6} \right\} + \frac{1}{2}$.

Ainsi, la fonction ϕ définie par la formule suivante, et qui est bien périodique de période 6, convient

$$\phi : n \mapsto \begin{cases} 6 - 6 \left\{ \frac{n}{6} \right\}, & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 3 - 6 \left\{ \frac{n-3}{6} \right\}, & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

En notant $r : \mathbb{Z} \rightarrow \llbracket 0, 5 \rrbracket$ la fonction qui associe à tout entier le reste de sa division euclidienne par 6, on vérifie, en utilisant la relation $r(k) = 6 \left\{ \frac{k}{6} \right\}$, que ϕ peut être décrite par la formule plus compacte :

$$\phi(n) = \delta_{n \not\equiv 1[6]} - r(n),$$

où $\delta_{n \not\equiv 1[6]}$ vaut 1 si $n \not\equiv 1[6]$, et 0 sinon.

Seconde méthode :

(Bien plus long et redondante vis-à-vis de la suite)

Il s'agit de reprendre de manière entièrement explicite les calculs effectués dans les questions (7) et (8) pour ce cas particulier. On part de l'égalité $F(x) = \frac{1}{1-x^2} \frac{1}{1-x^3} = \frac{1}{(1-x)^2} \frac{1}{1+x} \frac{1}{1-jx} \frac{1}{1-j^2x}$, où on a noté $j = e^{2i\pi/3}$. Par décomposition en éléments simples, on obtient

$$F(x) = \frac{A}{(1-x)^2} + \frac{B}{1-x} + \frac{C}{1+x} + \frac{D}{1-jx} + \frac{E}{1-j^2x}.$$

Nous déterminons les coefficients A, B, C, D et E par les méthodes classiques. $A = 1/6$ à déjà été calculé pour obtenir le coefficient dominant en question (8). De même, on a

$$C = \lim_{x \rightarrow -1} F(x)(1+x) = \frac{1}{4} \frac{1}{1+j} \frac{1}{1+j^2} = \frac{1}{4} \frac{1}{1+j^2+j+1} = \frac{1}{4},$$

$$D = \lim_{x \rightarrow j^2} F(x)(1-jx) = \frac{1}{(1-j^2)^2} \frac{1}{1+j^2} \frac{1}{1-j} = \frac{1}{(1-j^2)} \frac{1}{1-j} \frac{1}{1-j} = \frac{1}{1-j^2-j+1} \frac{1}{1-j} = \frac{1}{3} \frac{1}{1-j},$$

$$E = \lim_{x \rightarrow j} F(x)(1-j^2x) = \frac{1}{(1-j)^2} \frac{1}{1+j} \frac{1}{1-j^2} = \frac{1}{(1-j)} \frac{1}{1-j^2} \frac{1}{1-j^2} = \frac{1}{1-j^2-j+1} \frac{1}{1-j^2} = \frac{1}{3} \frac{1}{1-j^2},$$

en utilisant les relations classiques $j^3 = 1$ et $1+j+j^2 = 0$. Par ailleurs, on a $\lim_{x \rightarrow \infty} xF(x) = 0 = -B + C + \frac{D}{-j} + \frac{E}{-j^2}$ d'où

$$B = C - j^2D - jE = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \left(\frac{j^2}{1-j} + \frac{j}{1-j^2} \right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \underbrace{\left(\frac{j^2}{j(j^2-1)} + \frac{j}{1-j^2} \right)}_{=0} = \frac{1}{4}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{6} \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{1-x} + \frac{1}{4} \frac{1}{1+x} + \frac{1}{3} \frac{1}{1-j} \frac{1}{1-jx} + \frac{1}{3} \frac{1}{1-j^2} \frac{1}{1-j^2x}, \\ &= \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n + \frac{1}{3} \frac{1}{1-j} \sum_{n=0}^{\infty} j^n x^n + \frac{1}{3} \frac{1}{1-j^2} \sum_{n=0}^{\infty} j^{2n} x^n. \end{aligned}$$

On en déduit

$$P(n) = \frac{n+1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{(-1)^n}{4} + \frac{1}{3} \frac{1}{1-j} j^n + \frac{1}{3} \frac{1}{1-j^2} j^{2n} = \frac{1}{6} \left(n + \frac{5}{2} + \frac{3}{2}(-1)^n + \frac{2}{1-j} j^n + \frac{2}{1-j^2} j^{2n} \right).$$

Ainsi, la fonction $\phi(n) = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}(-1)^n + \frac{2}{1-j} j^n + \frac{2}{1-j^2} j^{2n}$, qui est bien périodique de période 6, convient.

a. J'étais passé à coté de cette méthode, trop concentré sur l'enchaînement des questions. Je renvoie au corrigé de Jean Nougayrède et Pierre Vandaële dans lequel j'ai lu cet argument.

- (10) On pose $a = a_1, b = a_2, \omega_a = \exp(2i\pi/a)$ et $\omega_b = \exp(2i\pi/b)$. À partir d'un développement en élément simple de la fraction $\frac{1}{(1-x^a)(1-x^b)}$, montrer la formule

$$P(n) = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{n}{ab} + \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{a-1} \frac{\omega_a^{-jn}}{1 - \omega_a^{jb}} + \frac{1}{b} \sum_{k=1}^{b-1} \frac{\omega_b^{-kn}}{1 - \omega_b^{ka}} \quad (*)$$

pour tout entier $n \geq 0$.

Version courte :

On décompose $F(x) = \frac{\alpha_1}{1-x} + \frac{\alpha_2}{(1-x)^2} + \sum_{j=1}^{a-1} \frac{\beta_j}{1-\omega_a^j x} + \sum_{k=1}^{b-1} \frac{\gamma_k}{1-\omega_b^k x}$ en éléments simples. Les méthodes classiques donnent : $\alpha_2 = \frac{1}{ab}$, $\beta_j = \frac{1}{a} \frac{1}{1-\omega_a^{-jb}}$ et $\gamma_k = \frac{1}{b} \frac{1}{1-\omega_b^{-ka}}$. Pour obtenir α_1 , on considère $\lim_{x \rightarrow 1} [F(x)(1-x)^2]'$, ce qui donne $\alpha_1 = \frac{1}{2ab}(a+b-2)$. On obtient ainsi la formule souhaitée, en développant chaque terme en série et en effectuant les changements de variables $j \rightarrow a-j$ et $k \rightarrow b-k$ dans les deux sommes.

Version détaillée :

Il s'agit de reproduire les calculs de la question (9), mais pour des valeurs générales de a et b . On écrit alors

$$F(x) = \frac{\alpha_1}{1-x} + \frac{\alpha_2}{(1-x)^2} + \sum_{j=1}^{a-1} \frac{\beta_j}{1-\omega_a^j x} + \sum_{k=1}^{b-1} \frac{\gamma_k}{1-\omega_b^k x}.$$

(On rappelle, comme discuté en (8), que, puisque a et b sont premiers entre eux, 1 est la seule racine commune à $1-x^a$ et $1-x^b$.) Comme précédemment, nous avons déjà calculé $\alpha_2 = \frac{1}{ab}$. Pour $j = 1, \dots, a-1$,

en écrivant $F(x) = \frac{1}{1-x^b} \frac{1}{1-\omega_a^j x} \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^{a-1} \frac{1}{1-\omega_a^l x}$, on obtient

$$\beta_j = \lim_{x \rightarrow \omega_a^{-j}} F(x)(1 - \omega_a^j x) = \frac{1}{1 - \omega_a^{-jb}} \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^{a-1} \frac{1}{1 - \omega_a^{l-j}} = \frac{1}{1 - \omega_a^{-jb}} \prod_{l=1}^{a-1} \frac{1}{1 - \omega_a^l} = \frac{1}{a} \frac{1}{1 - \omega_a^{-jb}},$$

en utilisant la formule $\prod_{l=1}^{a-1} (1 - \omega_a^l x) = \sum_{l=0}^{a-1} x^l$ (conséquence de la factorisation de $1 - x^a$ et de l'identité remarquable $1 - x^a = (1 - x) \sum_{l=0}^{a-1} x^l$), qu'on évalue en $x = 1$. Par symétrie entre les rôles de a et b , on obtient immédiatement pour $k = 1, \dots, b-1$, $\gamma_k = \frac{1}{b} \frac{1}{1 - \omega_b^{-ka}}$. Il reste maintenant à déterminer α_1 . On procède différemment de la question précédente, en observant

$$\lim_{x \rightarrow 1} [F(x)(1-x)^2]' = \lim_{x \rightarrow 1} \left[-\alpha_1 + \sum_{j=1}^{a-1} \left(\frac{\beta_j (x-1)^2}{1 - \omega_a^j x} \right)' + \sum_{k=1}^{b-1} \left(\frac{\gamma_k (x-1)^2}{1 - \omega_b^k x} \right)' \right] = -\alpha_1.$$

Or, on a

$$[F(x)(1-x)^2]' = \left[\frac{1}{\sum_{j=1}^{a-1} x^j} \frac{1}{\sum_{k=1}^{b-1} x^k} \right]' = -\frac{\sum_{j=1}^{a-1} j x^{j-1}}{\left(\sum_{j=1}^{a-1} x^j \right)^2 \sum_{k=1}^{b-1} x^k} - \frac{\sum_{k=1}^{b-1} k x^{k-1}}{\left(\sum_{k=1}^{b-1} x^k \right)^2 \sum_{j=1}^{a-1} x^j}.$$

Cela donne

$$\alpha_1 = \frac{\sum_{j=1}^{a-1} j}{a^2 b} + \frac{\sum_{k=1}^{b-1} k}{b^2 a} = \frac{a(a-1)}{2a^2 b} + \frac{b(b-1)}{2b^2 a} = \frac{1}{2ab} (a+b-2).$$

Nous obtenons ainsi l'expression explicite de $F(x)$ en éléments simples, puis en série

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2ab} (a+b-2) \frac{1}{1-x} + \frac{1}{ab} \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{a-1} \frac{1}{1 - \omega_a^{-jb}} \frac{1}{1 - \omega_a^j x} + \frac{1}{b} \sum_{k=1}^{b-1} \frac{1}{1 - \omega_b^{-ka}} \frac{1}{1 - \omega_b^k x} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2ab} (a+b-2) x^n + \frac{1}{ab} (n+1) x^n + \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{a-1} \frac{1}{1 - \omega_a^{-jb}} (\omega_a^j x)^n + \frac{1}{b} \sum_{k=1}^{b-1} \frac{1}{1 - \omega_b^{-ka}} (\omega_b^k x)^n \right). \end{aligned}$$

On en déduit pour $n \geq 0$

$$\begin{aligned} P(n) &= \frac{1}{2ab} (a+b-2) + \frac{1}{ab} (n+1) + \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{a-1} \frac{\omega_a^{jn}}{1 - \omega_a^{-jb}} + \frac{1}{b} \sum_{k=1}^{b-1} \frac{\omega_b^{kn}}{1 - \omega_b^{-ka}} \\ &= \boxed{\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{n}{ab} + \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{a-1} \frac{\omega_a^{-jn}}{1 - \omega_a^{jb}} + \frac{1}{b} \sum_{k=1}^{b-1} \frac{\omega_b^{-kn}}{1 - \omega_b^{ka}}}, \end{aligned}$$

en utilisant que $j \mapsto a-j$ (resp. $k \mapsto b-k$) est une bijection de $\llbracket 1, a-1 \rrbracket$ (resp. $\llbracket 1, b-1 \rrbracket$) dans lui-même.

(11) Démontrer que

$$P(n) = \frac{n}{ab} - \left\{ \frac{b^* n}{a} \right\} - \left\{ \frac{a^* n}{b} \right\} + 1$$

pour tout entier $n \geq 0$, où a^* et b^* sont des entiers vérifiant $a^* a = 1$ modulo b et $b^* b = 1$ modulo a respectivement.

Indication. On pourra utiliser la formule (*) pour $b = 1$.

Version courte :

Si $b = 1$, $P(n) = \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor + 1$ est directement obtenue par un raisonnement combinatoire. En identifiant avec la

formule (*), on obtient la relation

$$\frac{1}{a} \sum_{j=1}^{a-1} \frac{\omega_a^{-jn}}{1 - \omega_a^j} = -\left\{ \frac{n}{a} \right\} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2a}.$$

De plus, l'application $j \mapsto b^*j$ induit une bijection de $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ dans lui-même, d'où la relation $\sum_{j=1}^{a-1} \frac{\omega_a^{-jn}}{1 - \omega_a^j} = \sum_{j=1}^{a-1} \frac{\omega_a^{-jb^*n}}{1 - \omega_a^j}$. En combinant ces deux formules, on obtient la relation (*).

Version détaillée :

On suit l'indication, en considérant d'abord le cas où $b = 1$. L'astuce consiste à remarquer que, dans ce cas, le problème du calcul de P peut être directement résolu par un raisonnement combinatoire, ce qui permet de simplifier le calcul des sommes complexes de la formule (*). En effet, pour $b = 1$, on a

$$P(n) = \text{Card}\{(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2 \mid an_1 + n_2 = n\} = \text{Card}\{n_1 \in \mathbb{N} \mid 0 \leq an_1 \leq n\} = \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor + 1.$$

En égalisant cela avec la formule (*), on obtient

$$\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor + 1 = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2} + \frac{n}{a} + \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{a-1} \frac{\omega_a^{-jn}}{1 - \omega_a^j},$$

d'où

$$\frac{1}{a} \sum_{j=1}^{a-1} \frac{\omega_a^{-jn}}{1 - \omega_a^j} = \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor - \frac{n}{a} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2a} = -\left\{ \frac{n}{a} \right\} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2a}.$$

Passons maintenant au cas général, où $a, b \in \mathbb{N}^*$ sont premiers entre eux. Dans ce cas, on sait que a est inversible modulo b (et réciproquement), ce qui justifie les notations de l'énoncé. On observe que l'application $j \mapsto b^*j$ induit une bijection de $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ dans lui-même. Ainsi, on a

$$\sum_{j=1}^{a-1} \frac{\omega_a^{-jn}}{1 - \omega_a^j} = \sum_{j=1}^{a-1} \frac{\omega_a^{-jb^*n}}{1 - \omega_a^j}.$$

Par symétrie, on obtient une formule similaire en échangeant les rôles de a et b . On peut alors calculer $P(n)$ à partir de la formule (*) en utilisant la relation obtenue précédemment en remplaçant n par b^*n . On a ainsi

$$\begin{aligned} P(n) &= \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{n}{ab} + \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{a-1} \frac{\omega_a^{-jn}}{1 - \omega_a^j} + \frac{1}{b} \sum_{k=1}^{b-1} \frac{\omega_b^{-kn}}{1 - \omega_b^k} \\ &= \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{n}{ab} + \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{a-1} \frac{\omega_a^{-jb^*n}}{1 - \omega_a^j} + \frac{1}{b} \sum_{k=1}^{b-1} \frac{\omega_b^{-ka^*n}}{1 - \omega_b^k} \\ &= \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{n}{ab} + \left(-\left\{ \frac{b^*n}{a} \right\} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2a} \right) + \left(-\left\{ \frac{a^*n}{b} \right\} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2b} \right) \\ &= \boxed{\frac{n}{ab} - \left\{ \frac{b^*n}{a} \right\} - \left\{ \frac{a^*n}{b} \right\} + 1}. \end{aligned}$$

2 Étude des polytopes

Soit $n \geq 1$ un entier. On commence par une série de définitions.

- On dit qu'un sous-ensemble compact non vide $P \subset \mathbb{R}^n$ est un polytope s'il existe un ensemble fini non vide I et si pour tout $i \in I$ il existe une forme linéaire $\ell_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et un réel $a_i \in \mathbb{R}$ tels que

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \ell_i(x) \leq a_i, \forall i \in I\}.$$

- Pour toute partie $X \subset \mathbb{R}^n$, on note $\vec{X}$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par les éléments de la forme

$x - y$ où $x, y \in X$. On appelle dimension de P et on note $\dim P$ la dimension de $\vec{P}$.

— On dit que $F \subset P$ est une face de P si $F \neq \emptyset$ et s'il existe $J \subset I$ tel que $F = F_J$, où par définition

$$F_J = \{x \in P \mid \ell_j(x) = a_j, \forall j \in J\}.$$

— Réciproquement, si F est une face de P , on pose $S_F = \{i \in I \mid \ell_i(x) = a_i, \forall x \in F\}$. Enfin on appelle intérieur relatif de F l'ensemble F° défini par

$$F^\circ = \{x \in P \mid \ell_i(x) = a_i \iff i \in S_F\}.$$

— On appelle sommet de P une face de dimension 0.

— Pour tout $X \subset \mathbb{R}^n$, on note $\text{Conv}(X)$ l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ pouvant s'écrire $\sum_{i=1}^k t_i x_i$ où $k \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \dots, x_k \in X$ et $t_1, \dots, t_k$ sont des réels positifs ou nuls vérifiant $\sum_{i=1}^k t_i = 1$. C'est l'enveloppe convexe de X , à savoir le plus petit ensemble convexe contenant X .

Dans la suite du sujet, on admettra que les notions de face et d'intérieur relatif ne dépendent que du polytope P , et pas du système d'équations choisi pour les représenter.

2.1 Enveloppe convexe des sommets

Dans cette section, on se donne un polytope $P \subset \mathbb{R}^n$.

(12) Vérifier que toute face F de P est un polytope et que $\dim F < \dim P$ si $F \neq P$.

Version courte :

Par définition, F est fermé et borné. De plus, F est l'ensemble des points de P qui satisfont également les inégalités $-\ell_i(x) \leq -a_i$ pour tout $i \in S_F$. Ainsi, F est clairement un polytope.

Si $F \neq P$, alors il existe un point $x_0 \in P$ et un indice $i \in S_F$ tels que $\ell_i(x_0) \neq a_i$. On observe alors les inclusions $\vec{F} \subset \ker \ell_i$, $\vec{F} \subset \vec{P}$, et $\vec{P} \not\subset \ker \ell_i$. Par conséquent, l'égalité $\dim F = \dim P$ mènerait à une contradiction.

Version détaillée :

Soit F une face de P . Alors, en gardant les notations des définitions, il existe un ensemble $J \subset I$ tel que $F = F_J$. On observe alors que

$$F = P \cap \bigcap_{j \in J} \ell_j^{-1}(\{a_j\}).$$

Ainsi, étant donné que F est une intersection de fermés (qui sont eux-mêmes des images réciproques de fermés par des applications continues) F est un fermé et, donc, un compact (puisque'il est inclus dans le compact P). De plus par définition F est non vide. Enfin, on considère $\tilde{J}$ une copie de J (disjointe de I) et on définit pour $\tilde{j} \in \tilde{J}$, les formes linéaires $\ell_{\tilde{j}} = -\ell_j$ ainsi que les réels, $a_{\tilde{j}} = -a_j$. On a alors,

$$F = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \ell_i(x) \leq a_i, \forall i \in I \cup \tilde{J}\right\}.$$

En effet, on a bien les équations qui forcent $x \in P$, et pour $j \in J$, les inégalités $\ell_j(x) \leq a_j$ et $\ell_{\tilde{j}}(x) \leq a_{\tilde{j}}$ se combinent pour donner la condition $\ell_j(x) = a_j$. Ainsi F est bien un polytope.

Supposons maintenant que $F \neq P$. Comme il est évident que $\vec{F} \subset \vec{P}$, on a $\dim F \leq \dim P$. Montrons que l'inégalité est bien stricte. Il doit exister un indice $j \in J$ et un point $x_0 \in P$ tel que $\ell_j(x_0) \neq a_j$ (car le contraire impliquerait que $P = F$). Pour $x, y \in F$, on observe que $\ell_j(x - y) = \ell_j(x) - \ell_j(y) = a_j - a_j = 0$. On en conclue donc que $\vec{F} \subset \ker \ell_j$. Inversement, si on prends $y \in F \subset P$ (notons que F n'est pas vide par définition d'une face), alors $\ell_j(x_0 - y) \neq 0$. Cela donne que $\vec{P} \not\subset \ker \ell_j$. On a donc bien $\dim F < \dim P$ car sinon on aurait $\vec{F} = \vec{P} = \ker \ell_j$.

(13) Montrer que P a un nombre fini de faces et au moins un sommet.

Version courte :

La première partie de cette question est claire. Pour montrer que P possède un sommet, on considère une face F de dimension minimale et on démontre par l'absurde que $\dim F = 0$. On commence par montrer que $F \setminus F^\circ \neq \emptyset$. Si $F^\circ = \emptyset$, $F \setminus F^\circ$ ne peut pas être vide sinon, on prend $x_0 \in F^\circ$ et $d \in \left(\bigcap_{j \in S_F} \ker \ell_j \right) \setminus \{0\}$. En posant $\lambda_0 = \sup\{\lambda \geq 0 \mid x_0 + \lambda d \in P\}$, on a $x = x_0 + \lambda_0 d \in F \setminus F^\circ$.

Ainsi, pour $x \in F \setminus F^\circ$, il existe un indice $i \in I \setminus S_F$ tel que $\ell_i(x) = a_i$, ce qui garantit que $F_{S_F \cup \{i\}}$ est une face de dimension strictement inférieure. On obtient alors une contradiction avec la minimalité de F , sauf si $\dim F = 0$.

Version détaillée :

Comme une face est forcément de la forme F_J pour $J \subset I$, il y a au plus autant de faces que de sous-ensemble de I i.e., $2^{\text{Card } I}$. P a donc un nombre fini de faces.

Pour montrer l'existence d'un sommet, c'est-à-dire d'une face de dimension 0, on considère F comme étant une face de dimension minimale et on suppose, par l'absurde, que $\dim F > 0$. L'idée de la preuve est de se déplacer le long de la face F , jusqu'à sortir de P . Le bord de la face permet alors de définir une face de dimension strictement inférieure.

On note $J = S_F$, de sorte que $F = F_J$ et J est 'maximal'. L'objectif est alors de montrer qu'on peut trouver $x \in F$ tel que $\ell_i(x) = a_i$ pour un indice $i \notin J$, ce qui nous assurera que $F_{J \cap \{i\}}$ est une face de dimension strictement plus petite. Soit alors $x_0 \in F$. Si x_0 vérifie déjà la propriété voulue, il n'y a rien à faire. Supposons donc que ce ne soit pas le cas, c'est-à-dire que $x_0 \in F^\circ$. Comme observé en question (12), $\vec{F} \subset \ker \ell_j$ dès que $j \in J$, on a alors

$$\vec{F} \subset \bigcap_{j \in J} \ker \ell_j.$$

Par définition, $\dim \vec{F} = \dim F > 0$ donc $\bigcap_{j \in J} \ker \ell_j \neq \{0\}$. Ainsi il existe $d \in \bigcap_{j \in J} \ker \ell_j \setminus \{0\}$. En raison du choix de d , on observe que pour $\lambda \in \mathbb{R}$, et $j \in J$,

$$\ell_j(x_0 + \lambda d) = \ell_j(x_0) + \lambda \ell_j(d) = a_j$$

Ainsi, on a $x_0 + \lambda d \in F$ si et seulement si $x_0 + \lambda d \in P$ (les équations supplémentaires imposées par F sont automatiquement satisfaites ; d donne une direction pour se 'déplacer' le long de la face). On observe de plus que l'ensemble $\{i \in I \mid \ell_i(d) > 0\}$ est forcément non vide car sinon

$$\forall i \in I, \forall \lambda \geq 0, \ell_i(x_0 + \lambda d) \leq \ell_i(x_0) \leq a_i.$$

Cela signifie que $x_0 + \lambda d \in P$ pour tout $\lambda \geq 0$. Or, comme P est borné, cela ne peut être le cas, car, par inégalité triangulaire, $\|x_0 + \lambda d\| \geq \lambda \|d\| - \|x_0\| \rightarrow \infty$ lorsque $\lambda \rightarrow \infty$. Ainsi, on peut poser

$$\lambda_0 = \min_{\substack{i \in I \\ \ell_i(d) > 0}} \frac{a_i - \ell_i(x_0)}{\ell_i(d)} \geq 0.$$

(En fait, $\lambda_0 = \sup\{\lambda \geq 0 \mid x_0 + \lambda d \in P\}$.) En notant i_0 l'indice pour lequel le minimum est atteint, on peut poser $x = x_0 + \lambda_0 d$. On a alors $\ell_{i_0}(x) = a_{i_0}$. Par ailleurs, pour tout $i \in I$, on a bien $\ell_i(x) \leq a_i$: en effet, si $\ell_i(d) \leq 0$, l'inégalité est immédiate ; sinon, si $\ell_i(d) > 0$, elle est assurée par la minimalité de λ_0 . On en déduit que $x \in P$, et de plus que $i_0 \notin J$, car par définition $\ell_j(d) = 0$ pour tout $j \in J$, alors qu'ici $\ell_{i_0}(d) > 0$.

On a donc montré l'existence d'un point $x \in F$ et d'un indice $i_0 \notin J$ tel que $\ell_{i_0}(x) = a_{i_0}$. On peut alors conclure que $F_{J \cup \{i_0\}}$ est une face de P , car elle est non vide (elle contient x). Or, comme $J = S_F$, il existe nécessairement un point $y \in F$ tel que $\ell_{i_0}(y) \neq a_{i_0}$. L'inclusion $F_{J \cup \{i_0\}} \subset F$ est donc stricte. La question (12) permet alors de conclure que $\dim F_{J \cup \{i_0\}} < \dim F$, ce qui contredit la minimalité de $\dim F$. On en déduit donc que $\dim F = 0$, et par conséquent, P possède au moins un sommet.

(14) Soit V l'ensemble des sommets de P . Montrer que $P = \text{Conv}(V)$.

Version courte :

$\text{Conv}(V) \subset P$: Cela découle directement de la convexité de P .

$P \subset \text{Conv}(V)$: On procède par récurrence sur la dimension de la face F contenant $x \in P$. Si $\dim F = 0$, alors x est un sommet de P . Si $\dim F > 0$, on considère, comme précédemment, un vecteur $d \in \bigcap_{j \in J} \ker \ell_j \setminus \{0\}$, et on définit

$$\lambda_{\pm} = \sup\{\lambda \geq 0 \mid x \pm \lambda d \in P\}.$$

Les points $x_{\pm} = x \pm \lambda_{\pm} d$ appartiennent alors à des faces de dimension strictement inférieure à $\dim F$ et la décomposition $x = \frac{\lambda_-}{\lambda_+ + \lambda_-} x_+ + \frac{\lambda_+}{\lambda_+ + \lambda_-} x_-$ permet de conclure par récurrence que $x \in \text{Conv}(V)$.

Version détaillée :

$\text{Conv}(V) \subset P$:

D'une part, il est clair que $V \subset P$. De plus, P est convexe. En effet, il est défini par les inégalités $\ell_i(x) \leq a_i$ pour $i \in I$. Ainsi, si $x, y \in P$ et $t \in [0, 1]$, on a :

$$\ell_i(tx + (1-t)y) = t\ell_i(x) + (1-t)\ell_i(y) \leq ta_i + (1-t)a_i = a_i.$$

Donc $tx + (1-t)y \in P$. Il s'ensuit que $\text{Conv}(V) \subset P$.

$P \subset \text{Conv}(V)$:

C'est le sens délicat, qui nécessite de montrer qu'un point $x \in P$ peut s'écrire comme une combinaison convexe des sommets. On procède par récurrence sur la dimension des faces de P , suivant une idée similaire à celle utilisée dans la question précédente : à partir d'un point de P , on se déplace "le long" de P dans deux directions opposées, jusqu'à atteindre le bord. Cela fournit une décomposition convexe en termes de points appartenant à des faces de dimension inférieure, ce qui permet de conclure par récurrence. Plus précisément, on démontre la propriété suivante, pour $k \in \llbracket 0, \dim P \rrbracket$, notée $\mathcal{P}(k)$: "Pour tout $x \in P$, si $x \in F$ où F est une face telle que $\dim F \leq k$, alors $x \in \text{Conv}(V)$ ".

- Si $x \in F$ avec $\dim F = 0$, alors x est un sommet de P , donc $x \in \text{Conv}(V)$.
- Soit $k \in \llbracket 1, \dim P \rrbracket$ et supposons la propriété $\mathcal{P}(k-1)$ vraie. Soit $x \in P$, et soit F une face de dimension minimale contenant x . Si $\dim F < k$, le résultat découle directement de l'hypothèse de récurrence. Supposons donc $\dim F = k$.

On reprend la construction de la question (13), sans en redonner tous les détails. On introduit, comme précédemment, un vecteur $d \in \bigcap_{j \in S_F} \ker \ell_j \setminus \{0\}$ (non vide puisque $\dim F > 0$). On définit $\lambda_{\pm}$ par

$$\lambda_+ = \min_{\substack{i \in I \\ \ell_i(d) > 0}} \frac{a_i - \ell_i(x)}{\ell_i(d)} > 0 \quad \text{et} \quad \lambda_- = \min_{\substack{i \in I \\ \ell_i(d) < 0}} \frac{\ell_i(x) - a_i}{\ell_i(d)} > 0.$$

Les mêmes arguments que précédemment montrent que $x_+ = x + \lambda_+ d \in F$, $x_- = x - \lambda_- d \in F$, et que $x_{\pm}$ appartiennent à des faces de dimension strictement inférieure à k . De plus,

$$\frac{\lambda_-}{\lambda_+ + \lambda_-} x_+ + \frac{\lambda_+}{\lambda_+ + \lambda_-} x_- = \frac{1}{\lambda_+ + \lambda_-} (\lambda_+ x + \lambda_+ \lambda_- d + \lambda_- x - \lambda_+ \lambda_- d) = x.$$

Ainsi, x est une combinaison convexe de x_+ et x_- . Comme ces derniers appartiennent à des faces de dimension strictement inférieure à k , on a par hypothèse de récurrence $x_{\pm} \in \text{Conv}(V)$, d'où $x \in \text{Conv}(V)$.

Par récurrence, on conclut que $P \subset \text{Conv}(V)$, et donc $\boxed{P = \text{Conv}(V)}$.

On fixe un ensemble fini non vide $V \subset \mathbb{R}^n$. La fin de cette section consiste à prouver que, réciproquement, $\text{Conv}(V)$ est un polytope.

- (15) Justifier que pour démontrer que $\text{Conv}(V)$ est un polytope il suffit de traiter le cas où $\text{Conv}(V)$ n'est pas inclus dans un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ et contient 0 dans son intérieur.

Version courte :

La notion de polytope étant invariante par transformation affine, et quitte à projeter dans des espaces de dimension inférieure, on peut supposer que V n'est pas inclus dans un hyperplan affine de $\mathbb{R}^n$.

Il reste alors à montrer que, dans ce cas, l'intérieur de $\text{Conv}(V)$ est non vide, *i.e.*, qu'il existe une boule ouverte incluse dans $\text{Conv}(V)$. Pour cela, on utilise le fait que $\vec{V} = \mathbb{R}^n$, ce qui permet de trouver $n+1$ vecteurs $v_0, \dots, v_n$ affinement indépendants. Quitte à effectuer une nouvelle transformation affine, on peut supposer que $v_0 = 0$ et que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, v_i est le i -ème vecteur de la base canonique. La boule, pour la norme 1, de centre $\frac{1}{n+1}(1, \dots, 1)$ et de rayon $\frac{1}{n+1}$ est alors incluse dans $\text{Conv}(0, v_1, \dots, v_n) \subset \text{Conv}(V)$. Finalement, par translation, on peut supposer que 0 appartient à l'intérieur de $\text{Conv}(V)$.

Version détaillée :

- Si $V \subset A$, où A est un sous-espace affine strict de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire $A = x + E$ avec $x \in \mathbb{R}^n$ et E un sous-espace vectoriel strict de $\mathbb{R}^n$, on peut considérer $V - x \subset E \simeq \mathbb{R}^{\dim E}$.

Or, on observe que si P est un polytope et $v \in \mathbb{R}^n$, alors $P + v$ est également un polytope. En effet, si $\{x \in \mathbb{R}^n | \forall i \in I, \ell_i(x) \leq a_i\}$, on a

$$P + v = \{x \in \mathbb{R}^n | \forall i \in I, \ell_i(x) \leq a_i + \ell_i(v)\},$$

et $P + v$ est clairement compact. Ainsi, $\text{Conv}(V)$ est un polytope si et seulement si $V - x$ en est un. Cela permet de ramener le problème à un espace de dimension inférieure, et de continuer cette réduction tant qu'elle reste possible. On peut alors supposer que V n'est pas inclus dans un hyperplan affine, et, *a fortiori*, que $\text{Conv}(V)$ n'est pas inclus dans un hyperplan de $\mathbb{R}^n$.

- Il reste à montrer que l'on peut supposer que 0 est inclus dans l'intérieur de $\text{Conv}(V)$. Pour cela, il faut d'abord justifier que cet intérieur est non vide. Soit $v_0 \in V$. On observe que

$$\vec{V} = \text{vect}\{v - v_0 | v \in V\}.$$

En effet tout élément de la forme $v - v'$ peut s'écrire de la forme

$$v - v' = (v - v_0) - (v' - v_0) \in \text{Vect}\{v - v_0 | v \in V\}.$$

De plus, comme V n'est pas inclus dans un hyperplan affine, on a nécessairement $\vec{V} = \mathbb{R}^n$ (car sinon $V \subset \vec{V} + v$ pour n'importe quel $v \in V$, ce qui contredirait la réduction précédente). Cela permet de trouver une base de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs $v_i - v_0$ avec $v_i \in V$.

Quitte à effectuer un changement de coordonnées, on peut supposer que les vecteurs $v_i - v_0$ sont les vecteurs de la base canonique e_i . On observe alors que la boule ouverte de centre $(\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1})$ et de rayon $\frac{1}{n+1}$ pour la norme 1 :

$$B = \left\{ \left(\frac{1}{n+1} + \epsilon_1, \dots, \frac{1}{n+1} + \epsilon_n \right) \mid \sum_{i=1}^n |\epsilon_i| < \frac{1}{n+1} \right\},$$

est incluse dans $\text{Conv}(0, e_1, \dots, e_n)$. En effet

$$\text{Conv}(0, e_1, \dots, e_n) = \{x \in \mathbb{R}^n | \forall i \in [1, n], x_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n x_i \leq 1\}.$$

En revenant aux coordonnées initiales (ce qui ne change rien, par équivalence des normes), on a donc trouvé une boule ouverte incluse dans $\text{Conv}(0, v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0)$, c'est-à-dire, par translation, une boule ouverte dans $\text{Conv}(v_0, v_1, \dots, v_n) \subset \text{Conv}(V)$. Ainsi, $\text{Conv}(V)$ a un intérieur non vide.

Enfin, en opérant une dernière translation, on peut supposer que 0 est inclus dans l'intérieur de $\text{Conv}(V)$.

On a donc montré que l'on peut réduire le problème en supposant que

$\text{Conv}(V)$ n'est pas inclus dans un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ et contient 0 dans son intérieur.

- (16) On suppose que $\text{Conv}(V)$ n'est pas inclus dans un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ et contient 0 dans son intérieur. Montrer que l'ensemble Q défini par

$$Q = \{l \in \mathbb{R}^n \mid \langle l, x \rangle \leq 1, \forall x \in V\}$$

est un polytope de $\mathbb{R}^n$.

Version courte :

Les autres conditions étant claires, il faut montrer que Q est borné. Pour ϵ suffisamment petit, la boule fermée de centre 0 et rayon ϵ pour la norme euclidienne est incluse dans $\text{Conv}(V)$. Ainsi si $l \in Q$, $\frac{l\epsilon}{\|l\|} \in \text{Conv}(V)$ ce qui impose $\|l\| \leq 1/\epsilon$.

Version détaillée :

Posons $I = V$, qui est alors un ensemble fini. En définissant, pour tout $i \in I$, la forme linéaire $\ell_i : x \mapsto \langle x, i \rangle$ et le scalaire $a_i = 1$, on obtient clairement

$$Q = \{l \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in I, \ell_i(x) \leq a_i\}.$$

De plus, cela peut se réécrire

$$Q = \bigcap_{i \in I} \ell_i^{-1}([-\infty, a_i]),$$

ce qui montre que Q est fermé, les applications linéaires ℓ_i étant continues. Enfin, on a clairement $0 \in Q$, donc Q est non vide. Il reste à justifier que Q est borné. Comme on suppose que 0 appartient à l'intérieur de $\text{Conv}(V)$, pour un $\epsilon > 0$ suffisamment petit, la boule fermée $B_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq \epsilon\}$ est incluse dans $\text{Conv}(V)$, où $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ désigne la norme euclidienne de x . Montrons que $Q \subset B_{1/\epsilon}$. Soit $l \in Q$. On observe que

$$\left\| \frac{l\epsilon}{\|l\|} \right\| = \epsilon,$$

donc $\frac{l\epsilon}{\|l\|} \in B_\epsilon \subset \text{Conv}(V)$. On peut alors écrire en décomposition convexe

$$\frac{l\epsilon}{\|l\|} = \sum_{v \in V} \lambda_v v,$$

avec $\lambda_v \geq 0$ et $\sum_{v \in V} \lambda_v = 1$. Par définition de Q , on a $\langle l, v \rangle \leq 1$ pour tout $v \in V$, ce qui implique, par linéarité

$$\left\langle l, \frac{\epsilon l}{\|l\|} \right\rangle = \sum_{v \in V} \lambda_v \langle l, v \rangle \leq \sum_{v \in V} \lambda_v = 1.$$

On en déduit

$$\|l\| \leq \frac{1}{\epsilon},$$

donc $l \in B_{1/\epsilon}$, et ainsi Q est borné. On peut donc conclure que Q est un polytope.

- (17) En déduire que $\text{Conv}(V)$ est un polytope.

On admettra que pour tout convexe fermé non-vide $C \subset \mathbb{R}^n$ et tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus C$, il existe un unique $y \in C$ tel que $\langle x - y, z - y \rangle \leq 0$ pour tout $z \in C$.

Version courte :

On définit $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall l \in Q, \langle x, l \rangle \leq 1\}$. Il est clair que P est convexe et que $V \subset P$, donc $\text{Conv}(V) \subset P$. Réciproquement, si $x \notin \text{Conv}(V)$, alors en posant $t = \frac{x-y}{\langle x-y, y \rangle}$ avec y donné par le théorème admis, on vérifie que $t \in Q$. De plus, comme $\langle x, t \rangle > 1$, on en déduit que $x \notin P$. Ainsi, $P = \text{Conv}(V)$.

Enfin, comme on peut aussi écrire $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall l \in V', \langle x, l \rangle \leq 1\}$, où V' est l'ensemble des sommets de Q , et que l'on vérifie que 0 appartient à l'intérieur de $Q = \text{Conv}(V')$ (car $\text{Conv}(V)$ est borné), la question (16) permet de conclure que $\text{Conv}(V)$ est un polytope.

Version détaillée :

L'idée de la preuve est de remarquer que l'ensemble Q , introduit dans la question précédente, correspond à une construction générale de dualité. Ainsi, on ne cherchera pas à montrer que $Q = \text{Conv}(V)$ (ce qui est faux en général), mais plutôt à définir le dual de Q

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall l \in Q, \langle x, l \rangle \leq 1\},$$

et à établir que $P = \text{Conv}(V)$. Cette question comporte donc deux étapes : vérifier l'égalité ensembliste ci-dessus, puis s'assurer que l'on peut appliquer le résultat de la question précédente pour conclure que P est un polytope.

• $\text{Conv}(V) \subset P$: Soit $v \in V$ et $l \in Q$. Par définition de Q , on a $\langle v, l \rangle \leq 1$, ce qui signifie exactement que $v \in P$. Ainsi, $V \subset P$. Comme P est convexe (même argument que pour prouver qu'un polytope est convexe), on obtient bien $\text{Conv}(V) \subset P$.

• $P \subset \text{Conv}(V)$: C'est pour cette inclusion que le résultat admis est utilisé. On raisonne par contraposée : soit $x \notin \text{Conv}(V)$, et montrons que $x \notin P$. L'ensemble $\text{Conv}(V)$ est clairement convexe et non vide. Il est de plus fermé : on utilise pour cela une caractérisation séquentielle. Soit $(x_n) \in \text{Conv}(V)^{\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers un point $x \in \mathbb{R}^n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire

$$x_n = \sum_{v \in V} \lambda_n^{(v)} v,$$

avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $v \in V$, $\lambda_n^{(v)} \geq 0$ et $\sum_{v \in V} \lambda_n^{(v)} = 1$. Par compacité de $[0, 1]^V \simeq [0, 1]^{\text{Card } V}$, on peut extraire une sous-suite telle que, pour tout $v \in V$, $\lambda_{\sigma(n)}^{(v)} \rightarrow \mu^{(v)} \in [0, 1]$. On a alors

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{\sigma(n)} = \sum_{v \in V} \mu^{(v)} v \in \text{Conv}(V),$$

car $\sum_{v \in V} \mu^{(v)} = 1$ par passage à la limite.

Ainsi, $\text{Conv}(V)$ satisfait bien les hypothèses du résultat admis. Il existe donc $y \in \text{Conv}(V)$ tel que $\forall z \in \text{Conv}(V)$, $\langle x - y, x - z \rangle \leq 0$, ce qui équivaut à

$$\langle x - y, z \rangle \leq \langle x - y, y \rangle.$$

Comme, par hypothèse, 0 appartient à l'intérieur de $\text{Conv}(V)$, il existe $\epsilon > 0$ suffisamment petit pour que $\epsilon(x - y) \in \text{Conv}(V)$. En prenant $z = \epsilon(x - y)$, on obtient

$$\langle x - y, y \rangle \geq \epsilon \langle x - y, x - y \rangle > 0.$$

En posant alors $t = \frac{x-y}{\langle x-y, y \rangle}$, on observe que

$$\forall z \in \text{Conv}(V), \langle t, z \rangle \leq 1,$$

autrement dit, $t \in Q$. De plus, on calcule

$$\langle t, x \rangle = \frac{\langle x - y, x \rangle}{\langle x - y, y \rangle} = \frac{\langle x - y, x - y \rangle}{\langle x - y, y \rangle} + 1 = \underbrace{\frac{|x - y|^2}{\langle x - y, y \rangle}}_{>0} + 1 > 1.$$

Comme $t \in Q$, cela signifie que $x \notin P$. On a donc bien $\boxed{\text{Conv}(V) = P}$.

• En notant V' l'ensemble (fini) des sommets du polytope Q , lequel vérifie par la question (14) que $\text{Conv}(V') = Q$, on a également l'expression suivante

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall l \in V', \langle x, l \rangle \leq 1\}.$$

Il reste à montrer que $\text{Conv}(V')$ contient 0 dans son intérieur ce qui implique automatiquement que V' n'est inclus dans un hyperplan. Comme V est borné, étant fini, on peut trouver $A > 0$ tel que $\forall v \in V$, $\|v\| \leq A$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\| \leq 1/A$. On a, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\langle x, l \rangle \leq \|x\| \|l\| \leq 1.$$

Ainsi $x \in Q$, ce qui montre que la boule euclidienne de centre 0 et de rayon $1/A$ est incluse dans Q . Toutes les hypothèses de la question (16) sont donc réunies, ce qui permet de conclure que $P = \text{Conv}(V)$ est un polytope.

(18) Prouver que tout sommet de $\text{Conv}(V)$ appartient à V .

Version courte :

Par l'absurde, soit $x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots \in \text{Conv}(V)$ un sommet de $\text{Conv}(V)$, exprimé comme une combinaison convexe non triviale d'éléments de V ($v_1 \neq v_2 \in V$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$). En posant $d = v_1 - v_2$, on vérifie qu'il existe $i \in S_{\{x\}}$ tel que $d \notin \ker \ell_i$. On observe alors que, pour tout ϵ de même signe que $\ell_i(d)$,

$$\ell_i(x + \epsilon d) > a_i,$$

ce qui contredit le fait que $x + \epsilon d \in \text{Conv}(V)$ pour $|\epsilon| > 0$ suffisamment petit.

Version détaillée :

Soit $\{x\} \subset \text{Conv}(V)$ un sommet du polytope $\text{Conv}(V)$, que l'on écrit avec les notations usuelles $(I, \ell_i$ et $a_i)$. Pour montrer que x est nécessairement un point de V , on procède par l'absurde en supposant qu'il s'agit d'une combinaison convexe non triviale de points de V . On écrit alors

$$x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$$

où les $v_i \in V$ sont supposés distincts, les coefficients $\lambda_i \geq 0$, non tous nuls ou égaux à 1, avec $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$. Sans perte de généralité, on peut supposer que les deux premiers coefficients, λ_1 et λ_2 , sont non nuls. Posons $d = v_1 - v_2 \neq 0$. Alors, par définition de $\text{Conv}(V)$, pour tout $\epsilon \in [-\lambda_1, \lambda_2]$

$$x + \epsilon d = (\lambda_1 + \epsilon)v_1 + (\lambda_2 - \epsilon)v_2 + \dots \in \text{Conv}(V).$$

L'idée est alors que l'on peut se déplacer à partir de x le long de d , dans les deux directions, ce qui contredit l'intuition selon laquelle $\{x\}$ est un sommet.

Concrètement, on affirme qu'il existe $i \in S_{\{x\}}$ tel que $\ell_i(x) \neq a_i$. En effet, si ce n'était pas le cas, alors comme $\{x\} = \{y \in \text{Conv}(V) \mid \forall i \in S_{\{x\}}, \ell_i(y) = a_i\}$, on aurait $x + \epsilon d \in \{x\}$ pour tout $\epsilon \in [-\lambda_1, \lambda_2]$, ce qui est absurde.

Soit alors $i \in S_{\{x\}}$ tel que $\ell_i(d) \neq 0$. En prenant $\epsilon \in [-\lambda_1, \lambda_2]$ de même signe que $\ell_i(d)$, on observe alors que

$$\ell_i(x + \epsilon d) = \ell_i(x) + \underbrace{\epsilon \ell_i(d)}_{>0} > a_i.$$

Ce qui contredit le fait que $x + \epsilon d \in \text{Conv}(V)$. Ainsi on a nécessairement $\lambda_1 = 1$ ou $\lambda_2 = 1$, ce qui donne $x = v_1$ ou $x = v_2$. Dans tous les cas $x \in V$.

2.2 Formule d'Euler

Soit $\mathcal{F}_n$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Pour tout $X \subset \mathbb{R}^n$, on note $\mathbf{1}_X$ la fonction indicatrice de X définie par $\mathbf{1}_X(x) = 1$ si $x \in X$ et $\mathbf{1}_X(x) = 0$ si $x \notin X$.

Soit $\mathcal{U}_n$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}_n$ engendré par les fonctions $\mathbf{1}_P$ où P est un polytope de $\mathbb{R}^n$.

(19) Soit $f \in \mathcal{U}_1$. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ la limite de $f(y)$ quand y tend vers x tout en vérifiant $y > x$, noté $\lim_{y \rightarrow x^+} f(y)$, existe et qu'il existe un nombre fini de réels $x \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) \neq \lim_{y \rightarrow x^+} f(y)$.

Version courte :

Immédiat par linéarité de la limite, les polytopes de $\mathbb{R}$ étant précisément les segments.

Version détaillée :

Un élément de $\mathcal{U}_1$ étant une combinaison linéaire finie d'indicatrices de polytopes, par linéarité du passage

à la limite, il suffit de vérifier la propriété pour de telles fonctions. En dimension 1, une forme linéaire est de la forme $x \mapsto \lambda x$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi, si P est un polytope, on peut écrire, en posant $I_{\pm} = \{i \in I \mid \pm \lambda_i > 0\}$

$$\begin{aligned} P &= \{x \in \mathbb{R} \mid \forall i \in I, \lambda_i x \leq a_i\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid \forall i \in I_+, x \leq \frac{a_i}{\lambda_i}\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid \forall i \in I_-, x \geq \frac{a_i}{\lambda_i}\} \\ &= \left[\max_{i \in I_-} \frac{a_i}{\lambda_i}, \min_{i \in I_+} \frac{a_i}{\lambda_i} \right]. \end{aligned}$$

(On peut ignorer le cas $\lambda_i = 0$, car la contrainte $0 \times x \leq a_i$ est, selon le signe de a_i , soit toujours vérifiée, soit impossible.) Comme P est non vide, les bornes de l'intervalle sont nécessairement dans le bon ordre. En notant $P = [a, b]$ (avec $a \leq b$), l'indicatrice $\mathbb{1}_P$ est donc continue sauf en a et b . L'intervalle étant fermé, on a, si $a < b$

$$\mathbb{1}_P(a) - \lim_{y \rightarrow a^+} \mathbb{1}_P(y) = 1 - 1 = 0.$$

Et si $a \leq b$:

$$\mathbb{1}_P(b) - \lim_{y \rightarrow b^+} \mathbb{1}_P(y) = 1 - 0 = 1.$$

Ainsi, $\lim_{y \rightarrow x^+} \mathbb{1}_P(y)$ ne diffère de $\mathbb{1}_P(x)$ qu'en un seul point. Par combinaison linéaire, si $f \in \mathcal{U}_1$, alors

$$\lim_{y \rightarrow x^+} f(y) \text{ ne diffère de } f(x) \text{ qu'en un nombre fini de } x \in \mathbb{R}.$$

Si $f \in \mathcal{U}_1$, on définit $\chi_1(f)$ par la somme (ayant un nombre fini de termes non nuls)

$$\chi_1(f) = \sum_{x \in \mathbb{R}} \left(f(x) - \lim_{y \rightarrow x^+} f(y) \right).$$

(20) On suppose que $n > 1$. Soit $f \in \mathcal{U}_n$. Pour $z \in \mathbb{R}$, on définit la fonction $f_z : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f_z(x_1, \dots, x_{n-1}) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, z)$ pour tout $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Démontrez que $f_z \in \mathcal{U}_{n-1}$.

Version courte :

L'intersection d'un polytope avec un hyperplan affine étant soit vide, soit un polytope, le résultat s'en déduit directement par combinaison linéaire.

Version détaillée :

Soit $z \in \mathbb{R}$. Par linéarité de l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_n & \rightarrow & \mathcal{F}_{n-1} \\ f & \mapsto & f_z \end{array},$$

il suffit de vérifier que si f est l'indicatrice d'un polytope de $\mathbb{R}^n$, alors $f_z \in \mathcal{U}_{n-1}$.

Soit $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in I, \ell_i(x) \leq a_i\}$ un polytope. On a la relation $(\mathbb{1}_P)_z = \mathbb{1}_{P_z}$, où

$$P_z = \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \forall i \in I, \ell_i(x_1, \dots, x_{n-1}, z) \leq a_i\}.$$

En effet, pour $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, on a $(x_1, \dots, x_{n-1}, z) \in P$ si et seulement si $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in P_z$, donc pour $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, on a $(\mathbb{1}_P)_z(x) = 1$ si et seulement si $\mathbb{1}_{P_z}(x) = 1$, d'où l'égalité des indicatrices. En posant, pour $i \in I$, les formes linéaires $\ell'_i : (x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto \ell_i(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ et les scalaires $a'_i = a_i - \ell_i(0, \dots, z)$, on peut réécrire

$$P_z = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \forall i \in I, \ell'_i(x) \leq a'_i\}.$$

P_z est donc fermé et défini par un nombre fini d'inégalités affines. Comme on peut également écrire

$$P_z = \pi(P \cap H_z),$$

où $\pi : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1})$ est la projection sur les $n - 1$ premières coordonnées, et $H_z = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = z\}$, on en déduit que P_z est borné. Ainsi, soit $P_z = \emptyset$, auquel cas la fonction $(\mathbb{1}_P)_z$ est nulle, soit $P_z \neq \emptyset$, auquel cas P_z est un polytope. Dans les deux cas, on a bien $(\mathbb{1}_P)_z \in \mathcal{U}_{n-1}$. Par combinaison linéaire, si $f \in \mathcal{U}_n$, alors $f_z \in \mathcal{U}_{n-1}$.

- (21) Démontrer que la définition suivante permet de définir une forme linéaire $\chi_n : \mathcal{U}_n \rightarrow \mathbb{R}$. On définit $\chi_1(f)$ par la somme $\chi_1(f) = \sum_{x \in \mathbb{R}} (f(x) - \lim_{y \rightarrow x^+} f(y))$, puis pour $f \in \mathcal{U}_n$ avec $n > 1$, on pose

$$\chi_n(f) = \chi_1(g) \text{ avec } g \text{ défini par } g(z) = \chi_{n-1}(f_z) \text{ pour } z \in \mathbb{R}.$$

On montrera en même temps la formule $\chi_n(\mathbb{1}_P)$ pour tout polytope P de $\mathbb{R}^n$ et on justifiera que χ_n est indépendante du système de coordonnées à savoir que pour toute application linéaire inversible $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ on a $\chi_n(f \circ A) = \chi_n(f)$ pour tout $f \in \mathcal{U}_n$.

Version courte :

Il suffit de vérifier que les formules ont un sens lorsque f est l'indicatrice d'un polytope. Par récurrence sur n et grâce à la question (20), g est bien définie. Comme on a vu que f_z est l'indicatrice de $\emptyset$ ou d'un polytope, g ne prend pour valeur que 1 ou 0. Les polytopes étant compacts et convexes, g est même l'indicatrice d'un segment. On a donc $g \in \mathcal{U}_1$ et $\chi_1(g) = 1$. Ainsi, $\chi_n(f)$ est bien défini et vaut 1 lorsque f est l'indicatrice d'un polytope.

A stabilisant l'ensemble des polytopes, on a $\chi_n(\mathbb{1}_P \circ A) = 1$, et donc, par linéarité, $\chi_n(f \circ A) = \chi_n(f)$ pour tout $f \in \mathcal{U}_n$.

Version détaillée :

On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ en montrant simultanément que χ_n est une forme linéaire bien définie et que $\chi_n(\mathbb{1}_P) = 1$ pour tout polytope de $\mathbb{R}^n$.

• Pour $n = 1$, on a déjà justifié grâce à la question (19) que χ_1 est bien définie. De plus, les calculs effectués dans la résolution de cette question montrent que si P est un polytope $\chi_1(\mathbb{1}_P) = 1$.

• Soit $n > 1$ et supposons que χ_{n-1} est bien définie, linéaire et vérifie $\chi_{n-1}(\mathbb{1}_P) = 1$ pour tout polytope de $\mathbb{R}^{n-1}$. Comme χ_1 et χ_{n-1} sont linéaires, les formules utilisées pour définir χ_n , si elles sont bien définies, garantissent que χ_n est automatiquement linéaire. Pour $f \in \mathcal{U}_n$ et $z \in \mathbb{R}$, la question (20) assure que $f_z \in \mathcal{U}_{n-1}$, et donc, par récurrence,

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ z & \mapsto \chi_{n-1}(f_z) \end{cases}$$

est bien définie. Pour assurer la définition de χ_n , il suffit alors de vérifier que $g \in \mathcal{U}_1$. À nouveau, par linéarité, il suffit de vérifier que si $f = \mathbb{1}_P$ est l'indicatrice d'un polytope, alors $g \in \mathcal{U}_1$. Dans la preuve de la question (20), on a vu que pour $z \in \mathbb{R}$, $(\mathbb{1}_P)_z = \mathbb{1}_{P_z}$, où $P_z = \pi(P \cap H_z)$ est soit vide, soit un polytope. Posons

$$\mathcal{S} = \{z \in \mathbb{R} \mid P_z \neq \emptyset\},$$

de sorte que, par hypothèse de récurrence, $g = \mathbb{1}_{\mathcal{S}}$. On montre alors que $\mathcal{S}$ est un segment de $\mathbb{R}$. Pour cela, on note $\pi_n : (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_n$ la projection sur la n -ième coordonnée et on observe que

$$\begin{aligned} \pi_n(P) &= \{z \in \mathbb{R} \mid \exists x \in P, \pi_n(x) = z\} = \{z \in \mathbb{R} \mid \exists (x_1, \dots, x_n) \in P, x_n = z\} \\ &= \{z \in \mathbb{R} \mid P \cap H_z \neq \emptyset\} = \{z \in \mathbb{R} \mid \pi(P \cap H_z) \neq \emptyset\} \\ &= \{z \in \mathbb{R} \mid P_z \neq \emptyset\} = \mathcal{S}. \end{aligned}$$

Ainsi, en tant qu'image directe par une application linéaire (donc continue), P étant un compact convexe non vide, $\mathcal{S}$ est un compact convexe non vide de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire un segment, d'où $g \in \mathcal{U}_1$. Ainsi, $\chi_n(f)$ est bien défini. Les calculs effectués dans la question (19) montrent de plus que $\chi_n(f) = \chi_1(g) = 1$. Ainsi, par récurrence, on conclut que χ_n est une forme linéaire bien définie sur $\mathcal{U}_n$ et que $\chi_n(\mathbb{1}_P) = 1$ pour tout

polytope P de $\mathbb{R}^n$.

• Pour démontrer la dernière partie de la question, on commence par remarquer que si $P \subset \mathbb{R}^n$ est un polytope et que $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application linéaire inversible, alors $A(P)$ est également un polytope. En effet, comme image directe par une application continue, $A(P)$ est compact (et non vide). De plus, en écrivant $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in I, \ell_i(x) \leq a_i\}$, on a

$$A(P) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in I, \ell_i(A^{-1}(x)) \leq a_i\}.$$

Les applications $\ell_i \circ A^{-1}$ étant des formes linéaires, $A(P)$ est bien un polytope. Comme on observe que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $(\mathbb{1}_P \circ A)(x) = 1$ si et seulement si $x \in A^{-1}(P)$, on a $\mathbb{1}_P \circ A = \mathbb{1}_{A^{-1}(P)}$. Par ce qui précède et la première partie de la question, on a donc, pour tout polytope P

$$\chi_n(\mathbb{1}_P \circ A) = \chi_n(\mathbb{1}_{A^{-1}(P)}) = 1.$$

Les indicatrices de polytopes engendrant $\mathcal{U}_n$, on en conclut par linéarité que, pour toute application linéaire inversible $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, on a $\chi_n(f \circ A) = \chi_n(f)$ pour tout $f \in \mathcal{U}_n$, donc χ_n est indépendante du système de coordonnées.

(22) Montrer que pour tout polytope P de $\mathbb{R}^n$ et pour tout $x \in P \setminus P^\circ$, il existe une face $F \subset P$ telle que $F \neq P$ et $x \in F$.

Version courte :

Si $x \in P \setminus P^\circ$ il existe $i \in I \setminus S_P$, tel que $\ell_i(x) = a_i$. La face $F_{\{i\}}$ est alors stricte.

Version détaillée :

Par définition,

$$P^\circ = \{x \in P \mid \forall i \in I, \ell_i(x) = a_i \iff i \in S_P\}.$$

Or, d'après la définition de S_P , l'implication $i \in S_P \implies \ell_i(x) = a_i$ est toujours vraie pour tout $x \in P$. Ainsi, si $x \in P \setminus P^\circ$, alors, par négation,

$$\exists i \in I, \ell_i(x) = a_i \text{ et } i \notin S_P.$$

Considérons alors $F = F_{\{i\}} \subset P$, qui est une face de P . Puisque $i \notin S_P$, il existe, par définition de S_P , un point $y \in P$ tel que $\ell_i(y) \neq a_i$, c'est-à-dire $y \notin F$. Ainsi, il existe une face propre $F \subsetneq P$ telle que $x \in F$.

(23) Montrer que pour tout polytope P de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{1}_{P^\circ} \in \mathcal{U}_n$ et $\chi_n(\mathbb{1}_{P^\circ}) = (-1)^{\dim P}$.

Version courte :

On observe l'écriture en union disjointe $P = \bigsqcup_F F^\circ$, conséquence directe de la question (22). En passant aux indicatrices, cela donne $\mathbb{1}_{P^\circ} = \mathbb{1}_P - \sum_{F \neq P} \mathbb{1}_{F^\circ}$. Par récurrence sur $\dim P$, on en déduit que $\mathbb{1}_{P^\circ} \in \mathcal{U}_n$.

Le calcul de $\chi_n(\mathbb{1}_{P^\circ})$ se fait par récurrence sur n , en revenant à la définition. Comme l'intersection de P° avec un hyperplan affine est, soit vide, soit l'intérieur relatif d'un polytope de dimension $\dim P - 1$, on peut écrire $g = (-1)^{\dim P - 1} \mathbb{1}_{]a,b[}$ pour $a < b$. On en déduit alors $\chi_n(\mathbb{1}_{P^\circ}) = \chi_1(g) = (-1)^{\dim P}$.

Version détaillée :

Soit $P \subset \mathbb{R}^n$ un polytope. On commence par montrer que $\mathbb{1}_{P^\circ} \in \mathcal{U}_n$. Pour cela, on établit la décomposition en union disjointe

$$P = \bigsqcup_F F^\circ,$$

où F parcourt l'ensemble des faces de P . En effet :

• L'inclusion $\bigsqcup_F F^\circ \subset P$ est immédiate.

• Soit $x \in P$. Si $x \notin P^\circ$, alors, d'après la question (22), x appartient à une face stricte, laquelle, par la question (12), est de dimension strictement inférieure à celle de P . Si x n'est pas dans l'intérieur relatif de cette face, on réitère l'argument. Ce processus termine nécessairement, car la dimension décroît strictement à chaque étape. Ainsi, on peut trouver une face $F \subset P$ telle que $x \in F^\circ$. D'où l'inclusion $P \subset \bigsqcup_F F^\circ$.

• Soient F_1 et F_2 deux faces distinctes de P . Comme $F_j = \{x \in P \mid \forall i \in S_{F_j}, \ell_i(x) = a_i\}$, on a $S_{F_1} \neq S_{F_2}$. Or, les éléments de F_j° sont les $x \in P$ qui satisfont $\ell_i(x) = a_i$ exactement pour les indices $i \in S_{F_j}$. Il s'ensuit que $F_1^\circ \cap F_2^\circ = \emptyset$: l'union est bien disjointe.

On en déduit la relation entre fonctions indicatrices :

$$\mathbb{1}_P = \sum_F \mathbb{1}_{F^\circ}.$$

En effet, pour $x \in P$, la décomposition en union disjointe montre qu'il existe une unique face G telle que $x \in G^\circ$, et donc $\mathbb{1}_{G^\circ}(x) = 1$. Pour toute autre face $F \neq G$, on a $\mathbb{1}_{F^\circ}(x) = 0$, ce qui donne bien $\mathbb{1}_P(x) = 1 = \sum_F \mathbb{1}_{F^\circ}(x)$. De plus, si $x \notin P$, alors x n'appartient à aucune face, donc $\sum_F \mathbb{1}_{F^\circ}(x) = 0 = \mathbb{1}_P(x)$.

On peut alors écrire

$$\mathbb{1}_{P^\circ} = \mathbb{1}_P - \sum_{F \neq P} \mathbb{1}_{F^\circ},$$

où cette fois-ci F parcourt l'ensemble des faces strictes de P . On conclut alors que $\mathbb{1}_{P^\circ} \in \mathcal{U}_n$ par récurrence sur la dimension de P . En effet :

- Si $\dim P = 0$, alors P est un singleton, donc $P^\circ = P$, ce qui donne bien $\mathbb{1}_{P^\circ} = \mathbb{1}_P \in \mathcal{U}_n$.
- Si $\dim P > 0$, alors en appliquant l'hypothèse de récurrence à chaque face stricte F de P (avec $\dim F < \dim P$ d'après la question (12)), on a $\mathbb{1}_{F^\circ} \in \mathcal{U}_n$. Par linéarité, la relation $\mathbb{1}_{P^\circ} = \mathbb{1}_P - \sum_{F \neq P} \mathbb{1}_{F^\circ}$ entraîne que $\mathbb{1}_{P^\circ} \in \mathcal{U}_n$.

Ainsi, pour tout polytope $P \subset \mathbb{R}^n$, on a $\mathbb{1}_{P^\circ} \in \mathcal{U}_n$.

On peut alors passer au calcul de $\chi_n(\mathbb{1}_{P^\circ})$. Pour cela, procédons par récurrence sur $n \geq 1$, en repartant de la définition de χ_n .

- Si $n = 1$ et $P \subset \mathbb{R}$, on a vu dans la démonstration de la question (19) que P est nécessairement un segment $[a, b]$ avec $a \leq b$. Si $a = b$, alors $P = \{a\}$, donc $\dim P = 0$ et $P^\circ = P$, d'où :

$$\chi_1(\mathbb{1}_{P^\circ}) = \chi_1(\mathbb{1}_P) = 1 = (-1)^0 = (-1)^{\dim P}.$$

Si $a < b$, alors $P^\circ =]a, b[$ et $\dim P = 1$. Un calcul de limites $\lim_{y \rightarrow x^+} f(y)$ en a et en b , le seuls points de discontinuité de $\mathbb{1}_{P^\circ}$, donne

$$\chi_1(\mathbb{1}_{P^\circ}) = \mathbb{1}_{P^\circ}(a) - \lim_{y \rightarrow a^+} \mathbb{1}_{P^\circ}(y) + \mathbb{1}_{P^\circ}(b) - \lim_{y \rightarrow b^+} \mathbb{1}_{P^\circ}(y) = 0 - 1 + 0 - 0 = -1 = (-1)^{\dim P}.$$

- Soit $n > 1$ et supposons que pour polytope P de $\mathbb{R}^{n-1}$, on ait $\chi_{n-1}(\mathbb{1}_{P^\circ}) = (-1)^{\dim P}$. Soit alors $P \subset \mathbb{R}^n$ un polytope de $\mathbb{R}^n$. On introduit alors la fonction $g \in \mathcal{U}_1$

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ z & \mapsto \chi_{n-1}((\mathbb{1}_{P^\circ})_z) \end{cases}$$

qui est bien définie par la question (21). On cherche alors à calculer g pour pouvoir obtenir $\chi_n(\mathbb{1}_{P^\circ}) = \chi_1(g)$. On réintroduit les objets et notation utilisé dans la preuve que la question (21)

$$\mathcal{S} = \{z \in \mathbb{R} \mid P_z \neq \emptyset\}$$

où on avait noté $P_z = \pi(P \cap H_z)$ avec π la projection sur les $n-1$ premières coordonnées, et H_z l'hyperplan affine de $\mathbb{R}^n$ des points dont la n -ème coordonnée est z . On avait montré que P_z était soit vide soit un polytope et que $\mathcal{S}$ était un segment que l'on note $[a, b]$ pour $a \leq b$.

Premier cas : Supposons que $a = b$. Comme $\mathcal{S} = \{a\}$, il s'ensuit que $P \subset H_a$. L'idée est alors que les polytopes P et $P_a = \pi(P)$ sont essentiellement les mêmes, bien qu'ils soient plongés dans des espaces ambiants différents ($\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^{n-1}$). Ils possèdent donc les mêmes propriétés : même dimension, et leurs intérieurs relatifs se correspondent, ce qui garantit que

$$\chi_n(\mathbb{1}_{P^\circ}) = \chi_{n-1}(\mathbb{1}_{P_a^\circ}) = (-1)^{\dim P_a} = (-1)^{\dim P}.$$

Prenons néanmoins le temps de justifier cela formellement.

Commençons par montrer l'égalité $(\mathbb{1}_{P^\circ})_a = \mathbb{1}_{P_a^\circ}$. Pour les mêmes raisons que dans la question (21), on a $(\mathbb{1}_{P^\circ})_a = \mathbb{1}_{\pi(P^\circ \cap H_a)} = \mathbb{1}_{\pi(P^\circ)}$. Il s'agit donc de justifier que $P_a^\circ = \pi(P^\circ)$. Rappelons que si $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in I, \ell_i(x) \leq a_i\}$, alors on peut écrire

$$P_a = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \forall i \in I, \ell'_i(x) \leq a'_i\},$$

avec $\ell'_i : (x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto \ell_i(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ et $a'_i = a_i - \ell_i(0, \dots, 0, z)$. On observe alors que les conditions $\ell'_i(x) \leq a'_i$ et $\ell_i(x, z) \leq a_i$ sont équivalentes (les points de P ayant tous leur n -ième coordonnée égale à z), ce qui implique

$$S_{P_a} = \{i \in I \mid \forall x \in P_a, \ell'_i(x) = a'_i\} = \{i \in I \mid \forall x \in P, \ell_i(x) = a_i\} = S_P.$$

Il s'ensuit que

$$\pi(P^\circ) = \pi(\{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \notin S_P, \ell_i(x) < a_i\}) = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \forall i \notin S_{P_a}, \ell'_i(x) < a'_i\} = P_a^\circ.$$

Ainsi, par récurrence, $g(a) = \chi_{n-1}(\mathbb{1}_{P_a^\circ}) = (-1)^{\dim P_a}$, d'où

$$g = (-1)^{\dim P_a} \mathbb{1}_{\{a\}}.$$

Par conséquent, $\chi_1(g) = (-1)^{\dim P_a}$. Il reste à établir que P et P_a ont la même dimension. La n -ième coordonnée des points de P étant constante, π induit une bijection entre P et P_a . Alors, par linéarité de π ,

$$\pi(\vec{P}) = \text{vect}\{\pi(x) - \pi(y) \mid x, y \in P\} = \text{vect}\{x - y \mid x, y \in P_a\} = \vec{P}_a.$$

Comme π est un isomorphisme entre H_0 et $\mathbb{R}^{n-1}$, on a bien $\vec{P} \simeq \vec{P}_a$. Les deux espaces ont donc la même dimension, et par conséquent, les polytopes aussi. Ainsi, dans ce cas, $\chi_n(\mathbb{1}_{P^\circ}) = (-1)^{\dim P_a} = (-1)^{\dim P}$.

Second cas : Supposons que $a < b$. Pour simplifier un peu la géométrie, on montre que, dans ce cas, on peut supposer que P est plein, i.e., que $\dim P = n$. En effet, si ce n'est pas le cas, on a $P \subset x + \vec{P}$ où x est un point quelconque de P et $\dim \vec{P} < n$. Par changement de coordonnées, on peut trouver $A \in GL(\mathbb{R}^n)$, un automorphisme de $\mathbb{R}^n$, tel que $A(x + \vec{P}) \subset H_z$ pour une certaine valeur de $z \in \mathbb{R}$. Comme on a montré à la question (21) que χ_n est invariante par changement de coordonnées, on peut alors supposer que $P \subset H_z$, ce qui nous ramène au premier cas. En supposant les formes linéaires ℓ_i non nulles, on a alors $S_P = \emptyset$, car sinon il existerait $i \in I$ tel que $\vec{P} \subset \ker \ell_i$, ce qui contredirait $\dim P = n$.

Montrons le petit lemme suivant, utile pour la suite : si $\dim P = n$, alors P° est l'intérieur topologique de P .

- Si $x \in P \setminus P^\circ$, alors il existe $i \in I$ tel que $\ell_i(x) = a_i$. Ainsi, toute boule ouverte centrée en x ne peut être incluse dans P , car pour tout $d \in \mathbb{R}^n$ tel que $\ell_i(d) > 0$, on a $x + d \notin P$.
- Si $x \in P^\circ$, on commence par observer que, S_P étant vide, pour tout $i \in I$, $\ell_i(x) < a_i$. Alors, pour ϵ suffisamment petit, pour toute direction $u \in \mathbb{R}^n$ avec $\|u\| = 1$, et pour tout $i \in I$, on a $\ell_i(x + \epsilon u) < a_i$, et donc la boule de rayon ϵ centrée en x est incluse dans P .

Grâce au lemme, on obtient que, pour $z = a$ ou b , $P^\circ \cap H_z = \emptyset$. En effet, si $x \in P \cap H_z$, on peut trouver une boule fermée de centre x et de rayon ϵ , ce qui donne $P \cap H_{z \pm \epsilon} \neq \emptyset$, i.e., $z \pm \epsilon \in \mathcal{S}$, ce qui contredit le fait que z est une borne de l'intervalle $\mathcal{S}$.

Enfin, pour $z \in]a, b[$, montrons que P_z est un polytope de dimension $n - 1$. Soit $x \in P^\circ$ (qui est non vide, d'après la question (16)). Ainsi, il existe $\epsilon > 0$ tel que $B_\epsilon(x) \subset P$. En notant t la n -ième coordonnée de x , on a alors $B_\epsilon(x) \subset P_t$. En notant $y \in P_b$, on a alors, par connexité, que pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $B_{(1-\lambda)\epsilon}((1-\lambda)x + \lambda y) \subset P$. Ainsi, pour $z \in [t, b]$, P_z contient une boule ouverte et donc $\dim P_z = n - 1$. On procède de même pour $z \in]a, t]$.

Maintenant, vérifions que pour $z \in]a, b[$, on a $\pi(P^\circ \cap H_z) = P_z^\circ$. Pour cela, on utilise encore le lemme. Si $x \in P^\circ \cap H_z$, alors on peut trouver une petite boule autour de x , ce qui donne, après projection, une petite boule autour de $\pi(x)$, donc $\pi(x) \in P_z^\circ$. Inversement, si $x \in P_z^\circ$, on peut trouver une petite boule autour de x dans P_z . De plus, pour ϵ suffisamment petit, on a $(x, z \pm \epsilon) \in P$, car sinon on trouverait un indice i tel que $\ell_i(x) = a_i$, ce qui empêcherait l'existence d'une telle boule autour de x . En combinant les deux, on trouve alors une petite boule autour de (x, z) . D'où $(x, z) \in P^\circ$, et donc $x \in \pi(P^\circ)$.

Conclusion : On a montré que

- Si $z \in \{a, b\}$, alors $P^\circ \cap H_z = \emptyset$.
- Si $z \in]a, b[$, alors $\pi(P^\circ \cap H_z) = P_z^\circ$ et $\dim P_z = n - 1$.

Alors, on a par récurrence :

$$g = \mathbb{1}_{]a, b[}(-1)^{n-1},$$

et on conclut donc que $\chi_n(\mathbb{1}_{P^\circ}) = \chi_1(g) = (-1)^n$.

Dans tous les cas, on a bien

$$\chi_n(\mathbb{1}_{P^\circ}) = (-1)^{\dim P}$$

(24) En déduire la formule d'Euler $\sum_F (-1)^{\dim F} = 1$ où F parcourt les faces de P .

Version courte :

Conséquence immédiate de la décomposition $P = \bigsqcup_F F^\circ$ et des questions (21) et (23).

Version détaillée :

En correction de la question (23), on a montré la relation entre les fonctions indicatrices

$$\mathbb{1}_P = \sum_F \mathbb{1}_{F^\circ}.$$

Ainsi, par linéarité de χ_n , sachant d'une part que, d'après la question (21), $\chi_n(\mathbb{1}_P) = 1$, et d'autre part que, d'après la question (23), $\chi_n(\mathbb{1}_{F^\circ}) = (-1)^{\dim F}$, on obtient

$$\sum_F (-1)^{\dim F} = \sum_F \chi_n(\mathbb{1}_{F^\circ}) = \chi_n\left(\sum_F \mathbb{1}_{F^\circ}\right) = \chi_n(\mathbb{1}_P) = 1.$$

2.3 Triangulation

À nouveau, nous avons besoin d'une série de définitions.

- On appelle complexe un ensemble fini non vide $\mathcal{C}$ de polytopes de $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout $P, Q \in \mathcal{C}$, $P \cap Q$ est soit vide, soit à la fois une face de P et de Q .
- On appelle $|\mathcal{C}| = \bigcup_{P \in \mathcal{C}} P$ la réalisation de $\mathcal{C}$.
- Une face de $\mathcal{C}$ est un sous-ensemble $F \subset |\mathcal{C}|$ qui est une face de l'un de $P \in \mathcal{C}$.
- On note $\chi(\mathcal{C}) = \sum_F (-1)^{\dim F}$ où F parcourt les faces de $\mathcal{C}$.
- On appelle simplexe un polytope de $\mathbb{R}^n$ de dimension k ayant $k + 1$ sommets.
- On appelle triangulation de P un complexe formé de simplexes dont la réalisation est égale à P .

(25) Montrer que si P est un polytope de $\mathbb{R}^n$ de dimension $k > 0$, l'ensemble de ses faces de dimension $k - 1$ forme un complexe.

Version courte :

Le seul point nécessitant une justification est que F possède au moins une face de dimension $k - 1$. Pour cela, on suppose $\dim P = n = k$ et l'on choisit un indice i tel que

$$P' = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall j \in I \setminus \{i\}, l_j(x) \leq a_j\}$$

est strictement plus grand que P . La convexité de P' permet, en prenant un barycentre avec $x_0 \in P' \setminus P$, de transférer une boule ouverte centrée en un point $y \in P^\circ$ en une boule ouverte intersectant $\ker(\ell_i)$, ce qui garantit que $\dim F_{\{i\}} = n - 1$.

Version détaillée :

Les faces de P étant bien des polytopes (question (12)), on commence par vérifier que si F et G sont deux

faces de dimension $k - 1$, alors $F \cap G$ est vide ou une face commune à F et G . En gardant les notations habituelles pour le polytope P , on observe que

$$F \cap G = \{x \in P \mid \forall i \in S_F \cup S_G, \ell_i(x) = a_i\}$$

C'est-à-dire que si $F \cap G \neq \emptyset$, il s'agit d'une face de P avec $S_{F \cap G} = S_F \cup S_G$. Il s'ensuit que $F \cap G$ est bien une face de F et de G .

Il reste alors à montrer que l'ensemble des faces de dimension $k - 1$ de P est non vide. Quitte à travailler dans un sous-espace affine, on peut supposer que $\dim P = n = k$. Si l'on suppose que toutes les équations superflues ont été retirées de la description de P , on peut trouver $i \in I$ tel que

$$P' = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall j \in I \setminus \{i\}, \ell_j(x) \leq a_j\}$$

est strictement plus grand que P . On observe alors que dans ce cas, P' est "presque" un polytope : la seule propriété pouvant éventuellement lui faire défaut est le fait qu'il soit borné. En particulier, P' est convexe. On va alors montrer que $F_{\{i\}}$ est une face de dimension $k - 1$. Soit $x_0 \in P' \setminus P$.

Comme $\dim P = n$, on peut trouver un point $y_0 \in P^\circ$ tel que $B_\epsilon(y_0) \subset P$. On note H l'hyperplan affine d'équation $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \ell_i(x) = a_i\}$. Par convexité de P' , on observe que, pour tout $\lambda \in [0, 1]$, on a $B_{(1-\lambda)\epsilon}(\lambda x_0 + (1-\lambda)y_0) \subset P'$. Ainsi, pour

$$\lambda = \frac{a_i - \ell_i(y_0)}{\ell_i(x_0) - \ell_i(y_0)},$$

on voit que $\lambda x_0 + (1-\lambda)y_0 \in H$ (noter que $\ell_i(x_0) > a_i$ et $\ell_i(y_0) < a_i$). Ainsi, l'intersection avec H , donne une boule ouverte de dimension $n - 1$ incluse dans H et dans P' , donc dans F . Ainsi, $\dim F = n - 1$. Donc l'ensemble des faces de dimension $k - 1$ est bien un complexe.

- (26) Soit P un polytope de $\mathbb{R}^n$ de dimension $k > 0$ et $x \in P^\circ$. Pour chaque face F de dimension $k - 1$ de P on note $F_x = \text{Conv}(F \cup \{x\})$. Montrer que la famille de F_x forme un complexe dont la réalisation est égale à P .

Version courte :

Par les questions (14) et (16), il est clair que F_x est un polytope. De plus, tout point $y \in P$ appartient à l'un des F_x , car on peut trouver $z \in P \setminus P^\circ$ tel que $y \in \text{Conv}(\{x, z\})$, en adaptant la méthode de la question précédente. On en déduit que y appartient alors à une face de dimension $k - 1$.

Pour montrer que $F_x \cap G_x$ est une face des deux polytopes, on commence par observer que $F_x \cap G_x = (F \cap G)_x$. Ensuite, on peut vérifier que, si l'on pose, pour $j \in I \setminus \{i\}$

$$\ell'_j = \ell_j - \ell_i \frac{a_j - \ell_j(x)}{a_i - \ell_i(x)} \quad \text{et} \quad a'_j = a_j - a_i \frac{a_j - \ell_j(x)}{a_i - \ell_i(x)},$$

alors F_x est exactement décrit comme l'ensemble des solutions des inégalités $\ell'_j(x) \leq a'_j$. Enfin, on observe que

$$(F \cap G)_x = \{y \in F_x \mid \forall j \in S_{F \cap G} \setminus \{i\}, \ell'_j(y) = a'_j\},$$

ce qui montre que $F_x \cap G_x$ est bien une face de F_x et, par symétrie, également une face de G_x .

Version détaillée :

Il s'agit de démontrer plusieurs points : que F_x est un polytope, que l'union des F_x est égale à P , et surtout — point particulièrement délicat — que l'intersection de deux ensembles de la forme F_x est une face commune à chacun d'eux. On commence par la partie facile. Pour simplifier le raisonnement, quitte à travailler dans un sous-espace affine, on peut supposer que $\dim P = n$.

► Soit F une face de P de dimension $n - 1$. En notant S l'ensemble des sommets de F , on a vu à la question (14) que $F = \text{Conv}(S)$, d'où $F_x = \text{Conv}(S \cup \{x\})$, qui est donc un polytope d'après la question (17).

► Montrons que $\bigcup_F F_x = P$ lorsque F parcourt l'ensemble des faces de dimension $n - 1$. Soit $y \in P$.

- Si $y \in P \setminus P^\circ$, montrons que $y \in F$ pour une certaine face F de dimension $n - 1$. Il suffit d'adapter la preuve de la question précédente. En effet, en posant $J = \{i \in I \mid \ell_i(y) = a_i\}$, on choisit un $i \in J$ tel que le polytope P' défini comme précédemment satisfait $P \subsetneq P'$. La preuve, reprise à l'identique pour ce choix de i , montre alors que y appartient bien à une face F de dimension $n - 1$. D'où $y \in F_x$.

- Si $y \in P^\circ$, construisons un point $z \in P \setminus P^\circ$ tel que $y \in \text{Conv}(\{x, z\})$, ce qui permettra de conclure grâce au point précédent. On peut supposer que $y \neq x$, sinon le résultat est immédiat. L'idée est de chercher z comme combinaison affine de x et y (sur la droite passant par x et y)

$$z = \lambda y + (1 - \lambda)x,$$

pour un $\lambda \geq 1$. On prend alors λ comme la plus grande valeur telle que $z \in P$, ce qui garantit que $z \in P \setminus P^\circ$. Explicitement, on pose

$$\lambda = \min \left\{ \frac{a_i - \ell_i(x)}{\ell_i(y) - \ell_i(x)} \mid i \in I \text{ tel que } \ell_i(y) > \ell_i(x) \right\}.$$

L'ensemble dont on prend le minimum est non vide, sinon $z \in P$ pour tout λ arbitrairement grand, ce qui est absurde. Pour cette valeur de λ , on a bien, par construction, $z \in P$. De plus, $\lambda \geq 1$ car $\ell_i(y) \leq a_i$. Enfin, pour l'indice i où le minimum est atteint, on a $\ell_i(z) = a_i$ (et $\ell_i(x) < a_i$ car $\ell_i(x) < \ell_i(y)$), ce qui montre que $z \notin P^\circ$. Comme on peut écrire

$$y = \frac{\lambda - 1}{\lambda}x + \frac{1}{\lambda}z,$$

avec $\frac{1}{\lambda} \in [0, 1]$, on a bien $y \in \text{Conv}(\{x, z\})$. Par le point précédent, $z \in F$ pour une certaine face F de dimension $n - 1$, donc $y \in F_x$.

► Montrons que pour deux faces distinctes F et G de dimension $n - 1$, l'intersection $F_x \cap G_x$ est bien une face de F_x (et donc, par symétrie, de G_x). Notons que cette intersection n'est jamais vide puisqu'elle contient toujours x . Commençons par vérifier la formule

$$F_x \cap G_x = (F \cap G)_x.$$

L'inclusion $(F \cap G)_x \subset F_x \cap G_x$ est immédiate. Supposons donc que $y \in F_x \cap G_x$. On peut alors écrire

$$y = \lambda f + (1 - \lambda)x = \mu g + (1 - \mu)x,$$

pour $\lambda, \mu \in [0, 1]$, $f \in F$ et $g \in G$, ce qui est possible par la convexité de F et G . On cherche à montrer que $\lambda = \mu$. Soit $i \in S_F \setminus S_G$, on peut alors calculer $\ell_i(y)$ de deux façons :

$$\ell_i(y) = \lambda \ell_i(f) + (1 - \lambda)\ell_i(x) = \mu \ell_i(g) + (1 - \mu)\ell_i(x).$$

Comme $\ell_i(f) = a_i$ et $\ell_i(g) \leq a_i$, on obtient l'inégalité

$$\lambda a_i + (1 - \lambda)\ell_i(x) \geq \mu a_i + (1 - \mu)\ell_i(x),$$

ce qui donne $\lambda(a_i - \ell_i(x)) \geq \mu(a_i - \ell_i(x))$, d'où $\lambda \geq \mu$ puisque $\ell_i(x) < a_i$ (car $x \in P^\circ$). Par symétrie, on a également $\mu \geq \lambda$. Il s'ensuit que $\lambda = \mu$, et donc, en simplifiant les décompositions de y , que $f = g \in F \cap G$, et ainsi $y \in (F \cap G)_x$.

- Il reste à montrer que $(F \cap G)_x$ est une face de F_x (et donc, par symétrie, également de G_x), ce qui nécessite de revenir à la définition d'une face, et donc de recourir à un système d'équations définissant F_x . Comme F_x n'est pas une face de P , obtenir un tel système n'est pas trivial.

- Comme $\dim F = n - 1$, on a vu dans la preuve de la question (25) et plus haut dans celle-ci qu'on peut supposer qu'il existe un indice $i \in I$ tel que $F = F_{\{i\}}$. Pour $j \neq i$, on va alors modifier la contrainte imposée par ℓ_j afin d'encoder le fait d'être dans F_x . On pose^a

$$\ell'_j = \ell_j - \ell_i \frac{a_j - \ell_j(x)}{a_i - \ell_i(x)} \quad \text{et} \quad a'_j = a_j - a_i \frac{a_j - \ell_j(x)}{a_i - \ell_i(x)}.$$

On définit

$$P' = \{y \in P \mid \forall j \in I \setminus \{i\}, \ell'_j(y) \leq a'_j\},$$

et on vérifie que $P' = F_x$. En effet, si $y \in F$, alors $\ell_i(y) = a_i$ et un calcul direct donne $\ell'_j(y) \leq a'_j$, tandis que $\ell'_j(x) = a'_j$. Par convexité, tout $y \in F_x$ appartient donc à P' .

Inversement, soit $y \in P'$. Si $y = x$, il n'y a rien à montrer. Supposons $y \neq x$. Comme précédemment, on construit $z = \lambda y + (1 - \lambda)x$ pour une valeur bien choisie de λ , de façon à garantir que $z \in F$. On observe que

$$\ell'_j(z) = \lambda \underbrace{\ell'_j(y)}_{\leq a'_j} + (1 - \lambda) \underbrace{\ell'_j(x)}_{= a'_j} \leq a'_j.$$

On pose alors

$$\lambda = \frac{a_i - \ell_i(x)}{\ell_i(y) - \ell_i(x)}.$$

Le dénominateur est bien non nul, car si $\ell_i(y) = \ell_i(x)$, un calcul direct montre que pour tout $j \in I \setminus \{i\}$, $\ell'_j(y) = a'_j$. En revenant à la définition, on en déduit que pour tout $j \in I$, $\ell_j(x) = \ell_j(y)$. Or, $\bigcap_{j \in I} \ker \ell_j = \{0\}$ (sinon P ne serait pas borné), donc $x = y$, ce qui contredit notre hypothèse.

Avec cette valeur de λ , on calcule que $\ell_i(z) = a_i$, et donc pour tout $j \in I \setminus \{i\}$, $\ell'_j(z) \leq a'_j$ équivaut à $\ell_j(z) \leq a_j$. Ainsi, $z \in F$, et en inversant les relations, $y \in \text{Conv}(\{x, z\}) \subset F_x$. D'où la description de F_x par les équations

$$F_x = \{y \in P \mid \forall j \in I \setminus \{i\}, \ell'_j(y) \leq a'_j\}.$$

• Soient maintenant F et G deux faces de dimension $n - 1$. Si $F \cap G = \emptyset$, alors $(F \cap G)_x = \{x\}$, qui est bien une face de F_x . Sinon, $F \cap G$ est une face de P . Montrons que

$$(F \cap G)_x = \{y \in F_x \mid \forall j \in S_{F \cap G} \setminus \{i\}, \ell'_j(y) = a'_j\}.$$

• Si $y \in F \cap G$, alors pour tout $j \in S_{F \cap G}$, on a $\ell_j(y) = a_j$, ce qui donne par définition $\ell'_j(y) = a'_j$. Comme x vérifie également cette égalité, l'inclusion directe découle de la convexité.

• Inversement, soit $y \in F_x$ vérifiant $\ell'_j(y) = a'_j$ pour tout $j \in S_{F \cap G} \setminus \{i\}$. Si $y = x$, rien à prouver. Sinon, on construit comme précédemment un point $z = \lambda y + (1 - \lambda)x \in F$. La condition $\ell'_j(y) = a'_j$ implique $\ell_j(y) = a_j$, donc $z \in F \cap G$, et par convexité $y \in (F \cap G)_x$.

Ainsi, $F_x \cap G_x = (F \cap G)_x$ est bien une face de F_x et aussi de G_x (par symétrie du problème).

► Toutes les propriétés étant réunies, on peut conclure que l'ensemble des F_x forme un complexe dont la réalisation est P .

a. La motivation de cette définition est la suivante. On cherche à interpoler l'inégalité $\ell_j(y) \leq a_j$ pour $y \in F$ avec une égalité vérifiée par x . L'idée est de remarquer que pour $y \in F_x$, la quantité $\Lambda = \frac{a_i - \ell_i(y)}{a_i - \ell_i(x)}$ mesure la distance entre y et F . En effet, si $y \in F$, alors $\Lambda = 0$, et si $y = x$, alors $\Lambda = 1$. On modifie donc l'inégalité $\ell_j(y) \leq a_j$ en $\ell_j(y) + \Lambda(a_j - \ell_j(x)) \leq a_j$ afin qu'elle coïncide avec l'ancienne pour $y \in F$, et devienne une égalité pour $y = x$. Réordonner les termes pour obtenir à gauche une forme linéaire en y et à droite un scalaire (indépendant de y) mène à nos définitions.

(27) Montrer que tout polytope admet une triangulation.

Version courte :

Pour F une face de P , on appelle barycentre de F le barycentre des sommets de F . On montre alors, par récurrence sur $\dim P$, que P admet une triangulation dont les sommets des simplexes sont les barycentres de faces emboîtées. Le cas $\dim P = 0$ est clair. Pour $\dim P = n$, on suppose les faces de dimension $n - 1$ déjà triangulées. On montre alors que les simplexes $\{S_x\}$, où S est un simplexe d'une triangulation d'une face de dimension $n - 1$ de P , forment une triangulation de P . Il est clair que les S_x sont des simplexes dont l'union est égale à P , d'après la question (26). Il reste à vérifier que l'intersection de deux tels simplexes S_x et T_x est une face commune à chacun d'eux. Cela repose sur deux lemmes

• $S_x \cap T_x$ est le simplexe dont les sommets sont les sommets communs à S_x et T_x , ce que l'on prouve par

réurrence, en utilisant que les sommets de S et T sont des barycentres de faces emboîtées.

- Les faces d'un simplexe sont exactement les enveloppes convexes de certains de ses sommets, ce qui est géométriquement clair, ou que l'on peut démontrer formellement en introduisant des équations décrivant le simplexe.

Version détaillée :

On raisonne par récurrence sur la dimension de P . Une hypothèse de récurrence naïve ne fonctionnera pas^a. Il faut donc considérer une hypothèse de récurrence plus sophistiquée. Pour F une face de P , on définit le barycentre de F comme étant le barycentre des sommets de F :

$$\text{bar}(F) = \frac{1}{\text{Card}\{\text{sommets de } F\}} \sum_{v \text{ sommet de } F} v.$$

On considère alors l'hypothèse de récurrence suivante : si P est un polytope de dimension n , alors P admet une triangulation telle que tout simplexe de celle-ci est de la forme $\text{Conv}(\{\gamma_0, \dots, \gamma_n\})$, où pour $i = 0, \dots, n$, $\gamma_i = \text{bar}(F_i)$, pour F_i face de P avec $\dim F_i = i$ et les inclusions $F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_n$.

- Si P est de dimension 0, le résultat est immédiat.
- Soit $n \geq 1$. Supposons le résultat vrai au rang $n - 1$, et soit P un polytope de dimension n . Posons $x = \text{bar}(P)$. Commençons par justifier que $x \in P^\circ$.

Soit $i \in I$, supposons $\ell_i(x) = a_i$. Alors, pour tout sommet $v \in V$ de P , on a également $\ell_i(v) = a_i$. Puisque $P = \text{Conv}(V)$, cela implique que tout $y \in P$ satisfait $\ell_i(y) = a_i$, c'est-à-dire que $i \in S_P$. Ainsi, x satisfait uniquement les égalités pour $i \in S_P$, donc par définition $x \in P^\circ$.

En notant E_P l'ensemble des faces de P de dimension $n - 1$, le résultat de la question (26) nous assure que $\mathcal{D} = \{F_x \mid F \in E_P\}$ est un complexe de réalisation de P . Pour tout $F \in E_P$, on applique alors l'hypothèse de récurrence, ce qui nous donne une triangulation de F , notée $\mathcal{C}_F$. On pose alors :

$$\mathcal{C} = \{S_x \mid F \in E_P \text{ et } S \in \mathcal{C}_F\},$$

où l'on note $S_x = \text{Conv}(S \cup \{x\})$. On vérifie que $\mathcal{C}$ est une triangulation dont les simplexes satisfont bien la propriété imposée.

- Soit $S_x \in \mathcal{C}$, alors $S \in \mathcal{C}_F$ pour un certain $F \in E_P$. Montrons que S_x est bien un simplexe dont les sommets sont les barycentres de faces de P . Par hypothèse de récurrence, $S = \text{Conv}(\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1})$ avec γ_i barycentre d'une face F_i de F telle que $\dim F_i = i$ et $F_0 \subset \dots \subset F_{n-1}$. Les F_i étant des faces de P , et $x = \text{bar}(P)$ avec $\dim P = n$, il reste à justifier que $S_x = \text{Conv}(x_1, \dots, x_n, x)$ est un simplexe, c'est-à-dire que $\dim S_x = n$.

Supposons par l'absurde que $\dim S_x < n$. Comme $\dim S = n - 1$, on aurait alors nécessairement $\dim S_x = n - 1$, ce qui impliquerait que S_x est inclus dans l'hyperplan affine contenant la face F , donc que $x \in F$, ce qui est absurde puisque $x \in P^\circ$.

- Montrons que $|\mathcal{C}| = P$. L'inclusion directe étant claire, prenons $y \in P$. Comme $\mathcal{D}$ est un complexe de réalisation de P , on a $y \in F_x$ pour une face $F \in E_P$. Par définition de F_x , on peut écrire

$$y = \lambda f + (1 - \lambda)x.$$

Comme $\mathcal{C}_F$ est un complexe de réalisation de F , il existe $S \in \mathcal{C}_F$ tel que $f \in S$, donc $y \in S_x$, ce qui signifie que $y \in |\mathcal{C}|$.

- Il reste à montrer que l'intersection de deux simplexes S_x et T_x est une face de chacun d'eux (elle n'est jamais vide car x y appartient). En notant $S_x = \text{Conv}(\{x_0, \dots, x_{n-1}, x\})$ et $T_x = \text{Conv}(\{y_0, \dots, y_{n-1}, x\})$, on a, par le second lemme démontré à la suite de cette récurrence

$$S_x \cap T_x = \text{Conv}(\{x_0, \dots, x_{n-1}, x\} \cap \{y_0, \dots, y_{n-1}, x\}).$$

Ainsi, $S_x \cap T_x$ est un simplexe dont les sommets forment un sous-ensemble de ceux de S_x (et de T_x). Par le premier lemme, également démontré après cette récurrence, $S_x \cap T_x$ est bien une face commune à S_x et T_x .

- On a donc bien montré que $\mathcal{C}$ est une triangulation de P , dont les sommets des simplexes sont des barycentres de faces emboîtées de P .

► Ainsi, tout polytope admet une triangulation.

Pour clore cette démonstration, il reste à énoncer et démontrer les deux lemmes utilisés dans la preuve par récurrence.

► **Lemme 1 :** Si $S = \text{Conv}(x_0, \dots, x_n) \subset \mathbb{R}^n$ est un simplexe, alors pour tout $I \subset \llbracket 0, n \rrbracket$, $T = \text{Conv}(\{x_i \mid i \in I\})$ est une face de S .

Démonstration : Comme S est de dimension n , pour tout $i = 0, \dots, n$, l'ensemble $S_i = \text{Conv}(\{x_j \mid j \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{i\}\})$ est de dimension $n - 1$. Ainsi, S_i est contenu dans un hyperplan affine que l'on note $H_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \ell_i(x) = a_i\}$. Comme $x_i \notin H_i$, on peut choisir le signe de ℓ_i de sorte que $\ell_i(x_i) < a_i$. Par convexité, on a alors pour tout point x de S , $\ell_i(x) \leq a_i$. On observe donc que

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \ell_i(x) \leq a_i\}.$$

En effet, l'inclusion directe est déjà établie. Réciproquement, comme $\dim S = n$, l'espace affine engendré par S est $\mathbb{R}^n$, donc tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ peut s'écrire sous la forme $x = \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i$ avec $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$. Supposons que x vérifie toutes les inégalités $\ell_i(x) \leq a_i$. Alors

$$\ell_i(x) = \sum_{j=0}^n \lambda_j \ell_i(x_j) = \lambda_i \ell_i(x_i) + \sum_{j \neq i} \lambda_j a_i = \lambda_i \ell_i(x_i) + (1 - \lambda_i) a_i \leq a_i.$$

Ainsi, $\ell_i(x_i) < a_i$ implique que $\lambda_i \geq 0$. Comme ceci est vrai pour tout i , on a donc $x \in S$.

Pour $I \subset \llbracket 0, n \rrbracket$, on observe alors que :

$$T = \text{Conv}(\{x_i \mid i \in I\}) = \{x \in S \mid \forall i \notin I, \ell_i(x) = a_i\}.$$

Cela est clair par convexité, en remarquant que $\ell_i(x_j) = a_i$ si et seulement si $i \neq j$. Ainsi, T est bien une face de S .

► **Lemme 2 :** Soit P un polytope. Si $S_n = \text{Conv}(x_0, \dots, x_n)$ et $T_n = \text{Conv}(y_0, \dots, y_n)$ avec, pour tout i , $x_i = \text{bar}(F_i)$ et $y_i = \text{bar}(G_i)$, où F_i et G_i sont des faces de P de dimension i satisfaisant les inclusions

$$F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_n \quad \text{et} \quad G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_n,$$

alors

$$S_n \cap T_n = \text{Conv}(\{x_i \mid i \in \llbracket 0, n \rrbracket, x_i = y_i\}).$$

Démonstration : On montre ce résultat par récurrence.

- Si $n = 1$, le résultat est clair.

- Soit $n \geq 1$ et supposons le résultat vrai au rang $n - 1$. Soient S_n et T_n vérifiant les hypothèses du lemme, avec les mêmes notations. On distingue deux cas selon que x_n et y_n sont égaux ou non.

- **Premier cas :** Supposons $x_n = y_n$. On commence par montrer l'égalité

$$S_n \cap T_n = \text{Conv}(\{x_n\} \cup [S_{n-1} \cap T_{n-1}]).$$

L'inclusion directe étant évidente, prenons $z \in S_n \cap T_n$, que l'on peut donc écrire

$$z = \sum_{k=0}^n \lambda_k x_k = \sum_{k=0}^n \mu_k y_k,$$

pour des scalaires positifs tels que $\sum \lambda_k = \sum \mu_k = 1$. Si $z = x_n = y_n$, le résultat est clair, on suppose donc $z \neq x$ et donc que $\lambda_n \neq 1$ et $\mu_n \neq 1$. On pose

$$x = \frac{1}{1 - \lambda_n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k x_k \in S_{n-1} \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{1 - \mu_n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k y_k \in T_{n-1},$$

de sorte que

$$z = \lambda_n x_n + (1 - \lambda_n)x = \mu_n x_n + (1 - \mu_n)y.$$

Étant donné l'appartenance des points aux diverses faces de P , on a $x \in F_{n-1}$ et $y \in G_{n-1}$. Soit alors $i \in S_{F_{n-1}} \setminus S_{F_n}$. On a

$$\ell_i(z) = \lambda_n \ell_i(x_n) + (1 - \lambda_n) \underbrace{\ell_i(x)}_{=a_i} = \mu_n \ell_i(x_n) + (1 - \mu_n) \underbrace{\ell_i(y)}_{\leq a_i}.$$

Cela donne $(x_n - y_n)(a_i - \ell_i(x)) \geq 0$, d'où $\lambda_n \geq \mu_n$, car $\ell_i(x) < a_i$ par définition de i . Par symétrie, on obtient donc $\mu_n = \lambda_n$, ce qui permet de conclure que $x = y \in S_{n-1} \cap T_{n-1}$. Ainsi, $z \in \text{Conv}(\{x_n\} \cup [S_{n-1} \cap T_{n-1}])$. Enfin, par hypothèse de récurrence, on a

$$S_{n-1} \cap T_{n-1} = \text{Conv}(\{x_i \mid i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, x_i = y_i\}),$$

d'où

$$S_n \cap T_n = \text{Conv}(\{x_n\} \cup [S_{n-1} \cap T_{n-1}]) = \text{Conv}(\{x_i \mid i \in \llbracket 0, n \rrbracket, x_i = y_i\}).$$

• **Second cas :** $x_n \neq y_n$. On procède de façon analogue en commençant par montrer que

$$S_n \cap T_n = \text{Conv}(S_{n-1} \cap T_{n-1}).$$

Comme précédemment, l'inclusion directe est claire. Soit $z \in S_n \cap T_n$, alors, on peut écrire, pour des scalaires positifs tels que $\sum \lambda_k = \sum \mu_k = 1$,

$$z = \sum_{k=0}^n \lambda_k x_k = \sum_{k=0}^n \mu_k y_k.$$

Montrons que $\lambda_n = \mu_n = 0$. Comme $x_n \neq y_n$, on a $F_n \neq G_n$, donc $z \in F_n \cap G_n$, qui est une face stricte de F_n . Il existe alors $i \notin S_{F_n}$ tel que $\ell_i(z) = a_i$. On remarque que si $\lambda_n \neq 0$, alors

$$\ell_i(z) = \lambda_n \underbrace{\ell_i(x_n)}_{< a_i} + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \underbrace{\ell_i(x_k)}_{\leq a_i} < a_i,$$

ce qui est une contradiction. Donc $\lambda_n = 0$. Par symétrie, on obtient aussi $\mu_n = 0$. Ainsi, $z \in \text{Conv}(S_{n-1} \cap T_{n-1})$. On conclut alors avec l'hypothèse de récurrence

$$S_n \cap T_n = \text{Conv}(S_{n-1} \cap T_{n-1}) = \text{Conv}(\{x_i \mid i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, x_i = y_i\}) = \text{Conv}(\{x_i \mid i \in \llbracket 0, n \rrbracket, x_i = y_i\}).$$

Dans tous les cas, l'hérédité est démontrée.

Remarque : On observe alors que l'on dispose d'une description explicite de la triangulation : il s'agit de l'ensemble des simplexes dont les sommets sont les barycentres de faces emboîtées. La preuve par récurrence n'est donc pas nécessaire pour construire la triangulation, mais uniquement pour montrer que la réalisation d'un tel complexe est bien P . Notamment, la question (26) n'est pas d'une grande utilité. Le fait que $F_x \cap G_x$ soit une face commune à F_x et G_x , ce qui constituait le point délicat et laborieux à démontrer, ne peut pas être réutilisé ; il faut redémontrer cette propriété pour nos simplexes. L'approche de Jean Nougayrède et Pierre Vandaële, consistant à trianguler des complexes, est donc probablement plus efficace et correspond sans doute davantage à l'intention des concepteurs du sujet. Nous avons simplement cherché à élaborer une méthode alternative permettant de ne trianguler que des polytopes, en tentant de formuler la bonne hypothèse de récurrence permettant de recoller correctement les triangulations issues de faces différentes.

a. En effet, durant l'étape d'hérédité, nous allons devoir trianguler les différentes faces de P . Cependant, sans hypothèses supplémentaires, rien ne nous garantit que les triangulations des différentes faces soient compatibles, i.e., qu'une fois les enveloppes convexes avec x faites, on obtienne bien un complexe. Notamment, rien ne nous garantit que l'intersection de deux simplexes soit vide ou une face commune. Le choix de x est en fait crucial. Les faces de petite dimension appartenant à plusieurs faces de dimension supérieure seront triangulées plusieurs fois. Si ces triangulations diffèrent, il sera impossible de tout recoller correctement. Il faut donc fournir un critère objectif pour choisir x de manière à ce qu'une face soit toujours triangulée de la même façon. C'est pourquoi nous proposons de considérer la notion de barycentre de face.

Une autre approche consiste à introduire le concept de triangulation de complexe et à prouver par récurrence que tout complexe admet une telle triangulation. C'est ce qui est proposé dans le corrigé de Jean Nougayrède et Pierre Vandaële.

(28) Montrer que tout complexe $\mathcal{C}$ dont la réalisation est convexe vérifie $\chi(\mathcal{C}) = 1$.

Version courte :

On a la décomposition en union disjointe

$$|\mathcal{C}| = \bigsqcup_F F^\circ$$

où F parcourt les faces du complexe $\mathcal{C}$, ce qui implique que $\chi(\mathcal{C}) = \chi_n(|\mathcal{C}|)$. Par convexité, $|\mathcal{C}|$ est un polytope, d'où le résultat.

Version détaillée :

On commence par vérifier la relation

$$|\mathcal{C}| = \bigsqcup_F F^\circ,$$

où F parcourt l'ensemble des faces de $\mathcal{C}$, c'est-à-dire les faces des polytopes constituant $\mathcal{C}$. L'inclusion $|\mathcal{C}| \supset \bigsqcup_F F^\circ$ est évidente. De plus, puisque l'on a déjà démontré que tout polytope se décompose en union disjointe de ses faces, l'autre inclusion $|\mathcal{C}| \subset \bigsqcup_F F^\circ$ est également vérifiée.

Il reste à vérifier que l'union est disjointe. Soient F et G deux faces distinctes de $\mathcal{C}$. Si $F \subset G$ ou $G \subset F$, alors F et G sont deux faces distinctes d'un même polytope. Le résultat établi précédemment sur la décomposition des polytopes implique alors que $F^\circ \cap G^\circ = \emptyset$. Supposons désormais que $F \cap G \subsetneq F, G^a$. En notant P (resp. Q) un polytope dont F (resp. G) est une face, on observe que $F \cap G$ est une face de P . En effet, $P \cap Q$ est, par hypothèse de complexe, une face de P . Ainsi, $F \cap (P \cap Q)$ est une face de P , donc aussi une face de $P \cap Q$. Symétriquement, $G \cap (P \cap Q)$ est une face de $P \cap Q$, et donc

$$F \cap G = (F \cap (P \cap Q)) \cap (G \cap (P \cap Q)),$$

est une face de $P \cap Q$, donc de P .

Comme $F \cap G$ est une face strictement incluse dans F , on a $F^\circ \cap (F \cap G) = \emptyset$ (les éléments de F° sont précisément ceux qui n'appartiennent à aucune face stricte). Comme $F^\circ \subset F$ et $G^\circ \subset G$, il en résulte que

$$F^\circ \cap G^\circ \subset F^\circ \cap G = F^\circ \cap (F \cap G) = \emptyset.$$

Par conséquent, $\mathbb{1}_{|\mathcal{C}|} = \sum_F \mathbb{1}_{F^\circ} \in \mathcal{U}_n$ et

$$\chi_n(|\mathcal{C}|) = \sum_F (-1)^{\dim F} = \chi(\mathcal{C}).$$

Ainsi, on prouve au passage que la caractéristique $\chi(\mathcal{C})$ d'un complexe ne dépend que de sa réalisation. Si maintenant $|\mathcal{C}|$ est convexe, alors, puisqu'on peut écrire $|\mathcal{C}|$ comme l'enveloppe convexe des sommets des polytopes de $\mathcal{C}$, la question (17) implique que $|\mathcal{C}|$ est un polytope. La question (21) permet de conclure que

$$\chi(|\mathcal{C}|) = 1.$$

a. On procède à un jeu de logique pénible basé sur les relations suivantes entre faces et polytopes : Si A est une face de B , et que B est une face de C , alors A est une face de C . Et, si $A \subset B$ sont deux faces de C , alors A est une face de B .

3 Le polytope de Birkhoff

Soit $n \geq 1$ un entier. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels et $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients entiers. On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est bistochastique si pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$ on a

$$M_{i,j} \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n M_{i,k} = \sum_{k=1}^n M_{k,j} = 1.$$

On note B_n l'ensemble des matrices bistochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et S_n le groupe symétrique d'ordre n .

(29) Montrer que B_n est un polytope et déterminer sa dimension.

Version courte :

Il est clair que B_n est un polytope. On remarque que le système formé par les $2n$ équations est de rang $2n - 1$. Étant l'intersection d'un fermé d'intérieur non vide et d'un espace affine de dimension $(n - 1)^2$, B_n a donc une dimension de $(n - 1)^2$.

Version détaillée :

B_1 est le singleton $\{(1)\}$, donc c'est un polytope de dimension 0. On suppose désormais $n \geq 2$. Pour $i, j = 1, \dots, n$, les applications de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$

$$M \mapsto -M_{i,j}, \quad M \mapsto \pm \sum_{k=1}^n M_{i,k}, \quad \text{et} \quad M \mapsto \pm \sum_{k=1}^n M_{k,j},$$

étant des formes linéaires, B_n est bien l'ensemble des solutions d'inégalités affines. De plus, B_n est fermé, en tant qu'intersection d'images réciproques de fermés par des applications continues. Par ailleurs, pour $M \in B_n$, tous les coefficients de M vérifient $0 \leq M_{i,j} \leq 1$, donc $\|M\|_\infty \leq 1$: B_n est donc borné. Enfin, on a $I_n \in B_n$, donc B_n est non vide. B_n est donc un polytope.

Pour étudier la dimension de B_n , on considère le sous-espace vectoriel

$$E = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{k=1}^n M_{i,k} = \sum_{k=1}^n M_{k,i} = 0 \right\}.$$

On va montrer que $\dim E = (n - 1)^2$ ainsi que $\vec{B}_n = E$, ce qui permettra de conclure.

Pour $i, j = 1, \dots, n$, on introduit $E_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les matrices élémentaires dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en position (i, j) , qui vaut 1. On montre alors que, pour $i, j = 1, \dots, n - 1$, les matrices

$$A_{i,j} = E_{i,j} - E_{n,j} - E_{i,n} + E_{n,n}$$

forment une base de E . En effet, pour tout $i, j = 1, \dots, n - 1$, $A_{i,j} \in E$. La famille est clairement libre, si

$$\sum_{i,j=1}^{n-1} \lambda_{i,j} A_{i,j} = 0,$$

pour des scalaires $\lambda_{i,j} \in \mathbb{R}$, alors en regardant les coefficients en position (i, j) , on a $\lambda_{i,j} = 0$. Enfin, si $M = \sum_{i,j=1}^n M_{i,j} E_{i,j} \in E$, les équations définissant E donnent, pour $i, j \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$,

$$M_{n,j} = - \sum_{k=1}^{n-1} M_{k,j}, \quad M_{i,n} = - \sum_{k=1}^{n-1} M_{i,k}, \quad \text{et} \quad M_{n,n} = - \sum_{k=1}^{n-1} M_{k,n} = \sum_{k,l=1}^{n-1} M_{k,l}.$$

Ceci permet d'écrire :

$$M = \sum_{i,j=1}^n M_{i,j} E_{i,j} = \sum_{i,j=1}^{n-1} M_{i,j} E_{i,j} - \sum_{i,j=1}^{n-1} M_{i,j} E_{n,j} - \sum_{i,j=1}^{n-1} M_{i,j} E_{i,n} + \sum_{i,j=1}^{n-1} M_{i,j} E_{n,n} = \sum_{i,j=1}^{n-1} M_{i,j} A_{i,j}.$$

Donc la famille $(A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n-1}$ est également génératrice. C'est donc une base de E , d'où $\dim E = (n - 1)^2$.

Montrons enfin que $E = \vec{B}_n$. L'inclusion $\vec{B}_n \subset E$ est claire. Soit alors $M \in E \setminus \{0\}$. On observe, en notant $\mathcal{I}$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à $\frac{1}{n}$, que $\mathcal{I} \pm \frac{M}{n\|M\|_\infty} \in B_n$. En effet, il est clair que $\mathcal{I} \in B_n$, et les coefficients de $\mathcal{I} \pm \frac{M}{n\|M\|_\infty}$ sont bien tous positifs. Alors, par définition de $\vec{B}_n = \text{vect}(B_n - B_n)$, on a

$$M = \frac{n\|M\|_\infty}{2} \left[\left(\mathcal{I} + \frac{M}{n\|M\|_\infty} \right) - \left(\mathcal{I} - \frac{M}{n\|M\|_\infty} \right) \right] \in \vec{B}_n.$$

On a donc bien $\dim B_n = \dim E = (n - 1)^2$. Ainsi, B_n est bien un polytope de dimension $(n - 1)^2$.

- (30) Pour tout $\sigma \in S_n$, on définit $P^\sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ comme suit : pour $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ on pose $P_{ij}^\sigma = 1$ si $j = \sigma(i)$, $P_{ij}^\sigma = 0$ sinon. Montrer que P^σ est un sommet de B_n pour tout $\sigma \in S_n$.

Version courte :

P_σ étant la seule matrice de B_n vérifiant les égalités $(P_\sigma)_{i,j} = 0$ si $j \neq \sigma(i)$, elle est clairement un sommet.

Version détaillée :

Pour $\sigma \in S_n$, il est clair que

$$\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, j \neq \sigma(i) \Rightarrow M_{i,j} = 0\} = \{P^\sigma\}$$

Ainsi, $\{P^\sigma\}$ est une face de dimension 0 : P^σ est un sommet de B_n .

Les deux prochaines questions montrent que tout sommet de B_n est de la forme P^σ .

- (31) On suppose que $M \in B_n \setminus \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer qu'il existe une suite $(r_1, s_1), (r_2, s_2), \dots, (r_k, s_k)$ de paires d'indices avec $k \geq 2$ telle que

$$0 < M_{r_i, s_i} < 1, \quad 0 < M_{r_i, s_{i+1}} < 1, \quad \text{et} \quad (r_k, s_k) = (r_1, s_1),$$

puis qu'on peut supposer que tous les couples $(r_1, s_1), (r_1, s_2), (r_2, s_2), \dots, (r_{k-1}, s_{k-1}), (r_{k-1}, s_k)$ sont distincts.

Version courte :

En partant d'un coefficient $M_{i,j}$ non entier, on trouve sur la même ligne un coefficient également non entier. En alternant entre lignes et colonnes, on obtient une telle suite de coordonnées. Comme le nombre d'indices est fini, cette suite finit nécessairement par boucler. En sélectionnant une sous-suite minimale qui boucle, on obtient ainsi le résultat recherché.

Version détaillée :

Premièrement, il est clair que les matrices de B_n ont leurs coefficients dans $[0, 1]$. Si $M \in B_n \setminus \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, alors M possède au moins un coefficient non entier. Si, pour certains $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $M_{i,j} \notin \mathbb{Z}$, les relations définissant B_n assurent qu'il existe un autre coefficient non entier sur la ligne i , ainsi qu'un autre sur la colonne j . On construit alors les suites (a_n) et (b_n) à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ comme suit :

- On pose $a_0 = i$ et $b_0 = j$, où i et j sont des indices de $\llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $M_{i,j} \notin \mathbb{Z}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit $b_{n+1} = j$ où j est un indice de $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{b_n\}$ tel que $M_{a_n, j} \notin \mathbb{Z}$ (un tel j existe d'après la remarque précédente). On pose ensuite $a_{n+1} = i$, où i est un indice de $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{a_n\}$ tel que $M_{i, b_{n+1}} \notin \mathbb{Z}$. L'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket^2$ étant fini, il existe nécessairement deux entiers $n < m$ tels que $a_n = a_m$ et $b_n = b_m$. On pose alors $k = m - n + 1 \geq 2$ et, pour $i = 1, \dots, k$, on définit

$$r_i = a_{n+i-1}, \quad \text{et} \quad s_i = b_{n+i-1}.$$

Ainsi, par construction, on a bien

$$0 < M_{r_i, s_i} < 1, \quad 0 < M_{r_i, s_{i+1}} < 1, \quad \text{et} \quad (r_k, s_k) = (r_1, s_1).$$

De plus, la construction garantit que $r_{i+1} \neq r_i$ et $s_{i+1} \neq s_i$ pour tout i . On vient donc de montrer que l'ensemble

$$\left\{ (r_i, s_i)_{1 \leq i \leq k} \mid k \geq 2, \forall i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket, \begin{cases} 0 < M_{r_i, s_i} < 1 \\ 0 < M_{r_i, s_{i+1}} < 1 \end{cases}, \text{ et } \begin{cases} r_i \neq r_{i+1} \\ s_i \neq s_{i+1} \end{cases}, \text{ et } (r_k, s_k) = (r_1, s_1) \right\},$$

est non vide. Prenons alors une suite de longueur minimale et montrons que les divers couples sont alors distincts.

- Supposons que pour $i < j \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$ on ait $(r_i, s_i) = (r_j, s_j)$. Quitte à considérer la suite de même longueur,

$$(r_i, s_i), (r_{i+1}, s_{i+1}), \dots, (r_{k-1}, s_{k-1}), (r_1, s_1), \dots, (r_i, s_i),$$

on peut supposer que $i = 1$. On observe alors que $j \neq k - 1$, sinon on aurait $s_{k-1} = s_1 = s_k$. On peut alors considérer la suite

$$(r_1, s_1), (r_{j+1}, s_{j+1}), \dots, (r_k, s_k),$$

qui est strictement plus courte et qui satisfait toutes les hypothèses requises.

• Supposons que pour $i < j \in \llbracket 1, k - 1 \rrbracket$ on ait $(r_i, s_{i+1}) = (r_j, s_{j+1})$. Comme précédemment, en "tournant" la suite, on peut supposer que $i = 1$. On observe alors que $j \neq k - 1$, sinon on aurait $s_k = s_2 = s_1$. On considère alors la suite

$$(r_1, s_1), (r_{j+1}, s_{j+1}), \dots, (r_k, s_k),$$

qui est strictement plus courte et qui vérifie bien toutes les hypothèses requises.

• Supposons que $(r_i, s_i) = (r_j, s_{j+1})$ pour deux indices dans $\llbracket 1, k - 1 \rrbracket$. Quitte à "faire tourner" à nouveau la suite, on peut supposer $i = 2$. De plus, quitte à changer les paires d'indices, on peut supposer que $|j - i|$ est maximal (parmi toutes les rotations possibles). Les contraintes imposées sur la suite impliquent alors

- $j \neq 2$, sinon $s_2 = s_3$,
- $j \neq 1$, sinon $r_2 = r_1$,
- $j \neq k - 1$, sinon $s_k = s_1 = s_2$.

Premier cas : Si $r_{j+1} \neq r_1$, on observe que la suite

$$(r_1, s_1), (r_{j+1}, s_{j+1}), \dots, (r_k, s_k)$$

est valide et strictement plus courte.

Second cas : Si $r_{j+1} = r_1$, alors, par maximalité du choix de i et j , on a nécessairement $s_1 \neq s_{j+2}$ (et donc en particulier $j + 2 < k$). La suite

$$(r_1, s_1), (r_{j+2}, s_{j+2}), \dots, (r_k, s_k),$$

est également valide et strictement plus courte.

Ainsi, dans tous les cas, on aboutit à une contradiction vis-à-vis de la minimalité de notre suite. On peut donc supposer que les $(r_1, s_1), (r_1, s_2), (r_2, s_2), \dots, (r_{k-1}, s_{k-1}), (r_{k-1}, s_k)$ sont deux à deux distincts.

(32) On suppose que $M \in B_n \setminus \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. En déduire qu'il existe une matrice Q non nulle et $\epsilon > 0$ telle que $\{M + tQ \mid t \in [-\epsilon, \epsilon]\} \subset B_n$, et conclure que tout sommet de B_n est de la forme P^σ .

Version courte :

On définit Q comme la matrice ayant des 1 en position (r_i, s_i) , des -1 en position (r_i, s_{i+1}) et des 0 ailleurs, ainsi que $\min\{M_{i,j}, 1 - M_{i,j} \mid i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, M_{i,j} \notin \mathbb{Z}\} > 0$ qui convient. Le même raisonnement que celui utilisé dans la question **(18)** permet de conclure.

Version détaillée :

Posons $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie, pour $i \in \llbracket 1, k - 1 \rrbracket$, par un 1 en position (r_i, s_i) , un -1 en position (r_i, s_{i+1}) , et des 0 ailleurs. Cette définition a bien un sens car on a supposé que les couples $(r_1, s_1), (r_1, s_2), (r_2, s_2), \dots, (r_{k-1}, s_{k-1}), (r_{k-1}, s_k)$ sont deux à deux distincts.

On vérifie que $Q \in E = \vec{B}_n$, où E a été introduit et étudié lors de la résolution de la question **(29)**. Soit $l \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on observe en effet que

$$\sum_{j=1}^n Q_{l,j} = \sum_{i=1}^{k-1} (\mathbb{1}_{r_i=l} - \mathbb{1}_{r_i=l}) = 0,$$

où l'on introduit $\mathbb{1}_{a=b}$, défini par $\mathbb{1}_{a=b} = 1$ si $a = b$ et 0 sinon. De même,

$$\sum_{j=1}^n Q_{j,l} = \sum_{i=1}^{k-1} (\mathbb{1}_{s_i=l} - \mathbb{1}_{s_{i+1}=l}) = \sum_{i=1}^{k-1} (\mathbb{1}_{s_i=l} - \mathbb{1}_{s_i=l}) = 0,$$

par changement d'indice. Ainsi, on a bien $Q \in E$. Posons alors

$$\epsilon = \min \left\{ M_{i,j}, 1 - M_{i,j} \mid i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, M_{i,j} \notin \mathbb{Z} \right\}.$$

Alors, par les propriétés de E , pour $t \in [-\epsilon, \epsilon]$, on a $M + tQ \in B_n$, car pour de telles valeurs de t , les coefficients de $M + tQ$ sont tous positifs.

On utilise ensuite une argumentation identique à celle employée dans la question (18) pour conclure que M n'est pas un sommet. Brièvement :

Supposons que $\{M\}$ soit un sommet de B_n , et notons $\ell_i(x) \leq a_i$ pour $i \in I$ les inégalités définissant B_n . Si pour tout $i \in S_{\{M\}}$, on a $\ell_i(Q) = 0$, alors pour tout $t \in [-\epsilon, \epsilon]$, $M + tQ \in \{M\}$, ce qui est absurde. Il existe donc un $i \in S_{\{M\}}$ tel que $\ell_i(Q) \neq 0$. Pour un $t \in [-\epsilon, \epsilon]$ de même signe que $\ell_i(Q)$, on a $\ell_i(M + tQ) > a_i$, ce qui contredit le fait que $M + tQ \in B_n$.

Ainsi, si M est un sommet de B_n , alors $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, donc tous les coefficients de M sont soit 0, soit 1. Comme de plus $\sum_i M_{i,j} = \sum_j M_{i,j} = 1$, chaque ligne et chaque colonne contiennent exactement un 1. On définit alors, pour $i = 1, \dots, n$, $\sigma(i)$ comme l'unique j tel que $M_{i,j} = 1$. La fonction σ est injective, car si $\sigma(i) = \sigma(j)$ avec $i \neq j$, alors M aurait deux 1 dans la colonne $\sigma(i)$. Comme $\llbracket 1, n \rrbracket$ est fini, σ est donc bijective : $\sigma \in S_n$. Et par construction, $M = P^\sigma$. Tout sommet de B_n est de la forme P^σ pour $\sigma \in S_n$.

4 Développement des fractions rationnelles

Soit $n \geq 1$ un entier. On note $\mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$ le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}$. Pour tout $\gamma \in \mathbb{Z}^n$, on note $x^\gamma : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction qui vaut 1 en γ et 0 ailleurs. On pourra aussi poser $1 = x^0$.

Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments $\mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$. Si pour tout $\gamma \in \mathbb{Z}^n$ on a $\text{Card}\{i \in I \mid f_i(\gamma) \neq 0\} < \infty$, on note $g = \sum_{i \in I} f_i$, la fonction définie par $g(\gamma) = \sum_{i \in I} f_i(\gamma)$ pour tout $\gamma \in \mathbb{Z}^n$. En particulier, pour tout $f \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$ on a

$$f = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^n} f(\gamma) x^\gamma.$$

On note alors $\mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$ formé des fonctions nulles en dehors d'un sous ensemble fini de $\mathbb{Z}^n$. Ainsi $\{x^\gamma \mid \gamma \in \mathbb{Z}^n\}$ est une base de $\mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$.

Pour $f, g \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$, lorsque pour tout $\gamma \in \mathbb{Z}^n$ on a $\text{Card}\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \mid \alpha + \beta = \gamma \text{ et } f(\alpha)g(\beta) \neq 0\} < \infty$, on définit fg par la formule

$$(fg)(\gamma) = \sum_{\alpha + \beta = \gamma} f(\alpha)g(\beta)$$

pour tout $\gamma \in \mathbb{Z}^n$. On admet que cette opération est commutative et associative quand elle est bien définie. On admet aussi que cette loi munit de $\mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$ d'une structure de $\mathbb{C}$ -algèbre commutative intègre et on notera $\mathbb{C}(\mathbb{Z}^n)$ son corps des fractions défini ci-après.

Un élément de ce corps est une expression de la forme $\frac{P}{Q}$ avec $P, Q \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$ et $Q \neq 0$; deux éléments $\frac{P_1}{Q_1}$ et $\frac{P_2}{Q_2}$ sont identifiés si et seulement si $P_1 Q_2 = P_2 Q_1$. Ces éléments s'ajoutent et se multiplient comme des fractions usuelles. On peut identifier $P \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$ à la fraction $\frac{P}{1} \in \mathbb{C}(\mathbb{Z}^n)$.

On dit que $f \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$ est rationnel s'il existe $P \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$ non nul tel que $Pf \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$. On dit que f est de torsion s'il existe $P \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$ non nul tel que $Pf = 0$. On note $\mathcal{R}$ le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des éléments rationnels de $\mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$ et $\mathcal{T}$ le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des éléments de torsion de $\mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$.

(33) Dans le cas où $n = 1$, montrer que les inclusions $0 \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{R} \subset \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$ sont strictes.

Version courte :

Les inclusions sont claires. $\sum_{k \in \mathbb{Z}} x^k$ est de torsion non nulle, 1 est rationnel mais n'est pas de torsion, et $\sum_{k \in \mathbb{N}} x^{k^2}$ n'est pas rationnel.

Version détaillée :

Considérons les inclusions une à une :

- $0 \notin \mathcal{T}$. L'élément 0 est clairement de torsion. De plus, on remarque que

$$(1-x) \sum_{n \in \mathbb{Z}} x^n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x^n - \sum_{n \in \mathbb{Z}} x^{n+1} = 0.$$

Donc $\sum_{n \in \mathbb{Z}} x^n$ est un élément de torsion non nul. Ainsi, l'inclusion $0 \subset \mathcal{T}$ est stricte.

- $\mathcal{T} \subsetneq \mathcal{R}$. L'inclusion est immédiate. De plus, $1 \in \mathcal{R}$ et n'est pas de torsion, par intégrité de $\mathbb{C}[\mathbb{Z}]$. Ainsi, l'inclusion $\mathcal{T} \subset \mathcal{R}$ est stricte.

- $\mathcal{R} \subsetneq \mathbb{C}[[\mathbb{Z}]]$. On propose deux exemples où $f \in \mathbb{C}[[\mathbb{Z}]]$ n'est pas rationnelle.

- Soit $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} x^n$. Soit $P = \sum_{n=-k}^k c_n x^n \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}]$, vérifions que $Pf \notin \mathbb{C}[\mathbb{Z}]$. Pour tout $l \geq 1$, on observe que le coefficient de degré $(kl)^2$ dans l'expansion du produit Pf est

$$c_0 x^{(kl)^2}.$$

En effet, les termes issus du développement de Px^{n^2} ont leur degré compris entre $n^2 - k$ et $n^2 + k$. Comme l'écart entre $(kl)^2$ et ses deux carrés voisins $(kl-1)^2$ et $(kl+1)^2$ est supérieur à k , seul le terme issu du développement de $x^{(kl)^2} P$ contribue. Dès lors, Pf possède une infinité de coefficients non nuls, donc $Pf \notin \mathbb{C}[\mathbb{Z}]$, et ainsi $f \notin \mathcal{R}$.

- Soit $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!} x^n$. Montrons que $f \notin \mathcal{R}$. Supposons par l'absurde qu'il existe $P, Q \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}]$ tels que $Qf = P$. En évaluant pour $x = z > 0$ puis en considérant un équivalent asymptotique quand $z \rightarrow \infty$, cela donnerait

$$c_Q z^k e^z \sim c_P z^l,$$

pour certains $c_Q \in \mathbb{C}^*$, $c_P \in \mathbb{C}$, et $k, l \in \mathbb{Z}$. Cela impliquerait $e^z \sim \frac{c_P}{c_Q} z^{l-k}$, ce qui est absurde par croissance comparées. Donc $f \notin \mathcal{R}$.

Ainsi, l'inclusion $\mathcal{R} \subset \mathbb{C}[[\mathbb{Z}]]$ est stricte.

Remarque : L'étude des séries formelles — de Laurent i.e., autorisant les puissances négatives — à plusieurs variables — peut paraître abstraite. Pour gagner en intuition, je conseille au lecteur de consulter le sujet de Maths D 2024, dont une bonne partie traite de l'étude de tels objets dans le cadre plus simple des séries formelles en une variable. Pour ceux que cela intéresse, j'avais rédigé un corrigé, disponible sur CPGE Paradise.

a. On demandait justement de justifier que $f \notin \mathcal{R}$ dans le sujet de Maths D 2024.

- (34) On définit une application $\mathbb{C}$ -linéaire $I : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{C}(\mathbb{Z}^n)$ de la façon suivante. Si $f \in \mathcal{R}$ vérifie $Qf = P$ avec $P, Q \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$ et Q non nul¹, on pose $I(f) = \frac{P}{Q}$. Montrer que I est bien définie, et que c'est une application linéaire de noyau $\mathcal{T}$ vérifiant $I(Pf) = PI(f)$ pour tout $f \in \mathcal{R}$ et $P \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$.

Version courte :

I est bien définie, car si $Q_1 f = P_1$ et $Q_2 f = P_2$, alors $Q_1 Q_2 f = Q_1 P_2 = Q_2 P_1$. Les autres propriétés se vérifient de manière analogue.

Version détaillée :

Il s'agit de vérifier plusieurs points.

- I est bien définie car si $Q_1 f = P_1$ et $Q_2 f = P_2$ pour $Q_1, Q_2, P_1, P_2 \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$ et $f \in \mathcal{R}$, avec $Q_1 \neq 0$ et $Q_2 \neq 0$, alors en calculant $Q_1 Q_2 f$ de deux façons, on obtient

$$Q_1 Q_2 f = P_1 Q_2 = P_2 Q_1.$$

Ainsi, les fractions $\frac{P_1}{Q_1}$ et $\frac{P_2}{Q_2}$ sont bien identifiées dans $\mathbb{C}(\mathbb{Z}^n)$, et donc I est bien définie.

- On vérifie la linéarité. Soient $f, g \in \mathcal{R}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ainsi que $P_1, P_2, Q_1, Q_2 \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$, avec $Q_1 \neq 0$ et $Q_2 \neq 0$,

1. Cette précision avait été oublié du sujet original. Merci à André Chambrillon et Yanis Hedjem pour l'avoir remarqué.

tels que $Q_1 f = P_1$ et $Q_2 g = P_2$. On observe que

$$Q_1 Q_2 (\lambda f + \mu g) = \lambda P_1 Q_2 + \mu P_2 Q_1.$$

Donc

$$I(\lambda f + \mu g) = \frac{\lambda P_1 Q_2 + \mu P_2 Q_1}{Q_1 Q_2} = \lambda \frac{P_1}{Q_1} + \mu \frac{P_2}{Q_2} = \lambda I(f) + \mu I(g).$$

Donc I est linéaire.

• Soit $f \in \mathcal{R}$ tel que $I(f) = 0$. Alors, par définition, il existe $Q \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$, non nul, tel que $Qf = 0$, ce qui correspond exactement à la définition de $f \in \mathcal{T}$. Réciproquement, il est clair que si $f \in \mathcal{T}$, alors $I(f) = 0$.

Donc $\ker(I) = \mathcal{T}$.

Soient $f \in \mathcal{R}$ et $P \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$. En prenant $Q, R \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$ avec $Q \neq 0$, tels que $Qf = R$, on observe que

$$Q(Pf) = PR,$$

avec $Pf \in \mathcal{R}$. Alors, par définition,

$$I(Pf) = \frac{PR}{Q} = PI(f).$$

Donc pour tout $f \in \mathcal{R}$ et $P \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$, $I(Pf) = PI(f)$.

Remarque : On peut montrer, par les mêmes principes, que I est multiplicative : $I(fg) = I(f)I(g)$ pour $f, g \in \mathcal{R}$.

(35) Soit $u : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un morphisme de groupes injectif. Montrer qu'il existe une unique application $s_u : \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n] \rightarrow \mathcal{R}$ vérifiant les trois conditions suivantes :

- (a) $s_u(Pf) = Ps_u(f)$ pour tout $f \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$ et $P \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$.
- (b) $I(s_u(f)) = f$ pour tout $f \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$.
- (c) $s_u\left(\frac{1}{1-g}\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} g^n$ si g est une combinaison linéaire finie d'éléments de la forme x^γ avec $\gamma \in \mathbb{Z}^n$ vérifiant $u(\gamma) > 0$.

Version courte :

L'injectivité de u assure que tout $Q \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$ peut être écrit de manière unique sous la forme $Q = c_0 x^{\gamma_0} (1-g)$, avec $c_0 \in \mathbb{C}^*$, $\gamma_0 \in \mathbb{Z}^n$, et où g est une combinaison linéaire finie d'éléments de la forme x^γ avec $\gamma \in \mathbb{Z}^n$ et $u(\gamma) > 0$. En appliquant les propriétés (a) et (b), on obtient alors l'unique expression possible pour $s_u\left(\frac{P}{Q}\right)$

$$s_u\left(\frac{P}{Q}\right) = P c_0^{-1} x^{-\gamma_0} \sum_{n \in \mathbb{N}} g^n,$$

ce qui assure l'unicité de s_u . Réciproquement, on définit s_u par cette formule, les propriétés (a), (b) et (c) étant alors automatiquement vérifiées.

Version détaillée :

Nous allons procéder par analyse-synthèse pour démontrer l'unicité de s_u , puis son existence. Avant cela, montrons un lemme préliminaire concernant l'écriture des éléments de $\mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$, fondé sur l'injectivité du morphisme u .

Lemme : Tout $Q \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$ non nul peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$Q = c_0 x^{\gamma_0} (1-g),$$

pour $c_0 \in \mathbb{C}^*$, $\gamma_0 \in \mathbb{Z}^n$ et $g \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$, où g est une combinaison linéaire finie d'éléments de la forme x^γ avec $\gamma \in \mathbb{Z}^n$ tel que $u(\gamma) > 0$.

• **Existence :** Soit $Q \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$ non nul. Écrivons $Q = \sum_{k=1}^M q_k x^{\gamma_k}$, avec $q_k \neq 0$ et $M \geq 1$. Par injectivité de

u , les valeurs $u(\gamma_1), \dots, u(\gamma_M)$ sont distinctes. On peut donc choisir $k_0 \in \llbracket 1, M \rrbracket$ tel que

$$\forall k \in \llbracket 1, M \rrbracket \setminus \{k_0\}, \quad u(\gamma_{k_0}) < u(\gamma_k).$$

On pose alors

$$c_0 = q_{k_0}, \quad \gamma_0 = \gamma_{k_0}, \quad \text{et} \quad g = - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k_0}}^M q_k x^{\gamma_k - \gamma_{k_0}}.$$

On a ainsi $c_0 \in \mathbb{C}^*$, $\gamma_0 \in \mathbb{Z}^n$, et $g \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$, g étant une combinaison linéaire des $x^{\gamma_k - \gamma_{k_0}}$. Or, comme u est un morphisme, et par la stricte minimalité de $u(\gamma_{k_0})$, on a $u(\gamma_k - \gamma_{k_0}) = u(\gamma_k) - u(\gamma_{k_0}) > 0$, pour tout $k \neq k_0$.

• **Unicité** : Supposons deux écritures de Q satisfaisant les conditions du lemme :

$$Q = c_0 x^{\gamma_0} (1 - g) = d_0 x^{\delta_0} (1 - h).$$

En examinant le terme x^γ qui minimise $u(\gamma)$ dans le développement de ces deux expressions, on constate que, par injectivité de u , par le fait que u est un morphisme, et que $u(\gamma) > 0$ pour tout terme de g et h , ce terme minimal est nécessairement unique. Il en résulte que $\gamma_0 = \delta_0$ et $c_0 = d_0$, d'où $g = h$.

Une autre précaution avant de passer à la preuve consiste à vérifier que l'écriture $\sum_{n \in \mathbb{N}} g^n$ a bien un sens sous l'hypothèse que g est une combinaison linéaire finie d'éléments de la forme x^γ , avec $\gamma \in \mathbb{Z}^n$ vérifiant $u(\gamma) > 0$. En effet, en notant

$$g = \sum_{k=1}^M g_k x^{\gamma_k},$$

avec $u(\gamma_k) > 0$ pour tout $k = 1, \dots, M$, on pose $l = \min\{u(\gamma_k) \mid k \in \llbracket 1, M \rrbracket\} > 0$. On observe que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les termes apparaissant dans le développement de g^n sont de la forme

$$G x^{\gamma_{k_1} + \dots + \gamma_{k_n}},$$

pour $G \in \mathbb{C}$ et $k_1, \dots, k_n \in \llbracket 1, M \rrbracket$, avec alors $u(\gamma_{k_1} + \dots + \gamma_{k_n}) \geq nl$. Ainsi, pour un $\gamma \in \mathbb{Z}^n$ fixé, seules les puissances $n \in \mathbb{N}$ telles que $nl \leq u(\gamma)$ peuvent contribuer à un terme en x^γ : il y en a donc un nombre fini, et la somme $\sum_{n \in \mathbb{N}} g^n$ est bien définie.

Nous passons donc à la résolution de la question, en commençant par une phase d'analyse.

Analyse : Supposons que $s_u : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$ vérifie les propriétés (a), (b) et (c). Soit $\frac{P}{Q} \in \mathbb{C}(\mathbb{Z}^n)$. Essayons d'exprimer $s_u\left(\frac{P}{Q}\right)$. D'après le lemme, on peut écrire $Q = c_0 x^{\gamma_0} (1 - g)$ avec $c_0 \in \mathbb{C}^*$, $\gamma_0 \in \mathbb{Z}^n$, et $g \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$ combinaison linéaire finie d'éléments de la forme x^γ avec $u(\gamma) > 0$. On a alors

$$s_u\left(\frac{P}{Q}\right) = s_u\left(\frac{P}{c_0 x^{\gamma_0} (1 - g)}\right) = s_u\left(\frac{c_0^{-1} P x^{-\gamma_0}}{1 - g}\right) = c_0^{-1} P x^{-\gamma_0} s_u\left(\frac{1}{1 - g}\right) = c_0^{-1} P x^{-\gamma_0} \sum_{n \in \mathbb{N}} g^n.$$

Ainsi, il n'y a qu'une seule expression possible pour s_u , donc, sous réserve d'existence, s_u est unique.

Synthèse : Utilisons la formule ci-dessus pour définir $s_u : \mathbb{C}(\mathbb{Z}^n) \rightarrow \mathcal{R}$. Pour $f = \frac{P}{Q} \in \mathbb{C}(\mathbb{Z}^n)$, on pose

$$s_u(f) = c_0^{-1} P x^{-\gamma_0} \sum_{n \in \mathbb{N}} g^n,$$

où l'on a décomposé $Q = c_0 x^{\gamma_0} (1 - g)$ selon le lemme. L'application s_u est bien définie, car d'une part, la décomposition de Q est unique, et d'autre part, $c_0^{-1} P x^{-\gamma_0} \sum_{n \in \mathbb{N}} g^n \in \mathcal{R}$, puisque

$$(1 - g) c_0^{-1} P x^{-\gamma_0} \sum_{n \in \mathbb{N}} g^n = c_0^{-1} P x^{-\gamma_0} \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n].$$

Par ailleurs, considérons deux représentants de la fraction $f = \frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2}$, de sorte que $P_1 Q_2 = P_2 Q_1$. Notons $Q_1 = c_1 x^{\gamma_1} (1 - g_1)$ et $Q_2 = c_2 x^{\gamma_2} (1 - g_2)$ les décompositions respectives données par le lemme. On a alors l'égalité

$$P_1 c_2 x^{\gamma_2} (1 - g_2) = P_2 c_1 x^{\gamma_1} (1 - g_1).$$

En multipliant cette équation par $(\sum_{n \in \mathbb{N}} g_1^n)(\sum_{n \in \mathbb{N}} g_2^n)$, il vient

$$P_1 c_2 x^{\gamma_2} \sum_{n \in \mathbb{N}} g_1^n = P_2 c_1 x^{\gamma_1} \sum_{n \in \mathbb{N}} g_2^n,$$

car $(1 - g_i) \sum_{n \in \mathbb{N}} g_i^n = 1$ pour $i = 1, 2$. Ainsi, la définition de s_u ne dépend pas du représentant choisi, et donc s_u est bien définie.

Les propriétés de s_u découlent presque immédiatement de la définition.

- (a) Soit $f = \frac{R}{Q} \in \mathbb{C}(\mathbb{Z}^n)$ et $P \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$. En notant $Q = c_0 x^{\gamma_0} (1 - g)$ la décomposition donnée par le lemme, on a :

$$s_u(Pf) = s_u\left(\frac{PR}{Q}\right) = c_0^{-1} P R x^{-\gamma_0} \sum_{n \in \mathbb{N}} g^n = P s_u(f).$$

- (b) Soit $f = \frac{P}{Q} \in \mathbb{C}(\mathbb{Z}^n)$, avec $Q = c_0 x^{\gamma_0} (1 - g)$ comme d'habitude. On a alors

$$s_u(f) = c_0^{-1} P x^{-\gamma_0} \sum_{n \in \mathbb{N}} g^n.$$

En observant que

$$Q s_u(f) = c_0 x^{\gamma_0} (1 - g) s_u(f) = P(1 - g) \sum_{n \in \mathbb{N}} g^n = P,$$

on obtient bien, par définition de I , que $I(s_u(f)) = f$.

- (c) Enfin, si g est une combinaison linéaire finie d'éléments de la forme x^γ avec $\gamma \in \mathbb{Z}^n$ vérifiant $u(\gamma) > 0$, alors la décomposition de $1 - g$ fournie par le lemme est $x^0(1 - g)$, donc :

$$s_u\left(\frac{1}{1 - g}\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} g^n.$$

5 Séries d'Euler-Maclaurin

Soit $n \geq 1$ un entier. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un sous ensemble. Si $\gamma \in \mathbb{R}^n$ on pose $\gamma + A = \{\gamma + a \mid a \in A\}$. Notons

$$E_A = \sum_{\gamma \in A \cap \mathbb{Z}^n} x^\gamma \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n].$$

Si E_A est rationnel (au sens défini dans la partie 4), on posera $IE_A = I(E_A)$, où la fonction I a été définie à la question (34).

5.1 Rationalité des séries associées aux cônes

(36) Montrer que si A et B sont deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ et $\gamma \in \mathbb{Z}^n$, on a

$$E_{A \cup B} + E_{A \cap B} = E_A + E_B \quad \text{et} \quad E_{\gamma + A} = x^\gamma E_A.$$

Version courte :

Immédiat.

Version détaillée :

Pour $A \subset \mathbb{R}^n$ et $\gamma \in \mathbb{Z}^n$,

$$E_A(\gamma) = \begin{cases} 1, & \text{si } \gamma \in A, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, pour $\gamma \in \mathbb{Z}^n$ et $A, B \subset \mathbb{R}^n$,

— Si $\gamma \in A \cap B$,

$$E_{A \cap B}(\gamma) + E_{A \cup B}(\gamma) = 1 + 1 = E_A(\gamma) + E_B(\gamma).$$

— Si $\gamma \in A \setminus B$,

$$E_{A \cap B}(\gamma) + E_{A \cup B}(\gamma) = 1 + 0 = E_A(\gamma) + E_B(\gamma).$$

— Si $\gamma \in B \setminus A$,

$$E_{A \cap B}(\gamma) + E_{A \cup B}(\gamma) = 0 + 1 = E_A(\gamma) + E_B(\gamma).$$

— Si $\gamma \in \mathbb{R}^n \setminus (A \cup B)$,

$$E_{A \cap B}(\gamma) + E_{A \cup B}(\gamma) = 0 + 0 = E_A(\gamma) + E_B(\gamma).$$

On en déduit que $\boxed{E_{A \cup B} + E_{A \cap B} = E_A + E_B}$. De plus, pour $A \subset \mathbb{R}^n$ et $\gamma \in \mathbb{Z}^n$, on a

$$x^\gamma E_A = \sum_{\gamma' \in A \cap \mathbb{Z}^n} x^{\gamma + \gamma'} = \sum_{\gamma' \in \gamma + (A \cap \mathbb{Z}^n)} x^{\gamma'} = \sum_{\gamma' \in (\gamma + A) \cap \mathbb{Z}^n} x^{\gamma'} = \boxed{E_{\gamma + A}}.$$

En effet, puisque $\gamma \in \mathbb{Z}^n$, on a bien

$$(\gamma + A) \cap \mathbb{Z}^n = \{a + \gamma \mid a \in A \text{ et } a + \gamma \in \mathbb{Z}^n\} = \{a + \gamma \mid a \in A \cap \mathbb{Z}^n\} = \gamma + (A \cap \mathbb{Z}^n).$$

(37) Soit $(\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ et

$$C(\gamma_1, \dots, \gamma_k) = \left\{ \sum_{i=1}^k t_i \gamma_i \mid (t_1, \dots, t_k) \in [0, +\infty[^k \right\}.$$

Montrer que si $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ est une famille libre, $E_{v+C(\gamma_1, \dots, \gamma_k)}$ est rationnel pour tout $v \in \mathbb{R}^n$.

Version courte :

On observe que $\prod_{i=1}^k (1 - x^{\gamma_i}) E_{v+C(\gamma_1, \dots, \gamma_k)} \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$.

Version détaillée :

Supposons que $(\gamma_1, \dots, \gamma_k) \in (\mathbb{Z}^n)^k$ soit une famille libre de vecteurs. Alors, pour $v \in \mathbb{R}^n$, tout élément $x \in v + C(\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$x = v + \sum_{i=1}^k t_i \gamma_i,$$

avec, pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $t_i \in [0, \infty[$. En effet, si deux écritures sont possibles, $x = v + \sum_{i=1}^k t_i \gamma_i = v + \sum_{i=1}^k t'_i \gamma_i$, alors en soustrayant les deux expressions et par linéarité, on a $\sum_{i=1}^k (t_i - t'_i) \gamma_i = 0$, ce qui, par liberté de la famille, implique $t_i = t'_i$ pour tout i .

De plus, en considérant la division euclidienne par 1, on écrit de manière unique $t_i = n_i + r_i$ avec $n_i \in \mathbb{N}$ et $r_i \in [0, 1[$. En posant alors $R = \left\{ (r_1, \dots, r_k) \mid v + \sum_{i=1}^k r_i \gamma_i \in \mathbb{Z}^n \right\}$, on a

$$E_{v+C(\gamma_1, \dots, \gamma_k)} = \sum_{(r_1, \dots, r_k) \in R} \sum_{n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}} x^{v + \sum_{i=1}^k (r_i + n_i) \gamma_i} = \left(\prod_{i=1}^k \sum_{n_i \in \mathbb{N}} x^{n_i \gamma_i} \right) \left(\sum_{(r_1, \dots, r_k) \in R} x^{v + \sum_{i=1}^k r_i \gamma_i} \right).$$

Alors,

$$\prod_{i=1}^k (1 - x^{\gamma_i}) \cdot E_{v+C(\gamma_1, \dots, \gamma_k)} = \sum_{(r_1, \dots, r_k) \in R} x^{v + \sum_{i=1}^k r_i \gamma_i}.$$

Comme l'ensemble $\left\{ v + \sum_{i=1}^k r_i \gamma_i \mid r_1, \dots, r_k \in [0, 1[\right\}$ est borné,

$$\left\{ v + \sum_{i=1}^k r_i \gamma_i \mid r_1, \dots, r_k \in [0, 1[\right\} \cap \mathbb{Z}^n$$

est fini, et donc R l'est aussi. Ainsi, $\boxed{E_{v+C(\gamma_1, \dots, \gamma_k)} \in \mathcal{R}}$, et on a même l'expression suivante (la description

des pôles sera utile plus tard)

$$IE_{v+C(\gamma_1, \dots, \gamma_k)} = \frac{\sum_{(r_1, \dots, r_k) \in R} x^{v + \sum_{i=1}^k r_i \gamma_i}}{\prod_{i=1}^k (1 - x^{\gamma_i})}.$$

- (38) Généraliser la question précédente dans le cas où $\gamma_1, \dots, \gamma_k \in \mathbb{Z}^n$ est une famille de vecteurs pas forcément libre mais pour laquelle il existe une forme linéaire $\ell : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\ell(\gamma_i) > 0$ pour tout $i = 1, \dots, k$.
Indication. On pourra trianguler le polytope $P = \{x \in C(\gamma_1, \dots, \gamma_k) \mid \ell(x) = 1\}$

Version courte :

Pour $\mathcal{C}$ une triangulation de P , on peut écrire, par la formule du crible,

$$E_{v+C(\gamma_1, \dots, \gamma_k)} = \sum_{S \subset \mathcal{C}} (-1)^{\text{Card } S + 1} E_{v+C_{\bigcap_{T \in S} T}}$$

où, pour $A \subset P$, on note $C_A = \mathbb{R}_+ A$. Les $T \in \mathcal{C}$ étant de la forme $\text{Conv}(x_1, \dots, x_i)$ pour une famille libre à coefficients que l'on peut supposer rationnels, la question précédente permet de conclure.

Version détaillée :

Soient $\gamma_1, \dots, \gamma_k \in \mathbb{Z}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$ et $\ell \in (\mathbb{R}^n)^*$ tels que $\ell(\gamma_i) > 0$ pour tout $i = 1, \dots, k$.

► On commence par montrer que l'on peut supposer que, pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $\ell(\gamma_i) \in \mathbb{Q}^a$. Par le théorème de représentation des formes linéaires, il existe $y \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle x, y \rangle = \ell(x).$$

On va alors approximer y par un vecteur à coefficients rationnels. Explicitement, pour $m \in \mathbb{N}^*$, on pose, en notant $y = (y_1, \dots, y_n)$,

$$y^{(m)} = \frac{1}{m} (\lfloor my_1 \rfloor, \dots, \lfloor my_n \rfloor).$$

Les inégalités caractérisant la partie entière donnent, pour $i = 1, \dots, n$,

$$-\frac{1}{m} \leq \frac{1}{m} (\lfloor my_i \rfloor - y_i) \leq 0,$$

ce qui implique

$$\left| y_i - \frac{1}{m} \lfloor my_i \rfloor \right| \leq \frac{1}{m}.$$

Ainsi,

$$\|y^{(m)} - y\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \left(y_i - \frac{1}{m} \lfloor my_i \rfloor \right)^2 \leq \frac{n}{m^2}.$$

On a alors, pour tout $i = 1, \dots, k$,

$$\begin{aligned} \langle \gamma_i, y^{(m)} \rangle &= \langle \gamma_i, y \rangle + \langle \gamma_i, y^{(m)} - y \rangle \\ &\geq \ell(\gamma_i) - \left| \langle \gamma_i, y^{(m)} - y \rangle \right| && \text{(Inégalité triangulaire inverse)} \\ &\geq \ell(\gamma_i) - \|\gamma_i\|_2 \|y^{(m)} - y\|_2 && \text{(Inégalité de Cauchy-Schwarz)} \\ &\geq \ell(\gamma_i) - \|\gamma_i\|_2 \frac{\sqrt{n}}{m}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour

$$m > \max_{i=1, \dots, k} \frac{\sqrt{n} \|\gamma_i\|_2}{\ell(\gamma_i)},$$

on a bien $\langle \gamma_i, y^{(m)} \rangle > 0$, et comme $\gamma_i \in \mathbb{Z}^n$ et $y^{(m)} \in \mathbb{Q}^n$, on a $\langle \gamma_i, y^{(m)} \rangle \in \mathbb{Q}$. Ainsi, quitte à remplacer ℓ par $x \mapsto \langle x, y^{(m)} \rangle$, on peut supposer que $\ell(\gamma_i) \in \mathbb{Q}$ pour tout $i = 1, \dots, k$.

► Comme suggéré, on introduit

$$P = \{x \in C(\gamma_1, \dots, \gamma_k) \mid \ell(x) = 1\}.$$

L'énoncé affirme que P est un polytope. Bien que cela puisse paraître géométriquement clair, ce point mérite une justification rigoureuse. Pour cela, montrons que

$$P = \text{Conv} \left(\left\{ \frac{\gamma_i}{\ell(\gamma_i)} \mid i = 1, \dots, k \right\} \right).$$

• Soit $x \in \text{Conv} \left\{ \frac{\gamma_i}{\ell(\gamma_i)} \mid i = 1, \dots, k \right\}$. Écrivons

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\gamma_i}{\ell(\gamma_i)},$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in [0, 1]$ et $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$. On a alors $x \in C(\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ et

$$\ell(x) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\ell(\gamma_i)}{\ell(\gamma_i)} = \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1,$$

d'où $x \in P$.

• Réciproquement, soit $x \in P$. Alors $x \in C(\gamma_1, \dots, \gamma_k)$, donc il existe $t_1, \dots, t_k \in [0, \infty[$ tels que

$$x = \sum_{i=1}^k t_i \gamma_i = \sum_{i=1}^k (t_i \ell(\gamma_i)) \cdot \frac{\gamma_i}{\ell(\gamma_i)}.$$

De plus, comme $\ell(x) = \sum_{i=1}^k t_i \ell(\gamma_i) = 1$, on conclut que $x \in \text{Conv} \left\{ \frac{\gamma_i}{\ell(\gamma_i)} \mid i = 1, \dots, k \right\}$.

• Ainsi, la question (17) permet de conclure que P est un polytope. On observe de plus que, d'après la question (18), les sommets de P sont de la forme $\frac{\gamma_i}{\ell(\gamma_i)}$; puisque $\gamma_i \in \mathbb{Z}^n$ et $\ell(\gamma_i) \in \mathbb{Q}$, les sommets de P ont des coordonnées rationnelles.

► Soit $S = \text{Conv}(x_0, \dots, x_d)$ un simplexe de dimension d , avec $x_0, \dots, x_d \in P \cap \mathbb{Q}^n$. Comme $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, on a $C(x_0, \dots, x_d) = C(tx_0, \dots, tx_d)$, on peut choisir t un dénominateur commun à tous les coefficients des x_i , ce qui assure que $tx_i \in \mathbb{Z}^n$. Montrons maintenant que la famille $(x_0, \dots, x_d)$ est libre.

Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{i=0}^d \lambda_i x_i = 0.$$

Comme les x_i appartiennent à P , on a $\ell(x_i) = 1$ pour tout i , donc

$$\sum_{i=0}^d \lambda_i \ell(x_i) = \sum_{i=0}^d \lambda_i = 0.$$

En combinant ces deux égalités, on obtient

$$\sum_{i=0}^d \lambda_i x_i = \lambda_0 x_0 + \sum_{i=1}^d \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^d \lambda_i (x_i - x_0).$$

On affirme alors que la famille $(x_1 - x_0, \dots, x_d - x_0)$ engendre $\vec{S}$. En effet, toute différence de deux éléments de S s'écrit comme une combinaison $\sum_{i=0}^d t_i x_i$ avec $\sum_{i=0}^d t_i = 0$, donc

$$\sum_{i=0}^d t_i x_i = \sum_{i=1}^d t_i (x_i - x_0),$$

et ainsi $\vec{S} = \text{vect}\{x - y \mid x, y \in S\} = \text{vect}(x_1 - x_0, \dots, x_d - x_0)$. Comme S est un simplexe de dimension d , on a $\dim \vec{S} = d$; la famille $(x_1 - x_0, \dots, x_d - x_0)$ forme donc une base, et en particulier elle est libre. Il s'ensuit que $\lambda_1 = \dots = \lambda_d = 0$, et donc $\lambda_0 = 0$ également.

La famille $(x_0, \dots, x_d)$ est donc libre, et on peut appliquer le résultat de la question précédente à la famille $(tx_0, \dots, tx_d)$, qui est également libre et à coordonnées entières. On en déduit que

$$E_{v+C(x_0, \dots, x_d)} = E_{v+C(tx_0, \dots, tx_d)} \in \mathcal{R}.$$

► Soit, d'après la question (27), $\mathcal{C}$ une triangulation de P . Par la preuve que nous avons fournie de l'existence d'une triangulation, nous pouvons supposer que les sommets des simplexes de $\mathcal{C}$ sont des barycentres des sommets de P , et donc, en particulier, qu'ils ont tous des coordonnées à coefficients rationnels. Notons d la dimension de P .

Pour toute partie convexe A de P , notons

$$C_A = \mathbb{R}_+ A = \{ta \mid t \in [0, \infty[, a \in A\}$$

de sorte que l'on ait $C_P = C(\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ (vérification immédiate). De même, si $S = \text{Conv}(x_0, \dots, x_l)$ est un simplexe inclus dans P , alors

$$C_S = C(x_0, \dots, x_l).$$

Vérifions les propriétés algébriques élémentaires suivantes. Pour $A, B \subset P$

- $C_A \cap C_B = C_{A \cap B}$
 - Si $x \in C_{A \cap B}$, alors clairement $x \in C_A$ et $x \in C_B$.
 - Soit $x = ta = t'b \in C_A \cap C_B$. Alors $\ell(x) = t\ell(a) = t'\ell(b)$, et comme $\ell(a) = \ell(b) = 1$, on a $t = t'$, donc $x \in C_{A \cap B}$.
- $C_A \cup C_B = C_{A \cup B}$
 - Si $x \in C_{A \cup B}$, alors clairement $x \in C_A$ ou $x \in C_B$.
 - Si $x \in C_A \cup C_B$, alors clairement $x \in C_{A \cup B}$.

Ainsi, par récurrence immédiate, pour $A_1, \dots, A_l \subset P$,

$$C_{A_1} \cap \dots \cap C_{A_l} = C_{A_1 \cap \dots \cap A_l}, \quad \text{et} \quad C_{A_1} \cup \dots \cup C_{A_l} = C_{A_1 \cup \dots \cup A_l}.$$

Le principe d'inclusion-exclusion, qui se démontre par récurrence à partir de la formule de la question (36), donne alors

$$E_{v+C(\gamma_1, \dots, \gamma_k)} = \sum_{S \subset \mathcal{C}} (-1)^{\text{Card } S + 1} E_{v+C \bigcap_{T \in S} T}.$$

On a montré à la question (27) que l'intersection de deux simplexes du complexe $\mathcal{C}$ est l'enveloppe convexe des sommets communs. Pour conclure cette preuve, il faut vérifier que celle-ci est encore un simplexe, c'est-à-dire montrer que si $S = \text{Conv}(x_0, \dots, x_l)$ est un simplexe, alors $\text{Conv}(x_{i_1}, \dots, x_{i_m})$ est également un simplexe. Par symétrie, il suffit de montrer que $T = \text{Conv}(x_0, \dots, x_m)$ est un simplexe pour $m \leq l$, c'est-à-dire que sa dimension est m .

Par les arguments précédents, la famille $(x_1 - x_0, \dots, x_l - x_0)$ est génératrice de $\vec{S}$, donc libre. Ainsi, $(x_1 - x_0, \dots, x_m - x_0)$ est libre et génératrice de $\vec{T}$, donc $\dim T = m$, i.e., T est un simplexe. Ainsi, par itération, pour tout $S \subset \mathcal{C}$, $\bigcap_{T \in S} T$ est soit vide, soit un simplexe.

► **Conclusion :** Pour tout $S \subset \mathcal{C}$, $\bigcap_{T \in S} T$ est soit vide (et donc $E_{v+\emptyset} = 0$), soit un simplexe à sommets rationnels, donc $E_{v+C \bigcap_{T \in S} T} \in \mathcal{R}$, et ainsi, par combinaison linéaire, $E_{v+C(\gamma_1, \dots, \gamma_k)} \in \mathcal{R}$.

Notons que, en réduisant au même dénominateur toutes les contributions, on peut écrire

$$E_{v+C(\gamma_1, \dots, \gamma_k)} = \frac{P}{\prod_{i=1}^l (1 - x^{\delta_i})},$$

pour un certain $P \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$, un entier $l \in \mathbb{N}$, et des $\delta_1, \dots, \delta_l \in \mathbb{Z}^n$.

a. Lorsque nous aurons besoin d'utiliser ce résultat par la suite, nous construirons directement ℓ de sorte que $\ell(\gamma_i)$ soit rationnel. On pourrait donc omettre cette étape. Néanmoins, afin de répondre complètement à la question, ce détour est nécessaire.

5.2 Le théorème de Brion

Soit $P \subset \mathbb{R}^n$ un polytope défini par $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \ell_i(x) \leq a_i \text{ pour tout } i \in I\}$, où I est un ensemble fini et pour tout $i \in I$, $\ell_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire et $a_i \in \mathbb{R}$.

On dit que P est rationnel si pour tout $i \in I$ on a $a_i \in \mathbb{Z}$ et $\ell_i(x) \in \mathbb{Z}$ pour tout $x \in \mathbb{Z}^n$.

Soient $x \in P$ et $y \in \mathbb{R}^n \setminus P$. On dit que y voit x si $[x, y] \cap P = \{x\}$, on a noté ici $[x, y] = \text{Conv}(\{x, y\})$, le segment d'extrémités x et y . On notera enfin Σ_y l'ensemble des points de P vus par y .

(39) Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}^n \setminus P$, Σ_y est la réalisation d'un complexe composé de faces de P .

Version courte :

En posant

$$\mathcal{C} = \{F \text{ face de } P \mid F^\circ \cap \Sigma_y \neq \emptyset\},$$

on montre que $|\mathcal{C}| = \Sigma_y$. En effet, en prenant z comme le point de $[x, y]$ le plus proche de y avec $x \in P$, et en considérant une face F telle que $z \in F^\circ$, on a alors $F \in \mathcal{C}$ et donc que $\mathcal{C}$ est non vide.

Pour établir l'inclusion non triviale $\mathcal{C} \subset \Sigma_y$, on montre que si $x \in F^\circ$, alors tout $z \in F$ appartient à Σ_y . En effet, il existe un indice $i \in S_F$ tel que $\ell_i(y) > a_i$, sans quoi on aurait $[y, x] \cap P \neq \{x\}$, ce qui est contradictoire. Ainsi, pour tout $t \in [0, 1]$, le point $tz + (1 - t)y$ ne peut appartenir à P , d'où $z \in \Sigma_y$.

Version détaillée :

Soit $y \in \mathbb{R}^n \setminus P$. On pose

$$\mathcal{C} = \{F \text{ face de } P \mid F^\circ \cap \Sigma_y \neq \emptyset\},$$

et l'on vérifie que $\mathcal{C}$ est un complexe dont la réalisation est Σ_y .

► $\mathcal{C}$ est non vide, car $\Sigma_y \neq \emptyset$. Soit en effet $z \in P$. Pour $t \in [0, 1]$ et $i \in I$, en posant $x = (1 - t)y + tz$, on observe que $\ell_i(x) \leq a_i$ si et seulement si

$$t(\ell_i(z) - \ell_i(y)) \leq a_i - \ell_i(y).$$

Ainsi,

- Si $\ell_i(y) \leq a_i$, alors $\forall t \in [0, 1]$, $\ell_i(x) \leq a_i$.
- Si $\ell_i(y) > a_i$, alors $\ell_i(x) \leq a_i$ si et seulement si $t \geq \frac{\ell_i(y) - a_i}{\ell_i(y) - \ell_i(z)}$.

Donc, en posant

$$t_0 = \min \left\{ \frac{\ell_i(y) - a_i}{\ell_i(y) - \ell_i(z)} \mid i \in I, \ell_i(y) > a_i \right\} > 0,$$

on a que, pour tout $t < t_0$, $(1 - t)y + tz \notin P$. Ainsi, pour $x_0 = (1 - t_0)y + t_0z$,

$$[y, x_0] = \{x_0\}.$$

En effet, on a bien $[y, x_0] = \{(1 - t)y + tz \mid t \in [t_0, 1]\}$. Ainsi, $x_0 \in \Sigma_y$, et donc, pour l'unique face F de P telle que $x_0 \in F^\circ$, on a par définition $F \in \mathcal{C}$. Donc $\mathcal{C} \neq \emptyset$.

► Les éléments de $\mathcal{C}$ sont, par définition, des faces de P , donc des polytopes. Soient $F_1, F_2 \in \mathcal{C}$. Comme ce sont des faces de P , on a soit $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, soit $F_1 \cap F_2$ est une face commune de F_1 et F_2 .

► Montrons que $|\mathcal{C}| = \Sigma_y$.

• L'inclusion $\Sigma_y \subseteq |\mathcal{C}|$ est immédiate : si $x \in \Sigma_y$, alors pour la face F de P telle que $x \in F^\circ$, on a $F \in \mathcal{C}$, donc $x \in |\mathcal{C}| = \bigcup_{F \in \mathcal{C}} F$.

• Pour l'inclusion directe, soit $x \in |\mathcal{C}|$. Alors il existe $F \in \mathcal{C}$ telle que $x \in F$. Par définition, il existe $z \in \Sigma_y$ tel que $z \in F^\circ$. Montrons que cela implique $x \in \Sigma_y$, c'est-à-dire que $[x, y] \cap P = \{x\}$.

Commençons par vérifier qu'il existe $i \in S_F$ tel que $\ell_i(y) > a_i$. En effet, puisque $y \notin P$, l'ensemble $J = \{i \in I \mid \ell_i(y) > a_i\}$ est non vide. Supposons par l'absurde que $J \cap S_F = \emptyset$. Comme $z \in F^\circ$, on a alors

$$\forall i \in J, \ell_i(z) < a_i.$$

Donc, pour $t \in [0, 1]$ et $i \in I$:

- Si $i \notin J$, alors $\ell_i(ty + (1-t)z) \leq a_i$.
- Si $i \in J$, alors

$$\ell_i(ty + (1-t)z) = t\ell_i(y) + (1-t)\ell_i(z) = t(\ell_i(y) - \ell_i(z)) + \ell_i(z).$$

Comme $\ell_i(z) < a_i$, on a, pour $0 < t \leq \frac{1}{\ell_i(y) - \ell_i(z)}$, que $\ell_i(ty + (1-t)z) \leq a_i$.

D'où, pour

$$0 < t \leq \min_{i \in J} \frac{1}{\ell_i(y) - \ell_i(z)},$$

on a $ty + (1-t)z \in P$, ce qui implique $[y, z] \cap P \neq \{z\}$, contradiction.

Ainsi, il existe $i \in S_F$ tel que $\ell_i(y) > a_i$. Pour montrer que $[x, y] \cap P = \{x\}$, prenons $t \in [0, 1[$. On observe alors que

$$\ell_i(tx + (1-t)y) = \underbrace{t\ell_i(x)}_{=a_i} + (1-t)\underbrace{\ell_i(y)}_{>a_i} > a_i.$$

Donc, dès que $t > 0$, $tx + (1-t)y \notin P$. On a donc bien $[x, y] \cap P = \{x\}$, et par conséquent $x \in \Sigma_y$.

Ainsi, Σ_y est bien la réalisation du complexe $\mathcal{C}$, composé de faces de P .

(40) Prouver que si $y \in \mathbb{R}^n \setminus P$, on a $\chi(\Sigma_y) = 1$.

Indication. On pourra choisir un hyperplan H et se ramener à montrer le même résultat pour $\{[y, z] \cap H \mid z \in \Sigma_y\}$.

Version courte :

On définit $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \ell_i(x) = a_i\}$ pour un indice $i \in I$ tel que $\ell_i(y) > a_i$. Il est alors clair (lol non !) que la projection centrale p sur H , de sommet y , envoie Σ_y sur un ensemble convexe qui est la réalisation d'un complexe ayant la même combinatoire que $\mathcal{C}$ (même nombre de faces de même dimension). Ainsi, on a $\chi(\Sigma_y) = \chi(p(\Sigma_y)) = 1$, d'après la question (28).

Version détaillée :

► Comme $y \notin P$, on peut trouver $i \in I$ tel que $\ell_i(y) > a_i$. On pose alors

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \ell_i(x) = a_i\},$$

avec $y \notin H$. On introduit la projection centrale p sur H de sommet y , définie par

$$p : \begin{cases} P & \rightarrow H, \\ x & \mapsto \frac{\ell_i(y) - a_i}{\ell_i(y) - \ell_i(x)}(x - y) + y. \end{cases}$$

Géométriquement, pour $x \in P$, $p(x)$ est l'unique point de H situé sur le segment $[x, y]$. Il est important de noter que p n'est ni linéaire, ni affine, même lorsqu'on le restreint à des sous-ensembles (non contenus dans des hyperplans parallèles à H). Ainsi, la géométrie des images par p n'est pas triviale (par exemple, $p(F)$ est-il un polytope si F est une face de P ?), ce qui nécessitera des justifications rigoureuses. Commençons par montrer que p est bien définie avant d'en examiner certaines propriétés.

- Pour $x \in P$, on a $\ell_i(x) \leq a_i < \ell_i(y)$, donc la formule définissant p a bien un sens. De plus, on calcule :

$$\ell_i(p(x)) = \frac{\ell_i(y) - a_i}{\ell_i(y) - \ell_i(x)}\ell_i(x - y) + \ell_i(y) = -\ell_i(y) + a_i + \ell_i(y) = a_i.$$

Donc $p(x) \in H$. Ainsi, p est bien définie.

- Pour $x \in P$, on a $p(x) \in [x, y[= \{tx + (1-t)y \mid t \in]0, 1[\}$, car $\frac{\ell_i(y) - a_i}{\ell_i(y) - \ell_i(x)} \in]0, 1[$. En effet, $\ell_i(y) - \ell_i(x) \geq \ell_i(y) - a_i > 0$.

- $p \circ p = p$, car si $x \in H$, alors $\ell_i(x) = a_i$ et donc $p(x) = (x - y) + y = x$.

- $p|_{\Sigma_y}$ est injective. Soient $x_1, x_2 \in \Sigma_y$ tels que $p(x_1) = p(x_2) = z$. D'après le point précédent, on peut écrire

$$z = t_1 x_1 + (1 - t_1)y = t_2 x_2 + (1 - t_2)y,$$

avec $t_1, t_2 \in]0, 1]$. On peut inverser la première relation et injecter dans la seconde

$$x_1 = \frac{1}{t_1}z + \frac{t_1 - 1}{t_1}y = \frac{t_2}{t_1}x_2 + \left(1 - \frac{t_2}{t_1}\right)y.$$

Par symétrie, on suppose $t_1 \geq t_2$, donc $\frac{t_2}{t_1} \in [0, 1]$, soit $x_1 \in [x_2, y]$. Comme $x_2 \in \Sigma_y$ et $x_1 \in P$, on a $x_1 = x_2$.

- Donc p est une bijection entre Σ_y et $p(\Sigma_y)$.

- $\text{Im}(p) = p(\Sigma_y)$. En effet, pour tout $x \in P$, il existe $z \in \Sigma_y$ tel que $p(x) = p(z)$. En effet, comme montré précédemment, on peut choisir $z = (1 - t)x + ty$, avec t maximal tel que $z \in P$, ce qui implique $z \in \Sigma_y$. Vérifions alors que $p(z) = p(x)$, ce qui est géométriquement clair, puisque $z \in [x, y]$. En effet

$$\begin{aligned} p(z) &= \frac{\ell_i(y) - a_i}{\ell_i(y) - (1 - t)\ell_i(x) - t\ell_i(y)}((1 - t)x + ty - y) + y \\ &= \frac{1}{1 - t} \frac{\ell_i(y) - a_i}{\ell_i(y) - \ell_i(x)}((1 - t)(x - y)) + y \\ &= \frac{\ell_i(y) - a_i}{\ell_i(y) - \ell_i(x)}(x - y) + y = p(x). \end{aligned}$$

- Pour $x, z \in P$ on a $p([x, z]) = [p(x), p(z)]$. Il s'agit d'une vérification un peu longue, mais directe. Soient $\lambda, \mu \in [0, 1]$. On observe :

$$\begin{aligned} p(\lambda x + (1 - \lambda)z) &= \frac{\ell_i(y) - a_i}{\ell_i(y) - \ell_i(\lambda x + (1 - \lambda)z)}(\lambda x + (1 - \lambda)z - y) + y \\ &= \lambda \frac{\ell_i(y) - a_i}{\ell_i(y) - \ell_i(\lambda x + (1 - \lambda)z)}(x - y) + (1 - \lambda) \frac{\ell_i(y) - a_i}{\ell_i(y) - \ell_i(\lambda x + (1 - \lambda)z)}(z - y) + y, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mu p(x) + (1 - \mu)p(z) &= \mu \frac{\ell_i(y) - a_i}{\ell_i(y) - \ell_i(x)}(x - y) + \mu y + (1 - \mu) \frac{\ell_i(y) - a_i}{\ell_i(y) - \ell_i(z)}(z - y) + (1 - \mu)y \\ &= \mu \frac{\ell_i(y) - a_i}{\ell_i(y) - \ell_i(x)}(x - y) + (1 - \mu) \frac{\ell_i(y) - a_i}{\ell_i(y) - \ell_i(z)}(z - y) + y. \end{aligned}$$

On a donc égalité si et seulement si

$$\mu = \lambda \frac{\ell_i(y) - \ell_i(x)}{\ell_i(y) - \ell_i(\lambda x + (1 - \lambda)z)} \geq 0,$$

ou encore

$$\lambda = \mu \frac{\ell_i(y) - \ell_i(z)}{\ell_i(y) - \ell_i(\mu z + (1 - \mu)x)} \geq 0.$$

On vérifie de plus que

$$\begin{aligned} \mu \leq 1 &\Leftrightarrow \lambda(\ell_i(y) - \ell_i(x)) \leq \ell_i(y) - \ell_i(\lambda x + (1 - \lambda)z) \\ &\Leftrightarrow \lambda \leq 1. \end{aligned}$$

On a donc $t \in p([x, z])$ si et seulement si $t \in [p(x), p(z)]$, d'où $p([x, z]) = [p(x), p(z)]$.

- On étend la formule précédente par récurrence : pour $x_1, \dots, x_k \in P$, on a

$$\text{Conv}(\{p(x_1), \dots, p(x_k)\}) = p(\text{Conv}(\{x_1, \dots, x_k\})).$$

On a déjà montré le cas $k = 2$ (et $k = 1$ est trivial). Soit $k \in \mathbb{N}$, et supposons le résultat vrai au rang k . Alors pour $x_1, \dots, x_{k+1} \in P$

- Soit $x \in p(\text{Conv}(\{x_1, \dots, x_{k+1}\}))$, noté $x = p\left(\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i\right)$. Si $\lambda_{k+1} = 1$, le résultat est immédiat. Sinon, posons $X = \frac{1}{1-\lambda_{k+1}} \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$, de sorte que $x \in p([x_{k+1}, X]) = [p(x_{k+1}), p(X)]$. Par récurrence, $p(X) \in \text{Conv}(\{p(x_1), \dots, p(x_k)\})$, donc $x \in \text{Conv}(\{p(x_1), \dots, p(x_{k+1})\})$.
- Soit $x \in \text{Conv}(\{p(x_1), \dots, p(x_{k+1})\})$, noté $x = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i p(x_i)$. Si $\lambda_{k+1} = 1$, le résultat est clair. Sinon, posons $X = \frac{1}{1-\lambda_{k+1}} \sum_{i=1}^k \lambda_i p(x_i)$, de sorte que $x \in [p(x_{k+1}), X]$. Par récurrence, $X \in p(\text{Conv}(\{x_1, \dots, x_k\}))$, donc il existe $Y \in \text{Conv}(\{x_1, \dots, x_k\})$ tel que $p(Y) = X$. Ainsi, $x \in p([x_{k+1}, Y]) \subset p(\text{Conv}(\{x_1, \dots, x_{k+1}\}))$.

► On définit l'ensemble

$$\mathcal{D} = \{p(F) \mid F \in \mathcal{C}\},$$

où $\mathcal{C}$ est le complexe défini dans la question précédente. On vérifie alors que $\mathcal{D}$ est bien un complexe de réalisation $p(\Sigma_y)$.

• $\mathcal{D}$ est non vide car $\mathcal{C} \neq \emptyset$.

• $|\mathcal{D}| = \bigcup_{F \in \mathcal{C}} p(F) = p\left(\bigcup_{F \in \mathcal{C}} F\right) = p(\Sigma_y)$. Ainsi, la réalisation de $\mathcal{D}$ est bien $p(\Sigma_y)$.

• $p(\Sigma_y)$ est convexe. En effet, pour $p(x), p(z) \in p(\Sigma_y)$, on a $[p(x), p(z)] = p([x, z])$. Or, comme P est convexe, $[x, z] \subset P$, et $\text{Im}(p) = p(\Sigma_y)$, on a donc $p([x, z]) \subset p(\Sigma_y)$.

• Pour $F \in \mathcal{C}$, $p(F)$ est un polytope. En effet, par la question (14), en notant V l'ensemble des sommets de F , on a $F = \text{Conv}(V)$ et donc, comme V est fini, $p(F) = p(\text{Conv}(V)) = \text{Conv}(p(V))$, ce qui, par la question (17), montre que $p(F)$ est bien un polytope.

• Pour démontrer que l'intersection de deux éléments de $\mathcal{D}$ est une face de chacun d'eux, il convient de fournir un système d'équations caractérisant chaque polytope de $\mathcal{D}$. On s'inspire de la question (26) pour donner un système d'équations de $\text{Conv}(F \cup \{y\})$ pour $F \in \mathcal{C}$, puis on observe que $p(F) = \text{Conv}(F \cup \{y\}) \cap H$. On note cependant une différence : ici $y \notin P$, tandis que dans la question (26), on avait $x \in P$ (jouant alors le rôle actuel de y). On adapte donc le raisonnement avec les modifications nécessaires.

Soit $F \in \mathcal{C}$. On a vu en question (39) qu'il existe $j \in S_F$ tel que $\ell_j(y) > a_j$. Pour $k \in I$, on pose :

$$\ell'_k = \ell_k + \ell_j \frac{a_k - \ell_k(x)}{a_j - \ell_j(x)}, \quad a'_k = a_k + a_j \frac{a_k - \ell_k(x)}{a_j - \ell_j(x)}.$$

On définit

$$F' = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall k \in I, \ell'_k(x) \leq a'_k\},$$

et on vérifie que $F' = \text{Conv}(F \cup \{y\})$. En effet, si $x \in F$, alors $\ell_j(x) = a_j$, et un calcul direct donne $\ell'_k(x) \leq a'_k$, tandis que $\ell'_k(y) = a'_k$. Par convexité, tout point de $\text{Conv}(F \cup \{y\})$ appartient donc à F' .

Inversement, soit $x \in F'$. Si $x = y$, rien à démontrer. Supposons $x \neq y$. On construit $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$ pour un λ bien choisi tel que $z \in F$. On observe que

$$\ell'_k(z) = \lambda \underbrace{\ell'_k(x)}_{\leq a'_k} + (1 - \lambda) \underbrace{\ell'_k(y)}_{= a'_k} \leq a'_k.$$

On pose

$$\lambda = \frac{\ell_j(y) - a_j}{\ell_j(y) - \ell_j(x)} \geq 1.$$

Le dénominateur est non nul, car si $\ell_j(x) = \ell_j(y)$, alors pour tout $k \in I$, $\ell'_k(y) = a'_k$, ce qui implique $\ell_k(y) = \ell_k(x)$. Or, $\bigcap_{k \in I} \ker \ell_k = \{0\}$ (sinon P ne serait pas borné), donc $y = x$, contradiction.

Avec cette valeur de λ , on trouve que $\ell_j(z) = a_j$, donc pour tout $k \in I$, $\ell_k(z) \leq a_k$. Ainsi, $z \in F$ et, en inversant la construction, $y \in \text{Conv}(\{x, z\}) \subset \text{Conv}(F \cup \{y\})$. On obtient alors

$$\text{Conv}(F \cup \{y\}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall k \in I, \ell'_k(x) \leq a'_k\}.$$

On vérifie enfin que $p(F) = \text{Conv}(F \cup \{y\}) \cap H$.

- Soit $p(x) \in p(F)$. Alors $x \in F$ et $p(x) \in H$. Comme $p(x) \in [x, y[$, on a bien $p(x) \in \text{Conv}(F \cup \{y\}) \cap H$.
- Soit $x \in \text{Conv}(F \cup \{y\}) \cap H$. Alors $x = tz + (1 - t)y$ pour un $z \in F$ et $t \in [0, 1]$. Comme $x \in H$ et $x \in [z, y]$, on a $x = p(z)$, donc $x \in p(F)$.

Ainsi, $p(F)$ admet la description suivante

$$p(F) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall k \in I, \ell'_k(x) \leq a'_k \text{ et } \ell_i(x) = a_i\}.$$

Cela garantit notamment que $p(F)$ est un polytope, ce qui rend inutile l'argument précédent.

Soient $F, G \in \mathcal{C}$. Si $F \cap G = \emptyset$, alors par injectivité de p sur Σ_y , on a $p(F) \cap p(G) = \emptyset$. Sinon, $F \cap G$ est une face de F , et on vérifie que :

$$p(F \cap G) = \text{Conv}((F \cap G) \cup \{y\}) \cap H = \{x \in p(F) \mid \forall k \in S_{F \cap G}, \ell'_k(x) = a'_k \text{ et } \ell_i(x) = a_i\},$$

ce qui montre que c'est bien une face de $p(F)$. En effet

- Si $x \in F \cap G$, alors pour tout $k \in S_{F \cap G}$, $\ell_k(x) = a_k$, et donc $\ell'_k(x) = a'_k$. Comme y vérifie également cette égalité, l'inclusion directe découle de la convexité.
- Inversement, soit $x \in p(F)$ vérifiant $\ell'_k(x) \leq a'_k$ pour tout $k \in S_{F \cap G}$, et $\ell_i(x) = a_i$. Alors $x \in H$. Si $x = y$, c'est immédiat. Sinon, on construit $z = \lambda y + (1 - \lambda)x \in F$. La condition $\ell'_k(y) \leq a'_k$ implique $\ell_k(z) \leq a_k$, donc $z \in F \cap G$, et par convexité $x \in \text{Conv}((F \cap G) \cup \{y\})$.

Donc $\mathcal{D}$ est un complexe de réalisation convexe.

► Comme $|\mathcal{D}|$ est convexe, on a par la question (28) $\chi(\mathcal{D}) = 1$. Il reste donc à montrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ ont la même caractéristique d'Euler. Par tout ce qu'on vient de voir, les faces de $\mathcal{C}$ sont en bijection avec celles de $\mathcal{D}$. Il faut donc s'assurer que, si F est une face de $\mathcal{C}$, alors $\dim F = \dim p(F)$. Soit donc $F \subset \Sigma_y$ un polytope.

- Si $\dim F = d$, alors il existe $x_0, \dots, x_d \in F$ affinement indépendants (prendre une base de $\vec{F}$, ajouter 0 et translater par un élément de F), c'est-à-dire que si

$$\sum_{i=0}^d \lambda_i x_i = 0, \quad \text{avec} \quad \sum_{i=0}^d \lambda_i = 0,$$

alors $\lambda_0 = \dots = \lambda_d$. Montrons que $p(x_0), \dots, p(x_d)$ sont affinement indépendants, ce qui garantit que $p(x_1) - p(x_0), \dots, p(x_d) - p(x_0)$ est une famille libre dans $p(\vec{F})$, et donc que $\dim p(F) \geq d$. Supposons, par l'absurde,

$$\sum_{i=0}^d \lambda_i p(x_i) = 0, \quad \text{avec} \quad \sum_{i=0}^d \lambda_i = 0.$$

Si l'un des λ_i , disons λ_0 (sans perte de généralité), est non nul, on peut réécrire

$$p(x_0) = - \sum_{i=1}^d \frac{\lambda_i}{\lambda_0} p(x_i), \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^d \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_0} \right) = 1.$$

Ainsi, $p(x_0) \in \text{Conv}(\{p(x_1), \dots, p(x_d)\}) = p(\text{Conv}(\{x_1, \dots, x_d\}))$. Par injectivité de p sur Σ_y , on en déduit que $x_0 \in \text{Conv}(\{x_1, \dots, x_d\})$, c'est-à-dire que les x_i sont affinement liés, ce qui contredit l'hypothèse. D'où $\dim p(F) \geq \dim F$.

- Le sens réciproque est quasiment identique. Si $\dim p(F) = d$, alors il existe $p(x_0), \dots, p(x_d) \in p(F)$ affinement indépendants. Supposons, par l'absurde,

$$\sum_{i=0}^d \lambda_i x_i = 0, \quad \text{avec} \quad \sum_{i=0}^d \lambda_i = 0.$$

Si l'un des λ_i , disons λ_0 , est non nul, on peut écrire

$$x_0 = - \sum_{i=1}^d \frac{\lambda_i}{\lambda_0} x_i, \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^d \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_0} \right) = 1.$$

Alors $p(x_0) \in p(\text{Conv}(\{x_1, \dots, x_d\})) = \text{Conv}(\{p(x_1), \dots, p(x_d)\})$, ce qui contredit l'affine indépendance de $p(x_0), \dots, p(x_d)$. D'où $\dim p(F) \leq \dim F$.

► Comme, pour un complexe $\mathcal{E}$, on a $\chi(\mathcal{E}) = \sum_{F \text{ face de } \mathcal{E}} (-1)^{\dim F}$, et que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ ont le même nombre de faces de chaque dimension (grâce à une bijection entre les faces de $\mathcal{C}$ et celles de $\mathcal{D}$ qui préserve la dimension), on en déduit :

$$\chi(\Sigma_y) = \chi(\mathcal{C}) = \chi(\mathcal{D}) = 1.$$

(41) Soit F une face de P et

$$C_F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \ell_i(x) \leq a_i \ \forall i \in S_F\}.$$

Soit $y \in \mathbb{R}^n \setminus P$: montrer que y voit F , c'est-à-dire $F \subset \Sigma_y$, si et seulement si $y \notin C_F$.

Version courte :

C'est une vérification immédiate, en utilisant le fait que si y voit F , alors il existe $i \in S_F$ tel que $\ell_i(y) > a_i$, ce que nous avons établi à la question (39).

Version détaillée :

Montrons les deux directions de l'équivalence.

• Supposons que $F \subset \Sigma_y$. En particulier, $F^\circ \subset \Sigma_y$. On a vu à la question (39) que cela implique qu'il existe $i \in S_F$ tel que $\ell_i(y) > a_i$, ce qui signifie exactement, par définition de C_F , que $y \notin C_F$.

• Supposons maintenant que $y \notin C_F$. Alors, il existe $i \in S_F$ tel que $\ell_i(y) > a_i$. Pour tout $x \in F$ et pour tout $t \in [0, 1[$, on a

$$\ell_i(tx + (1-t)y) = t\ell_i(x) + (1-t)\ell_i(y) > a_i.$$

Cela implique que $[x, y] \cap P = \{x\}$, donc $x \in F$, et par conséquent $F \subset \Sigma_y$.

Donc, y voit F si et seulement si $y \notin C_F$.

Dans la suite de cette partie 5.2, on suppose que P est rationnel.

(42) Montrer que E_{C_F} est rationnel pour toute face F de P et que E_{C_F} est de torsion si $\dim F > 0$.

Version courte :

Si v est un sommet de P , alors ses coordonnées sont rationnelles. Comme $C_v = v + C(v_1 - v, \dots, v_k - v)$, où les v_i désignent les autres sommets de P , on peut appliquer la question (38), en prenant ℓ comme la somme des ℓ_i , pour $i \in S_v$.

Si $\dim F > 0$, on observe alors que $(1 - x^{m(v_1 - v_2)})E_{C_F} = 0$, où v_1 et v_2 sont deux sommets de F , et $m \in \mathbb{N}^*$ est tel que $mv_1, mv_2 \in \mathbb{Z}^n$.

Version détaillée :

On traite indépendamment le cas où F est un sommet de celui où $\dim F > 0$. Mais avant cela, remarquons que, puisque P est rationnel, ses sommets, étant des solutions de systèmes affines, ont des coordonnées rationnelles. Cela se vérifie explicitement par résolution à l'aide de la méthode du pivot de Gauss.

• Soit v un sommet de P . Notons $v_1, \dots, v_k$ les autres sommets de P (en nombre fini). L'objectif est d'utiliser la question (38) pour conclure à la rationalité de E_{C_v} . On commence donc par démontrer la relation

$$C_v = v + C(v_1 - v, \dots, v_k - v).$$

— Si $x \in v + C(v_1 - v, \dots, v_k - v)$, alors on peut écrire

$$x = v + \sum_{i=1}^k t_i(v_i - v),$$

avec $t_1, \dots, t_k \in [0, \infty[$. Soit alors $i \in S_v$. On observe que

$$\ell_i(x) = \underbrace{\ell_i(v)}_{=a_i} + \sum_{i=1}^k t_i \underbrace{(\ell_i(v_i) - \ell_i(v))}_{\leq a_i} = a_i.$$

Ceci garantit donc que $x \in C_v$.

— Soit $x \in C_v$. Soit $t \in]0, \infty[$, et considérons $z = v + t(x - v)$; montrons que pour $t > 0$ suffisamment petit, on a $z \in P$. En effet, soit $i \in I$.

— Si $i \in S_v$, alors

$$\ell_i(z) = \ell_i(v) + t(\ell_i(x) - \ell_i(v)) = a_i + t(\ell_i(x) - a_i) \leq a_i,$$

car $\ell_i(x) \leq a_i$ puisque $x \in S_v$.

— Si $i \notin S_v$, alors $\ell_i(v) < a_i$. Si $\ell_i(x) \leq \ell_i(v)$, alors $\ell_i(z) \leq a_i$. Sinon, il faut choisir

$$t \leq \frac{a_i - \ell_i(v)}{\ell_i(x) - \ell_i(v)},$$

pour avoir $\ell_i(z) \leq a_i$.

Ainsi, en posant

$$t = \min \left\{ \frac{a_i - \ell_i(v)}{\ell_i(x) - \ell_i(v)} \mid i \notin S_v, \ell_i(x) > \ell_i(v) \right\} > 0,$$

on a bien $z = v + t(x - v) \in P$. Par la question (14), on peut alors écrire

$$v + t(x - v) = \lambda v + \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i,$$

avec $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0$ et $\lambda + \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$. Cela permet de réécrire

$$x = v + \frac{1}{t} \sum_{i=1}^k \lambda_i (v_i - v) \in v + C(v_1 - v, \dots, v_k - v).$$

Posons $\ell = -\sum_{i \in S_v} \ell_i$. Comme, pour tout sommet v' distinct de v , on ne peut avoir $\ell_i(v') = a_i$ pour tout $i \in S_v$, on observe que

$$\ell(v' - v) = -\sum_{i \in S_v} (\ell_i(v') - a_i) > 0,$$

car pour tout $i \in S_v$, $\ell_i(v') \leq a_i$ avec au moins une inégalité stricte. Pour $m \in \mathbb{N}^*$ un dénominateur commun des coordonnées des $v_i - v$, on a alors, par la question (38) appliquée aux $m(v_1 - v), \dots, m(v_k - v) \in \mathbb{Z}^n$ et à ℓ

$$E_{C_v} = E_{v+C(v_1-v, \dots, v_k-v)} = E_{v+C(m(v_1-v), \dots, m(v_k-v))} \in \mathcal{R}$$

• Soit F une face de dimension strictement positive. Elle admet alors au moins deux sommets, car sinon, par la question (14), F serait l'enveloppe convexe d'un singleton, donc de dimension 0. Notons v_1 et v_2 deux tels sommets. Pour $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $mv_1, mv_2 \in \mathbb{Z}^n$, on observe que $C_F = m(v_1 - v_2) + C_F$, car pour tout $i \in S_F$, on a $\ell_i(m(v_1 - v_2)) = 0$. Alors, par la question (36), on a la relation

$$(1 - x^{m(v_1-v_2)})E_{C_F} = E_{C_F} - E_{m(v_1-v_2)+C_F} = E_{C_F} - E_{C_F} = 0.$$

Ainsi, E_{C_F} est de torsion, donc rationnel.

• On a donc bien que pour toute face F de P , E_{C_F} est rationnel, et E_{C_F} est de torsion si $\dim F > 0$.

(43) Prouver l'égalité

$$\sum_{F \text{ face de } P} (-1)^{\dim F} E_{C_F} = E_P.$$

Version courte :

Soit $\gamma \in \mathbb{Z}^n$. Si $\gamma \in P$, alors γ appartient à tous les C_F , ce qui donne l'égalité par la question (24). Si $\gamma \notin P$, alors

$$\begin{aligned} \sum_{F \text{ face de } P} (-1)^{\dim F} E_{C_F}(\gamma) &= \sum_{F \not\subset \Sigma_\gamma} (-1)^{\dim F} \sum_{F \text{ face de } P} (-1)^{\dim F} - \sum_{F \subset \Sigma_\gamma} (-1)^{\dim F} \\ &= \chi_n(P) - \chi(\Sigma_\gamma) = 0 = E_P(\gamma). \end{aligned}$$

Version détaillée :

Pour vérifier l'égalité, on évalue en $\gamma \in \mathbb{Z}^n$. On procède par disjonction de cas selon que γ appartienne ou non à P .

- Si $\gamma \in P$, alors pour toute face F de P , par définition de P et de C_F , on a $\gamma \in C_F$. Ainsi,

$$\sum_{F \text{ face de } P} (-1)^{\dim F} E_{C_F}(\gamma) = \sum_{F \text{ face de } P} (-1)^{\dim F} = 1 = E_P(\gamma),$$

en vertu de la question (24).

- Si $\gamma \notin P$, alors d'après la question (41), pour toute face F de P , on a $\gamma \in C_F$ si et seulement si $F \not\subset \Sigma_\gamma$. On en déduit

$$\sum_{F \text{ face de } P} (-1)^{\dim F} E_{C_F}(\gamma) = \sum_{F \not\subset \Sigma_\gamma} (-1)^{\dim F} = \sum_{F \text{ face de } P} (-1)^{\dim F} - \sum_{F \subset \Sigma_\gamma} (-1)^{\dim F}.$$

La première somme vaut 1 d'après la question (24). D'après la question (39), Σ_γ est la réalisation d'un complexe dont les polytopes sont précisément les faces de P incluses dans Σ_γ . Ainsi, par la question (40), on a $\chi(\Sigma_\gamma) = 1$, ce qui donne

$$\sum_{F \subset \Sigma_\gamma} (-1)^{\dim F} = 1.$$

On en conclut que :

$$\sum_{F \text{ face de } P} (-1)^{\dim F} E_{C_F}(\gamma) = 0 = E_P(\gamma).$$

- L'égalité étant vérifiée pour tout $\gamma \in \mathbb{Z}^n$, on obtient bien la relation souhaitée :

$$\boxed{\sum_{F \text{ face de } P} (-1)^{\dim F} E_{C_F} = E_P.}$$

(44) En déduire le théorème de Brion : pour tout polytope rationnel P , E_P est rationnel et on a

$$IE_P = \sum_{v \text{ sommet de } P} IE_{C_v}.$$

Version courte :

Conséquence directe de (43), à laquelle on applique I, puis de (42).

Version détaillée :

P étant borné, E_P est un polynôme, donc une fonction rationnelle. On applique I au résultat de la question (43) (en utilisant la linéarité de I)

$$\sum_{F \text{ face de } P} (-1)^{\dim F} IE_{C_F} = IE_P.$$

D'après la question (42), si F est une face de dimension non nulle, E_{C_F} est de torsion, et donc, d'après la

question (34), $IE_{C_F} = 0$. On en déduit alors le théorème de Brion

$$IE_P = \sum_{v \text{ sommet de } P} IE_{C_v}.$$

5.3 Application au théorème d'Erhart

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $\gamma_1, \dots, \gamma_k \in \mathbb{Z}^n$ et $P = \text{Conv}(\gamma_1, \dots, \gamma_k)$. Pour tout entier $t \in \mathbb{N}$, on note $tP = \{tx \mid x \in P\}$.

(45) Montrer l'égalité suivante pour $t \in \mathbb{N}^*$:

$$IE_{tP} = \sum_{v \text{ sommet de } P} x^{tv-v} IE_{C_v}.$$

Version courte :

Il s'agit d'appliquer le théorème de Brion à tP , et d'observer, pour tout sommet v de P , que $IE_{C_{tv}} = x^{tv-v} IE_{C_v}$.

Version détaillée :

Soit $t \in \mathbb{N}^*$. On souhaite appliquer le théorème de Brion à tP . Pour cela, il faut relier les sommets de tP ainsi que les cônes associés à ceux de P . Le polytope tP est décrit par les équations suivantes

$$tP = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in I, \ell_i(x) \leq ta_i\}.$$

Les sommets de tP étant les solutions uniques de systèmes du type $\forall i \in J, \ell_i(x) = ta_i$, il est clair qu'ils sont exactement les tv , où v est un sommet de P . En notant D_{tv} le cône issu de tv dirigé par tP :

$$D_{tv} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in S_v, \ell_i(x) \leq ta_i\},$$

on observe la relation $D_{tv} = tv - v + C_v$. Ainsi, par le théorème de Brion appliqué à tP , on a

$$IE_{tP} = \sum_{v \text{ sommet de } P} IE_{D_{tv}} = \sum_{v \text{ sommet de } P} IE_{tv-v+C_v} = \sum_{v \text{ sommet de } P} x^{tv-v} IE_{C_v}.$$

(46) Montrer qu'il existe un polynôme $f_P(x)$ à coefficients complexes tel que pour tout $t \in \mathbb{N}$, on ait $\text{Card}(tP \cap \mathbb{Z}^n) = f_P(t)$.

Version courte :

Par des arguments similaires à ceux utilisés dans les questions (42) et (43), la formule de la question précédente reste valable pour $t = 0$. On peut alors soit

- Évaluer la formule de l'équation (45) en un point $z \neq (1, \dots, 1)$, puis faire tendre z vers $(1, \dots, 1)$ en évitant les autres pôles des IE_{C_v} , afin d'obtenir, par développements limités, une expression polynomiale en t .
- Ou considérer la série génératrice en introduisant une nouvelle variable formelle t , à savoir $R = \sum_{n \in \mathbb{N}} t^n IE_{nP}$. La formule de la question précédente implique alors que $\prod_{v \in V} (1 - tx^v) R \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^{n+1}]$, avec un degré en t inférieur à $\text{Card } V - 1$ (on utilise la question (35) pour justifier rigoureusement ces manipulations). Ainsi, en fixant les n premières variables à 1, on obtient

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} t^n f_P(n) = \frac{Q(t)}{(1-t)^{\text{Card } V}},$$

où $\deg Q < \text{Card } V$. Par décomposition en éléments simples et application de la question (4) (en remarquant que pour $\omega = 1$, cela donne une fonction polynomiale), on peut conclure que $f_P(n)$ est une fonction polynomiale.

Version détaillée :

► Puisque l'on souhaite démontrer un résultat pour $t \in \mathbb{N}$ en utilisant la formule précédente, il convient tout d'abord de s'assurer qu'elle reste valable pour $t = 0$. C'est-à-dire que

$$IE_{0P} = IE_{\{0\}} = \sum_{v \text{ sommet de } P} x^{-v} IE_{C_v} = \sum_{v \text{ sommet de } P} IE_{-v+C_v}.$$

L'application du théorème de Brion dans ce cas particulier conduit à une identité triviale. Il est donc nécessaire de procéder à une nouvelle dérivation, en s'inspirant de la démarche ayant mené à la démonstration du théorème de Brion. Commençons par introduire quelques notations.

- Pour toute face F de P , on définit

$$D_F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in S_F, \ell_i(x) \leq 0\},$$

avec alors, pour tout sommet v de P , la relation $D_v = -v + C_v$. On choisit un point quelconque $x_0 \in P$, et on pose $P' = P - x_0$, un translaté de P contenant l'origine. Le polytope P' est alors défini par les inégalités

$$P' = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in I, \ell_i(x) \leq b_i\},$$

où les réels b_i vérifient $b_i \geq 0$, puisque $0 \in P'$. On pose alors, pour toute face F de P (en bijection avec les faces de P' par translation), le cône

$$C'_F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in S_F, \ell_i(x) \leq b_i\}.$$

On commence alors par établir, en s'appuyant sur les résultats déjà obtenus pour le polytope P' , la relation

$$E_{\{0\}} = \sum_{F \text{ face de } P} (-1)^{\dim F} E_{D_F}.$$

Soit alors $\gamma \in \mathbb{Z}^n$ et vérifions cette égalité en évaluant en γ .

- Si $\gamma = 0$, alors $E_{\{0\}}(\gamma) = E_{D_F}(\gamma) = 1$ pour toute face F . La question (24) permet de conclure à l'égalité souhaitée.

- Supposons $\gamma \neq 0$. Soit F une face de P . Montrons que

$$\gamma \in D_F \iff \forall t \geq 0, t\gamma \in C'_F.$$

En effet

- Si $\gamma \in D_F$, alors pour tout $i \in S_F$, on a $\ell_i(\gamma) \leq 0$, donc pour tout $t \geq 0$, $\ell_i(t\gamma) \leq 0 \leq b_i$, d'où $t\gamma \in C'_F$.
- Si $\gamma \notin D_F$, alors il existe un $i \in S_F$ tel que $\ell_i(\gamma) > 0$. Pour $t > \frac{b_i}{\ell_i(\gamma)}$, on a $\ell_i(t\gamma) > b_i$, donc $t\gamma \notin C'_F$.

Ainsi, pour t fixé suffisamment grand, on a l'équivalence $\gamma \in D_F \iff t\gamma \in C'_F$, ce qui conduit à

$$\sum_{F \text{ face de } P} (-1)^{\dim F} E_{D_F}(\gamma) = \sum_{F \text{ face de } P} (-1)^{\dim F} E_{C'_F}(t\gamma) = E_{P'}(t\gamma) = 0,$$

en appliquant la question (43) au polytope P' et en remarquant que $t\gamma \notin P'$ si t est suffisamment grand (car $\gamma \neq 0$).

- On a donc bien l'égalité

$$E_{\{0\}} = \sum_{F \text{ face de } P} (-1)^{\dim F} E_{D_F},$$

et en appliquant l'opérateur I , les E_{D_F} étant de torsion si $\dim F > 0$, on obtient :

$$IE_{0P} = \sum_{v \text{ sommet de } P} IE_{D_v} = \sum_{v \text{ sommet de } P} x^{-v} IE_{C_v}.$$

► On peut alors utiliser la formule de la question (45) pour $t \in \mathbb{N}$. Nous proposons deux méthodes pour résoudre cette question.

- La première correspond à l'approche adoptée lorsqu'on souhaite utiliser le théorème de Brion pour calculer explicitement le nombre de points à coordonnées entières dans P . Elle s'inspire en partie des notes de cours *Lattices in Optimization* d'Andreas Paffenholz, notamment des sections 9 et 10. Je remercie André Chambrillon et Yanis Hedjem pour avoir trouvé cette référence.
- La seconde méthode se rapproche de celle employée dans la partie 1. Pour ceux qui ne l'auraient pas remarqué, cette partie consiste à compter exactement le nombre de points à coordonnées entières dans les dilatés du simplexe $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, \sum x_i a_i = 1\}$. C'est vraisemblablement la méthode envisagée par les concepteurs du sujet, puisque nous ferons appel à la fonction s_u construite en question (35) pour justifier certaines manipulations, alors que cette fonction n'est utilisée dans aucune autre question.

Première méthode :

L'idée de cette méthode est de remarquer que $f_P(t) = E_P(1)$, où l'on évalue E_P en $1 = (1, \dots, 1)$ en remplaçant formellement tous les x^γ par 1. Cependant, on peut facilement se convaincre que, pour v un sommet de P , $IE_{C_v}(1)$ n'a pas de sens, puisque 1 est alors un pôle de la fraction rationnelle. Il faut donc évaluer en $z \neq 1$ et considérer la limite quand $z \rightarrow 1$. Comme 1 n'est pas le seul pôle des fractions associées aux cônes, il est nécessaire de choisir judicieusement z ainsi que la manière dont on le fait tendre vers 1. Le reste de cette démonstration consiste principalement à légitimer cette procédure. Une fois cette limite considérée, une analyse du développement limité associé révèle alors que $f_P(t)$ est bien un polynôme.

• Commençons par préciser et bien définir ce que l'on entend par évaluation. Cela correspond évidemment à l'intuition, mais comme les objets manipulés sont un peu subtils, il est bon de formuler cette étape. Nous ne ferons cependant pas toutes les vérifications. Pour $z = (z_1, \dots, z_n) \in (\mathbb{R}^*)^n$ dont toutes les coordonnées sont non nulles^a, on définit ev_z , le morphisme d'évaluation en z par^b

$$\text{ev}_z : \begin{cases} \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n] & \rightarrow \mathbb{C} \\ P = \sum_\gamma p_\gamma x^\gamma & \mapsto P(z) = \sum_\gamma p_\gamma z^\gamma \end{cases},$$

où l'on note $z^\gamma = z_1^{\gamma_1} \dots z_n^{\gamma_n}$. On peut alors vérifier que ev_z est bien un morphisme de $\mathbb{C}$ -algèbres. On étend ev_z partiellement à $\mathbb{C}(\mathbb{Z}^n)$ de manière naturelle. Si $f \in \mathbb{C}(\mathbb{Z}^n)$ possède un représentant $\frac{P}{Q}$ tel que $Q(z) \neq 0$, alors on pose

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}.$$

On vérifie alors que cela définit bien une fonction (partielle) de $\mathbb{C}(\mathbb{Z}^n) \rightarrow \mathbb{C}$, car indépendante du représentant choisi. De plus, on vérifie que ev_z , lorsqu'elle est bien définie, est linéaire et multiplicative. Si z annule le dénominateur de tout représentant de f , on dit que z est un pôle de f , et on ne peut évaluer f en z . Ainsi, tout ceci permet bien d'évaluer

$$IE_{tP}(z) = \sum_{v \text{ sommet de } P} z^{tv-v} IE_{C_v}(z),$$

à condition que z ne soit un pôle d'aucune des fractions.

• Comme IE_{tP} est polynomiale, on peut l'évaluer en n'importe quel vecteur, avec, comme annoncé plus haut,

$$IE_{tP}((1, \dots, 1)) = \sum_{\gamma \in tP \cap \mathbb{Z}^n} (1, \dots, 1)^\gamma = \sum_{\gamma \in tP \cap \mathbb{Z}^n} 1 = \text{Card}(tP \cap \mathbb{Z}^n).$$

Au vu des expressions obtenues à la question (38), on peut écrire

$$IE_{C_v} = \frac{P_v}{\prod_{i=1}^{d_v} (1 - x^{\gamma_{i,v}})},$$

pour $P_v \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$ et des vecteurs $\gamma_{i,v} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$. Ainsi, les pôles de IE_{C_v} sont les vecteurs satisfaisant $z^{\gamma_{i,v}} = 1$ pour $i = 1, \dots, d_v$. Pour pouvoir évaluer l'équation en z , il faut donc choisir z tel que $z^{\gamma_{i,v}} \neq 1$. L'astuce consiste alors à paramétrer

$$z = r(s) = (e^{sm_1}, \dots, e^{sm_n}),$$

pour un vecteur $m \in \mathbb{R}^n$ bien choisi et un paramètre $s > 0$. En effet, on observe que $z(s)^\gamma = e^{s\langle m, \gamma \rangle}$. Il suffit donc de trouver m tel que, pour tout i, v , on ait $\langle m, \gamma_{i,v} \rangle \neq 0$.

- Il s'agit alors de trouver un vecteur qui n'est orthogonal à aucun des vecteurs d'une famille finie. Pour cela, paramétrons

$$m = (1, \lambda, \dots, \lambda^{n-1}),$$

et observons que le produit

$$\prod_{v,i} \langle m, \gamma_{i,v} \rangle,$$

est un polynôme en λ . Ne possédant qu'un nombre fini de racines, on peut trouver une valeur de λ telle que ce produit soit non nul. On a donc bien, pour cette valeur, $\langle m, \gamma_{i,v} \rangle \neq 0$. Ainsi, on peut évaluer l'équation de la question (45) en $r(s)$.

- On a alors l'égalité dans $\mathbb{C}$

$$\text{IE}_{tP}(r(s)) = \sum_{v \text{ sommet de } P} e^{s(t-1)\langle m, v \rangle} \frac{P_v(r(s))}{\prod_{i=1}^{d_v} (1 - e^{s\langle m, \gamma_{i,v} \rangle})}.$$

Pour $s > 0$, on a donc une égalité entre fractions rationnelles en $r(s)$. Comme on a vu que le membre de gauche tend vers $f_P(t)$ quand $s \rightarrow 0$ (puisque $r(s) \rightarrow 1$), la limite du membre de droite doit être finie. Notamment, si l'on considère le développement asymptotique, les termes divergents en s^{-l} doivent se simplifier. Ainsi, la valeur de $f_P(t)$ peut se retrouver en cherchant le terme constant (en s^0) du développement. En exprimant à un ordre suffisant k

$$\begin{aligned} \text{IE}_{tP}(r(s)) &= \sum_{v \text{ sommet de } P} \left(1 + s(t-1)\langle m, v \rangle + \dots + \frac{1}{k!} (s(t-1)\langle m, v \rangle)^k + o(s^k) \right) \\ &\quad \times \frac{P_v(r(s))}{\prod_{i=1}^{d_v} (-1) \left(s\langle m, \gamma_{i,v} \rangle + \dots + \frac{1}{k!} (s\langle m, \gamma_{i,v} \rangle)^k + o(s^k) \right)}. \end{aligned}$$

En développant tout cela (ce que l'on ne fera pas ici explicitement), on observe donc bien que le terme constant est un polynôme en t . Ainsi, la fonction $f_P(t)$ est polynomiale en t .

Seconde méthode :

L'idée de cette seconde méthode est de travailler dans $\mathbb{C}[[\mathbb{Z}^{n+1}]]$ en ajoutant une $n+1$ ^{ème} variable formelle. Nous allons donc expliciter rigoureusement ce passage, ainsi que le problème de l'évaluation partielle, afin de rendre ces étapes pleinement justifiées. Informellement, nous voulons considérer

$$\sum_{t \in \mathbb{N}} x_{n+1}^t E_{tP}$$

où $x_{n+1} = x^{(0, \dots, 0, 1)}$ est la nouvelle variable formelle. Comme on observe que

$$(1 - x_{n+1}x^v) \sum_{t \in \mathbb{N}} x_{n+1}^t x^{tv-v} \text{IE}_{C_v} = x^{-v} \text{IE}_{C_v},$$

cela semble indiquer que $\sum_{t \in \mathbb{N}} x_{n+1}^t \text{IE}_{tP}$ est rationnelle. Cependant, de tels calculs, mélangeant $\mathbb{C}(\mathbb{Z}^{n+1})$ et $\mathbb{C}[[\mathbb{Z}^{n+1}]]$, n'ont pas de sens. C'est là que s'avère utile l'application s_u construite dans la question (35). En évaluant alors les n premières variables à 1 (ce qui demandera une justification), on obtient l'expression

$$\sum_{t \in \mathbb{N}} x^t f_P(t) = \frac{R(t)}{(1-x)^{\text{Card}(V)}}$$

pour V l'ensemble des sommets de P et R un polynôme, avec $\deg R < \text{Card } V$. Une décomposition en éléments simples et un développement en série des termes nous permettront de conclure. Il s'agit alors de justifier rigoureusement chacune des étapes et d'en expliciter les détails.

- On plonge naturellement $\mathbb{C}[[\mathbb{Z}^n]]$ dans $\mathbb{C}[[\mathbb{Z}^{n+1}]]$ par la formule

$$f \mapsto \begin{cases} \mathbb{Z}^{n+1} & \rightarrow \mathbb{C} \\ (\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1}) & \mapsto \begin{cases} f(\gamma_1, \dots, \gamma_n) & \text{si } \gamma_{n+1} = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

On peut alors vérifier que cela revient à envoyer x^γ sur $x^{(\gamma,0)}$. Ce plongement induit alors un plongement naturel de $\mathbb{C}(\mathbb{Z}^n)$ dans $\mathbb{C}(\mathbb{Z}^{n+1})$. Ainsi, nous pouvons bien introduire une nouvelle variable, et voir la formule de la question (45) comme formulée sur $\mathbb{C}(\mathbb{Z}^{n+1})$.

• Afin de faire le chemin inverse, c'est-à-dire de passer de $\mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$ à $\mathbb{C}[\mathbb{Z}^k]$ pour $k < n$, nous introduisons le concept d'évaluation partielle. Pour $z_{k+1}, \dots, z_n$ non nuls, et pour $f \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$ vérifiant que, pour tout $\gamma \in \mathbb{Z}^k$, l'ensemble $\{(\gamma_{k+1}, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{Z}^{n-k} \mid f(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \neq 0\}$ est fini, on pose l'évaluation partielle de f comme la fonction $g \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^k]$ telle que, pour $\gamma \in \mathbb{Z}^k$:

$$g(\gamma) = \sum_{\gamma_{k+1}, \dots, \gamma_n \in \mathbb{Z}} f(\gamma_1, \dots, \gamma_n) z_{k+1}^{\gamma_{k+1}} \cdots z_n^{\gamma_n}.$$

On vérifie que cela correspond bien à l'intuition d'évaluer les $n - k$ dernières variables aux valeurs $z_{k+1}, \dots, z_n$. On vérifie de même que l'évaluation partielle est un morphisme de $\mathbb{C}$ -algèbres (lorsque les produits sont définis). Cette opération sera nécessaire à la fin pour éliminer les n premières variables et ne conserver que la variable ajoutée.

• Soit u un morphisme injectif de $\mathbb{Z}^{n+1}$ dans $\mathbb{R}$. Un tel morphisme existe, par exemple en considérant le produit scalaire avec $(a_1, \dots, a_{n+1})$ où les a_i forment une famille $\mathbb{Q}$ -libre. On observe que les propriétés de s_u permettent d'affirmer que s_u est additif, donc linéaire. En effet,

$$s_u \left(\frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2} \right) = s_u \left(\frac{P_1 Q_2 + P_2 Q_1}{Q_1 Q_2} \right) = (P_1 Q_2 + P_2 Q_1) s_u \left(\frac{1}{Q_1 Q_2} \right) = s_u \left(\frac{P_1}{Q_1} \right) + s_u \left(\frac{P_2}{Q_2} \right)$$

On observe alors la chaîne d'égalités suivante

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{N}, \quad IE_{tP} &= \sum_v x^{tv-v} IE_{C_v}. \\ \text{Donc,} \quad \forall t \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1}^t IE_{tP} &= \sum_v x_{n+1}^t x^{tv-v} IE_{C_v}. \\ \text{D'où,} \quad \forall t \in \mathbb{N}, \quad s_u(x_{n+1}^t IE_{tP}) &= s_u \left(\sum_v x_{n+1}^t x^{tv-v} IE_{C_v} \right). \\ \text{Puis,} \quad \forall t \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1}^t E_{tP} &= \sum_v x_{n+1}^t x^{tv-v} s_u(IE_{C_v}). \\ \text{Donc,} \quad \sum_{t \in \mathbb{N}} x_{n+1}^t E_{tP} &= \sum_{t \in \mathbb{N}} \sum_v x_{n+1}^t x^{tv-v} s_u(IE_{C_v}). \\ \text{Puis,} \quad \prod_v (1 - x_{n+1} x^v) \sum_{t \in \mathbb{N}} x_{n+1}^t E_{tP} &= \sum_v \prod_{v' \neq v} (1 - x_{n+1} x^{v'}) x^{-v} s_u(IE_{C_v}). \end{aligned}$$

Ainsi, $\sum_{t \in \mathbb{N}} x_{n+1}^t E_{tP} \in \mathcal{R}$ est rationnelle (rappelons que E_{tP} étant polynomiale, elle peut s'identifier à IE_{tP} d'où la relation $s_u(IE_{tP}) = E_{tP}$).

• On affirme alors que $\sum_v \prod_{v' \neq v} (1 - x_{n+1} x^{v'}) s_u(IE_{C_v})$ est un polynôme, et que son degré en x_{n+1} est au plus $\text{Card}(V) - 1$. En effet, si l'on développe, on a

$$\sum_v \prod_{v' \neq v} (1 - x_{n+1} x^{v'}) x^{-v} s_u(IE_{C_v}) = \sum_v \sum_{I \subset V \setminus \{v\}} (-x_{n+1})^{\text{Card } I} x^{\sum_{i \in I} i} x^{-v} s_u(IE_{C_v}).$$

Or, en fixant $m = 0, \dots, \text{Card}(V)$, le terme en x_{n+1}^m se réécrit (au signe près)

$$\sum_v \sum_{\substack{I \subset V \setminus \{v\} \\ \text{Card}(I)=m}} x^{\sum_{i \in I} i} x^{-v} s_u(IE_{C_v}) = \sum_v \sum_{\substack{I \subset V \\ \text{Card}(I)=m}} x^{\sum_{i \in I} i} x^{-v} s_u(IE_{C_v}) - \sum_v \sum_{\substack{I \subset V \setminus \{v\} \\ \text{Card}(I)=m-1}} x^{\sum_{i \in I} i} s_u(IE_{C_v})$$

ce qui consiste à inclure tous les ensembles de sommets $I \subset V$, et non seulement ceux qui ne contiennent pas v . Cette opération se poursuit par récurrence (non détaillée ici)

$$\sum_v \sum_{\substack{I \subset V \setminus \{v\} \\ \text{Card}(I)=m}} x^{\sum_{i \in I} i} x^{-v} s_u(IE_{C_v}) = \sum_{l=0}^m (-1)^l \sum_v \sum_{\substack{I \subset V \\ \text{Card}(I)=m-l}} x^{\sum_{i \in I} i} x^{lv-v} s_u(IE_{C_v})$$

$$= \sum_{l=0}^m (-1)^l \sum_{\substack{I \subset V \\ \text{Card}(I)=m-l}} x^{\sum_{i \in I} i} E_{lP},$$

en appliquant la formule de la question (45). Ainsi, comme les E_{lP} sont polynomiaux, $\sum_v \prod_{v' \neq v} (1 - x_{n+1} x^{v'}) s_u(\text{IE}_{C_v})$ est bien un polynôme, de degré en x_{n+1} inférieur à $\text{Card } V$.

On peut alors évaluer partiellement les n première variables de l'égalité suivant

$$\prod_v (1 - x_{n+1} x^v) \sum_{t \in \mathbb{N}} x_{n+1}^t E_{tP} = \sum_v \prod_{v' \neq v} (1 - x_{n+1} x^{v'}) x^{-v} s_u(\text{IE}_{C_v}).$$

en $x = (1, \dots, 1)$, ce qui est permis car, pour chaque puissance de x_{n+1} , il n'y a qu'un nombre fini de termes non nuls. On obtient alors, en notant z la seule variable formelle restante

$$(1 - z)^{\text{Card } V} \sum_{t \in \mathbb{N}} f_P(t) z^t = R(z),$$

où $R \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme à une variable, avec $\deg R < \text{Card } V$. Ainsi, la série formelle $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_P(t) z^t$ est rationnelle. Par décomposition en éléments simples, on obtient

$$\frac{R(z)}{(1 - z)^{\text{Card } V}} = \sum_{i=1}^{\text{Card } V} \frac{\lambda_i}{(1 - z)^i},$$

pour des constantes $\lambda_1, \dots, \lambda_{\text{Card } V}$. En développant en série, la question (4) permet de conclure que $f_P(t)$ est polynomiale, car dans le cas $\omega = 1$, on obtient bien un polynôme, et non un quasi-polynôme.

a. Il est important de ne pas autoriser que certaines coordonnées de z soient nulles, car on travaille avec des puissances potentiellement négatives.

b. On observe un conflit de notation avec la définition de P . En effet, P est définie comme une fonction de $\mathbb{Z}^n$ dans $\mathbb{C}$, donc la notation $P(z)$ est déjà définie. Cependant, il est malcommode de penser P comme une telle fonction, et on préfère en pratique la voir comme une somme formelle des variables x^γ . On peut alors oublier cette définition initiale, qui ne sert qu'à donner un cadre rigoureux pour étudier de tels objets. C'est d'ailleurs exactement ce que l'on fait quand on étudie les polynômes usuels.

(47) Supposons maintenant que P est un polytope rationnel. Montrer qu'il existe une fonction quasi-polynomiale f_P tel que $\text{Card}(tP \cap \mathbb{Z}^n) = f_P(t)$ pour tout $t \in \mathbb{N}$.

Version courte :

Pour $m \in \mathbb{N}^*$ tel que mP ait des sommets à coordonnées entières, $r \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$ et $t \in \mathbb{N}$, on observe la formule

$$\text{IE}_{(tm+r)P} = \sum_{v \text{ sommet de } P} x^{tmv} \text{IE}_{C_{rv}}.$$

La dépendance en t étant du même type que dans la question précédente, les mêmes méthodes permettent de montrer que $f_P(tm+r)$ est un polynôme en t . La question (3) permet alors de conclure que $f_P(t)$ est une quasi-polynôme.

Version détaillée :

Comme P est rationnel, on a déjà vu que les sommets de P ont des coefficients rationnels. Notamment, en posant $m \in \mathbb{N}^*$ un dénominateur commun des coefficients des sommets, mP est alors un polytope à sommets entiers. On fixe alors $r \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$ et l'on montre que la fonction

$$t \mapsto f_P(mt+r)$$

est polynomiale. Le cas $r = 0$ a été traité dans la question précédente. On peut donc supposer que $r \neq 0$. Par application du théorème de Brion, on a alors

$$\text{IE}_{(tm+r)P} = \sum_v \text{IE}_{C_{(tm+r)v}} = \sum_v x^{tmv} \text{IE}_{C_{rv}}.$$

On observe alors que l'on peut appliquer l'une ou l'autre méthode utilisée dans la question précédente pour

montrer que $f_P(mt+r)$ est polynomiale en t , car la dépendance en t dans cette formule est de même nature.

Ainsi, par la question (3) caractérisant les fonctions quasi-polynomiales, $f_P(t)$ est alors quasi-polynomiale.

Remarque : On pourrait envisager une approche alternative consistant à s'intéresser à la série $\sum_{t \in \mathbb{N}} f_P(t)z^t$. En suivant la seconde méthode de la question précédente, on pourrait montrer, ce qui demanderait des vérifications très minutieuses, que $\sum_{t \in \mathbb{N}} f_P(t)z^t$ est rationnelle de la forme

$$\sum_{t \in \mathbb{N}} f_P(t)z^t = \frac{R(z)}{(1-z^m)^{\text{Card } V}},$$

pour R un polynôme de degré $\deg R < m \text{ Card } V$. Une décomposition en éléments simples et la question (4) donnent alors le résultat. Dans ce cas, contrairement à la question précédente, il faudra développer des termes de la forme $\frac{1}{(1-\omega z)^k}$, ce qui explique que l'on obtienne une fonction quasi-polynomiale et non seulement polynomiale.

Pour tout entier $k \geq 1$, notons

$$H_n(k) = \text{Card} \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \mid M_{i,j} \geq 0, \sum_{l=1}^n M_{i,l} = \sum_{l=1}^n M_{l,j} = k \text{ pour } i, j = 1, \dots, n \right\}.$$

(48) Montrer que $H_n(k)$ est un polynôme en k et déterminer son degré.

Version courte :

Il est clair que $H_n(k)$ est un polynôme en k . On observe l'encadrement

$$\left(\left\lfloor \frac{k}{(n-1)^2} \right\rfloor + 1 \right)^{(n-1)^2} \leq H_n(k) \leq (k+1)^{(n+1)^2},$$

ce qui impose, par le comportement asymptotique, que $H_n(k)$ est de degré $(n-1)^2$.

Version détaillée :

Le polytope B_n , ayant, par la partie 3, des sommets entiers, la question (46) établit directement que $H_n(k)$ est polynomiale en k , puisque $H_n(k) = \text{Card}(kB_n \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}))$. Pour pouvoir conclure sur le degré, on cherche un encadrement de $H_n(k)$.

On rappelle que l'étude de B_n en partie 3 a révélé qu'une matrice de kB_n est entièrement déterminée par la donnée de ses $(n-1)^2$ coefficients dans le bloc carré supérieur gauche de taille $(n-1) \times (n-1)$. Ainsi, si l'on veut être sûr de compter toutes les matrices de kB_n , on doit autoriser que ces coefficients prennent n'importe quelle valeur dans $\llbracket 0, k \rrbracket$. Il y a donc $k+1$ possibilités pour chaque coefficient, ce qui donne la majoration

$$H_n(k) \leq (k+1)^{(n-1)^2}.$$

Inversement, si l'on veut être certain de ne compter que des éléments appartenant bien à kB_n , il faut s'assurer que la somme des $(n-1)^2$ coefficients soit inférieure à k . Chaque coefficient ne peut donc prendre que des valeurs inférieures à $\frac{k}{(n-1)^2}$, ce qui laisse $\left\lfloor \frac{k}{(n-1)^2} \right\rfloor + 1$ choix par coefficient. On obtient ainsi la minoration suivante

$$\left(\left\lfloor \frac{k}{(n-1)^2} \right\rfloor + 1 \right)^{(n-1)^2} \leq H_n(k).$$

Comme on a, lorsque $k \rightarrow \infty$,

$$\left(\left\lfloor \frac{k}{(n-1)^2} \right\rfloor + 1 \right)^{(n-1)^2} \sim (k+1)^{(n-1)^2} \sim k^{(n-1)^2},$$

cela impose que $H_n(k)$ est un polynôme en k de degré $(n-1)^2$.

Remarque : On peut montrer que le degré de $f_P(t)$ est exactement la dimension de P . Notre preuve ne donne pas ce résultat directement, mais la seconde méthode permet néanmoins d'obtenir la majoration $\deg f_P \leq$

$\dim P$. En effet, elle donne la majoration $\deg f_P \leq \text{Card}(V) - 1$. Ceci établit alors l'inégalité pour les simplexes. Ainsi, en triangulant P par des simplexes de même dimension que P , on peut majorer f_P par la somme des polynômes associés aux simplexes, ce qui impose $\deg f_P \leq \dim P$.

Fin du sujet