

Corrigé de l'épreuve de Mathématique : X-ENS-PC-2025
15 Avril 2025

Makrem Salhi : makremessalhi@gmail.com

Première Partie

1. Soient $u, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On pose $M = uv^T$. Comme u est dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$ et v^T est un vecteur de $M_{1,n}(\mathbb{R})$, la matrice M est alors une matrice carrée de taille n . Toutes les colonnes de M sont de la forme $v_j u$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, les v_j étant des scalaires non tous nuls, donc elles sont colinéaires au vecteur non nul u d'où : $\text{rang}(M) = 1$.
2. Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Il est immédiat que

$$M = uu^T$$

où $u^T = (1, \dots, 1)$. Comme $u \neq 0$, il découle de la question précédente que la matrice J est de rang 1.

3. Soit $K \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1. Il existe alors une colonne non nulle de K que l'on note u pour laquelle les colonnes C_1, \dots, C_n de K vérifient $C_j = v_j u$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ où les v_j sont des scalaires non tous nuls. En posant $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, on a $K = uv^T$.

4. Soient $u, v, x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Si $u = \lambda x$ et $v = \frac{1}{\lambda} y$ pour un certain scalaire λ non nul, alors on a clairement : $uv^T = xy^T$. Réciproquement, supposons que $uv^T = xy^T$. Ainsi, $uv^T v = y^T v x$ et donc

$$u = \frac{y^T v}{\|v\|^2} x.$$

On pose alors

$$\lambda = \frac{y^T v}{\|v\|^2} \in \mathbb{R}^*.$$

En injectant cette nouvelle expression de u dans l'égalité $uv^T = xy^T$, on obtient $\lambda x v^T = xy^T$. Ainsi, $\lambda v x^T = y x^T$, puis on a : $\lambda v \|x\|^2 = y \|x\|^2$. Finalement, on a : $v = \frac{1}{\lambda} y$, d'où le résultat demandé.

5. Soit $K \in M_n(\mathbb{R})$ de rang 1, il existe alors $u, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tels que : $K = uv^T$.

(a) Posons $u^T = (u_1, \dots, u_n)$ et $v^T = (v_1, \dots, v_n)$. Alors, $K = (u_i v_j)_{1 \leq i, j \leq n}$. Par suite

$$\text{Tr}(K) = \sum_{i=1}^n u_i v_i = \langle u, v \rangle.$$

(b) La question précédente fournit

$$K^2 = uv^T uv^T = (v^T u) uv^T = \text{Tr}(K)K.$$

(c) Supposons que $\text{Tr}(K) \neq 0$ alors $X^2 - \text{Tr}(K)X$ est un polynome annulateur de K qui est en outre scindé et à racines simples : 0 et $\text{Tr}(K)$. Il en résulte que K est diagonalisable.

Réciproquement, supposons que K est diagonalisable. Si $\text{Tr}(K) = 0$, K serait nilpotente en vertu de la question précédente et on a précisément : $K^2 = 0$. Ainsi, $\text{Sp}(K) \subset \{0\}$ et comme K n'est pas inversible, $\text{Sp}(K) = \{0\}$. Ceci permet de conclure que K est nulle ce qui est absurde car le rang de K est 1. Par suite, $\text{Tr}(K) \neq 0$.

6. Supposons que P est un projecteur orthogonal de rang 1, alors : $\mathbb{R}^n = \text{Im}(P) \oplus \text{ker}(P)$ et $\text{Im}(P) \perp \text{ker}(P)$. Soit y un vecteur unitaire de $\text{Im}(P)$ et posons $A = yy^T$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ un vecteur quelconque que l'on décompose sous la forme $x = ay + z$ où $a \in \mathbb{R}$ et $z \in \text{ker}(P)$. Alors

$$Px = ay \text{ et } Ax = a\langle y, y \rangle y + \langle y, z \rangle y = ay.$$

Par conséquent, $Px = Ax$ pour x quelconque et donc $P = yy^T$.

Réciproquement, soit $y \in \mathbb{R}^n$ unitaire tel que : $P = yy^T$. On a : $P^2 = \|y\|^2 yy^T = P$ ce qui affirme que P est un projecteur. Comme $P y = y$ alors $y \in \text{Im}(P)$ et comme $\text{rang}(P) = 1$ alors

$$\text{Im}(P) = \text{vect}(y).$$

D'autre part, si $u \in \text{vect}(y)^\perp$ alors $Pu = \langle y, u \rangle y = 0$ et à fortiori : $\text{vect}(y)^\perp \subset \text{ker}(P)$.

De surcroît, on sait que $\dim \text{ker}(P) = n - 1 = \dim \text{vect}(y)^\perp$, alors

$$\text{ker}(P) = \text{vect}(y)^\perp.$$

Ceci montre que : $\text{ker}(P) \perp \text{Im}(P)$ et P est, dès lors, un projecteur orthogonal.

Deuxième Partie

7. Un calcul routinier fournit immédiatement

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ \mathbf{v}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n + \mathbf{u}\mathbf{v}^T & \mathbf{u} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -\mathbf{v}^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & \mathbf{u} \\ 0 & \mathbf{v}^T \mathbf{u} + 1 \end{pmatrix}.$$

8. On a $\det \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ \mathbf{v}^T & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -\mathbf{v}^T & 1 \end{pmatrix} = 1$, $\det \begin{pmatrix} I_n + \mathbf{u}\mathbf{v}^T & \mathbf{u} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \det(I_n + uv^T)$ et $\det \begin{pmatrix} I_n & \mathbf{u} \\ 0 & \mathbf{v}^T \mathbf{u} + 1 \end{pmatrix} = v^T u + 1 = 1 + \langle v, u \rangle$. Le résultat est alors immédiat en vertu de la question précédente.

9. Comme A est inversible, alors $\det(A + uv^T) = \det(A) \det(I_n + A^{-1}uv^T)$. En appliquant le résultat de la question précédente au vecteur $A^{-1}u$ au lieu de u , on obtient

$$\det(A + uv^T) = \det(A)(1 + \langle A^{-1}u, v \rangle).$$

10. La matrice $A + uv^T$ est inversible si et seulement si son déterminant est non nul, ceci est réalisé, tenant compte de la question précédente, si et seulement si $\langle v, A^{-1}u \rangle \neq -1$.
11. Posons $B = A^{-1} - \frac{A^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T A^{-1}}{1 + \langle \mathbf{v}, A^{-1}\mathbf{u} \rangle}$. On a

$$\begin{aligned} B(A + uv^T) &= I_n + A^{-1}uv^T - \frac{A^{-1}uv^T + A^{-1}uv^T A^{-1}uv^T}{1 + v^T A^{-1}u} \\ &= I_n + A^{-1}uv^T - \frac{A^{-1}uv^T(1 + v^T A^{-1}u)}{1 + v^T A^{-1}u} \\ &= I_n. \end{aligned}$$

On conclut que

$$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T A^{-1}}{1 + \langle \mathbf{v}, A^{-1}\mathbf{u} \rangle}.$$

12. La réponse est non. Prenons l'exemple suivant : $C = \begin{pmatrix} I_{n-1} & O_{n-1,1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ où $O_{n-1,1}$ est le colonne nul de $M_{n-1,1}(\mathbb{R})$. Posons $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $u^T = (0, \dots, 0, 1)$. Alors, uu^T est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui à la position (n, n) qui vaut 1. Par conséquent, $C + uu^T = I_n \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$.

Troisième Partie

13. On a $(uu^T)^T = uu^T$ et donc uu^T est une matrice symétrique. Ainsi, la matrice B est symétrique puisqu'elle est la somme de deux matrices symétriques.
14. Soit $D = \sum_{k=1}^n v_k v_k^T$. Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on a $Dv_j = \sum_{k=1}^n \langle v_k, v_j \rangle v_k = v_j = I_n v_j$. Ceci montre que les matrices D et I_n coïncident sur une base de \mathbb{R}^n , d'où : $D = I_n$.
15. (a) Posons $C = \sum_{k=1}^n \lambda_k w_k w_k^T$. Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$Cw_j = \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle w_k, w_j \rangle w_k = \lambda_j w_j = Aw_j.$$

Ceci montre que les matrices C et A coïncident sur une base de \mathbb{R}^n , d'où : $C = A$.

- (b) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. En utilisant la question 14, on obtient

$$\begin{aligned} (xI_n - A) \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - \lambda_k} w_k w_k^T &= \sum_{k=1}^n \frac{x}{x - \lambda_k} w_k w_k^T - \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - \lambda_k} \lambda_k w_k w_k^T \\ &= \sum_{k=1}^n w_k w_k^T \\ &= I_n. \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration.

16. (a) On a :

$$\dim(E + \{u\}^T) = \dim(E) + \dim\{u\}^T - \dim(E \cap \{u\}^T) \leq n.$$

Comme A est symétrique, elle est diagonalisable et on a $\dim(E) = m$. Par suite,

$$\dim(E \cap \{u\}^T) \geq m - 1.$$

(b) Pour tout $x \in E \cap \{u\}^T$, on a $Bx = \lambda x$ et par conséquent, $E \cap \{u\}^T \subset \ker(B - \lambda I_n)$. Il en résulte que : $\dim \ker(B - \lambda I_n) \geq m - 1$ et comme B est symétrique, λ est une valeur propre de multiplicité égale au dimension du sous-espace propre associé, donc λ est une valeur propre de B de multiplicité au moins $m - 1$.

17. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. On a

$$\chi_B(x) = \chi_A(x) \det(I_n - (xI_n - A)^{-1}uu^T).$$

Grâce à la question 8, on obtient

$$\chi_A(x) \det(1 - \langle u, (xI_n - A)^{-1}u \rangle).$$

Par application du résultat de la question 15-b, on déduit que

$$\begin{aligned} \chi_B(x) &= \chi_A(x) \left(1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - \lambda_k} u^T w_k w_k^T u \right) \\ &= \chi_A(x) \left(1 - \sum_{k=1}^n \frac{\langle w_k, u \rangle^2}{x - \lambda_k} \right). \end{aligned}$$

18. (a) Si $J = \emptyset$, alors u serait orthogonal à tous les vecteurs de la base (w_1, \dots, w_n) et donc u serait orthogonal à $\text{vect}((w_1, \dots, w_n)) = E$. Ceci implique que $u = 0$ ce qui est absurde. Par suite, $J \neq \emptyset$.

(b) Soit $l \notin J$, alors

$$Bw_l = Aw_l + u\langle u, w_l \rangle = Aw_l = \lambda_l w_l.$$

D'où le résultat.

(c) La question précédente montre que les λ_l sont des valeurs propres de B pour tout $l \neq j$.

Par ailleurs, comme (w_1, \dots, w_n) est une base orthonormale de \mathbb{R}^n , on a

$$u = \sum_{k=1}^n \langle u, w_k \rangle w_k = \langle u, w_j \rangle w_j.$$

Comme u est unitaire,

$$|\alpha_j| = |\langle u, w_j \rangle| = 1.$$

Par conséquent,

$$Bw_j = Aw_j + \alpha_j^2 \langle w_j, w_j \rangle w_j = (1 + \lambda_j)w_j.$$

Ceci montre que $\lambda_j + 1$ est une valeur propre de B ce qui achève la démonstration.

19. (a) La fonction f est une fraction rationnelle de pôles $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ donc elle est de classe \mathcal{C}^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Un calcul routinier fournit

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}, \quad f'(x) = - \sum_{k=1}^n \frac{\langle w_k, u \rangle^2}{(x - \lambda_k)^2}.$$

- (b) Pour tout $l \in \{1, \dots, n-1\}$, f est continue et strictement décroissante sur $] \lambda_l, \lambda_{l+1}[$ donc f réalise une bijection de $] \lambda_l, \lambda_{l+1}[$ sur $\left] \lim_{x \rightarrow \lambda_{l+1}^-} f(x), \lim_{x \rightarrow \lambda_l^+} f(x) \right[= \mathbb{R}$. Par conséquent, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution dans l'intervalle $] \lambda_l, \lambda_{l+1}[$ pour tout $l = 1, \dots, n-1$.

Idem, f réalise une bijection de $] \lambda_n, +\infty[$ sur $\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow \lambda_n^+} f(x) \right[= \mathbb{R}$ et donc l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solutions dans $] \lambda_n, +\infty[$.

- (c) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, il découle de la question 17 que $\chi_B(x) = 0$ si et seulement si $f(x) = 1$. Par ailleurs, la question précédente montre l'équation $f(x) = 1$ admet n racines $\mu_1 \in] \lambda_1, \lambda_2[, \dots, \mu_{n-1} \in] \lambda_{n-1}, \lambda_n[$ et $\mu_n \in] \lambda_n, +\infty[$. Par conséquent, $\text{Sp}(B) = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ et on a

$$\lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < \dots < \lambda_n < \mu_n.$$

Quatrième Partie

20. La variable aléatoire U suit la loi uniforme de paramètre n et donc : $P(U = u_i) = \frac{1}{n}$ pour tout $i = 1, \dots, n$. On considère la fonction g définie sur \mathbb{R}^n par : $g(x) = \langle x, w \rangle$. Par application du théorème de transfert, on obtient

$$\mathbb{E}(g(U)) = \sum_{i=1}^n g(u_i)P(U = u_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle u_i, w \rangle.$$

Comme (u_1, \dots, u_n) est une base orthonormale de \mathbb{R}^n , on déduit aussitôt que

$$\mathbb{E}(\langle U, w \rangle) = \frac{1}{n} \|w\|^2.$$

21. Comme $U(\Omega)$ est un ensemble fini, il en est de même pour $B(\Omega)$. Par suite, pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, la variable aléatoire $\chi_B(x)$ prend un nombre fini de valeurs, ceci confirme bien que son espérance est finie.

Fixons maintenant $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. On pose

$$B_i = A + u_i u_i^T, \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

En se référant à la question 17 et en appliquant le théorème de transfert, on obtient

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(\chi_B(x)) &= \sum_{i=1}^n \chi_{B_i}(x) P(U = u_i) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \chi_A(x) - \frac{\chi_A(x)}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\langle w_k, u_i \rangle}{x - \lambda_k} \\
 &= \chi_A(x) - \frac{\chi_A(x)}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - \lambda_k} \sum_{i=1}^n \langle w_k, u_i \rangle \\
 &= \chi_A(x) - \frac{\chi_A(x)}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\|w_k\|^2}{x - \lambda_k} \quad ((u_1, \dots, u_n) \text{ b.o.n}) \\
 &= \chi_A(x) - \frac{\chi_A(x)}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - \lambda_k}.
 \end{aligned}$$

Soulignons que le polynôme caractéristique de la matrice A est

$$\chi_A(x) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i).$$

Il s'ensuit que

$$\frac{\chi'_A(x)}{\chi_A(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - \lambda_k}.$$

En conclusion, on a

$$\mathbb{E}(\chi_B(x)) = \chi_A(x) - \frac{\chi'_A(x)}{n}.$$

22. Rappelons-nous que, par le théorème de transfert, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{E}(\chi_B(x)) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \chi_{B_i}(x).$$

Ainsi, la fonction $\varphi : x \mapsto \mathbb{E}(\chi_B(x))$ est polynomiale et donc continue sur \mathbb{R} . De même, l'application $\psi : x \mapsto \chi_A(x) - \frac{\chi'_A(x)}{n}$ est continue sur \mathbb{R} car elle est polynomiale. Il s'ensuit que φ et ψ sont deux applications continues sur \mathbb{R} et coïncident sur $\mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, donc elles coïncident sur \mathbb{R} . En remarquant que $\chi_A(\lambda_k) = 0$ si $k \in \{1, \dots, n\}$, on déduit aussitôt l'identité escomptée.

23. On a vu dans la question précédente que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{E}(\chi_B(x)) = \chi_A(x) - \frac{\chi'_A(x)}{n}.$$

Si $\mathbb{E}(\chi_B(x)) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors : $\chi_A(x) = \frac{\chi'_A(x)}{n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ce qui est absurde car χ_A et χ'_A ont des degrés différents. Par suite, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{E}(\chi_B(x)) \neq 0$.

Cinquième Partie

Soit $\varepsilon \in]0, \lambda_{m+1}[$.

24. L'intervalle $]0, \lambda_{m+1}[$ ne contient manifestement aucune valeur propre de A . On en tire que $A - \varepsilon I_n$ est inversible.
25. D'abord, on a

$$B - \varepsilon I_n = (A - \varepsilon I_n)^{-1} [I_n + (A - \varepsilon I_n)^{-1} u u^T].$$

La question 8 suggère que l'on a

$$\det \left([I_n + (A - \varepsilon I_n)^{-1} u u^T] \right) = 1 + \langle u, (A - \varepsilon I_n)^{-1} u \rangle < 0.$$

On en déduit que $B - \varepsilon I_n$ est inversible comme étant produit de deux matrices inversibles.

26. Notons que $(B - \varepsilon I_n)^{-1} = \left[(A - \varepsilon I_n) + u u^T \right]^{-1}$ et rappelons-nous que la matrice $A - \varepsilon I_n$ est inversible. Les hypothèses amenant au résultat démontré dans la question 11 sont alors réunies et par conséquent, on a

$$(B - \varepsilon I_n)^{-1} = (A - \varepsilon I_n)^{-1} - \frac{(A - \varepsilon I_n)^{-1} u u^T (A - \varepsilon I_n)^{-1}}{1 + \langle u, (A - \varepsilon I_n)^{-1} u \rangle}.$$

Comme la matrice A est symétrique, il en est de même pour la matrice $A - \varepsilon I_n$ et donc $(A - \varepsilon I_n)^{-1}$ est symétrique. Par suite,

$$(B - \varepsilon I_n)^{-1} = (A - \varepsilon I_n)^{-1} - \frac{(A - \varepsilon I_n)^{-1} u ((A - \varepsilon I_n)^{-1} u)^T}{1 + \langle u, (A - \varepsilon I_n)^{-1} u \rangle}.$$

Par ailleurs, la question 5-a fournit

$$\text{Tr} \left((A - \varepsilon I_n)^{-1} u ((A - \varepsilon I_n)^{-1} u)^T \right) = \|(A - \varepsilon I_n)^{-1} u\|^2.$$

En remarquant que $\|(A - \varepsilon I_n)^{-1} u\|^2 > 0$ car u est non nul, on conclut que

$$\text{Tr}((B - \varepsilon I_n)^{-1}) - \text{Tr}((A - \varepsilon I_n)^{-1}) = -\frac{\|(A - \varepsilon I_n)^{-1} u\|^2}{1 + \langle u, (A - \varepsilon I_n)^{-1} u \rangle} > 0.$$

D'où le résultat prononcé.

27. Au vu des hypothèses sur les valeurs propres de A et B , on déduit que : $\mu_k = 0$ lorsque $k \in \{1, \dots, m-1\}$ car dans ce cas, on a : $\lambda_k \leq \mu_k \leq \lambda_{k+1}$. De plus, $0 \leq \mu_m \leq \dots \leq \mu_n$. Par ailleurs, la matrice $B - \varepsilon I_n$ étant inversible, son spectre ne contient pas 0, en particulier, $\mu_m \neq \varepsilon$. D'autre part, on sait que lorsqu'une matrice M est diagonalisable et inversible alors $\text{Sp}(M^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda} : \lambda \in \text{Sp}(M) \right\}$. En se rappelant que la trace est la somme des valeurs propres et en utilisant la question précédente, on trouve que

$$\frac{-1}{\varepsilon}(m-1) + \frac{1}{\mu_m - \varepsilon} + \dots + \frac{1}{\mu_n - \varepsilon} > \frac{-1}{\varepsilon}(m) + \frac{1}{\lambda_{m+1} - \varepsilon} + \dots + \frac{1}{\lambda_n - \varepsilon}.$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\mu_m - \varepsilon} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\mu_k - \varepsilon} - \frac{1}{\lambda_k - \varepsilon} \right) > 0.$$

Comme $0 < \lambda_k - \varepsilon \leq \mu_k - \varepsilon$ pour tout $k \in \{m+1, \dots, n\}$, alors

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\mu_k - \varepsilon} - \frac{1}{\lambda_k - \varepsilon} \right) \leq 0.$$

Il en résulte que

$$\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\mu_m - \varepsilon} > 0.$$

Ainsi,

$$\frac{\mu_m}{\varepsilon(\mu_m - \varepsilon)} > 0.$$

Comme $\mu_m \geq 0$, on conclut que

$$\mu_m > \varepsilon.$$