cpge-paradise.com

Corrigé de l'épreuve de Mathématique : X-ENS-PC-2025
15 Avril 2025

Makrem Salhi : makremessalhi@gmail.com

Partie I : Préliminaires

1. (a) Posons
$$A = \left\{x \in \mathbb{R} | \quad f(x) \leq f(0)\right\}.$$
On a : $A = f^{-1}\big(]-\infty, f(0)]\big)$, A est donc l'image réciproque du fermé $]-\infty, f(0)]$ par la fonction continue f et par suite A est fermé. Comme $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, il existe $M \geq 0$ tel que $f(x) > f(0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $|x| > M$. il s'ensuit que $A \subset [-M, M]$ et donc A est borné.

   (b) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc continue sur A, comme A est un fermé borné de $\mathbb{R}$ qui est de dimension finie, f est bornée sur A et y atteint ses bornes. En particulier, il existe $x_* \in A$ tel que $f(x_*) = \min\limits_{x\in A} f(x)$. Par ailleurs, on a vu dans la question précédente qu'il existe $M \geq 0$ tel que $f(x) > f(0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| > M$. On en déduit que
$$f(x_*) = \min_{x\in\mathbb{R}} f(x).$$

2. (a) Comme f' est L-Lipschitzienne, on a, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
$$|f'(x) - f'(y)|^2 \leq L|x-y||f'(x) - f'(y)|.$$
En revanche, comme f' est Lipschitzienne, elle est croissante et par suite
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x-y)\big(f'(x) - f'(y)\big) \geq 0.$$
Ceci achève la démonstration.

   (b) On a
$$\begin{aligned}
\left|\overline{x} - \overline{y}\right|^2 &= \left|x - y + \tau(f'(y) - f'(x))\right|^2 \\
&= |x-y|^2 + \tau^2|f'(x) - f'(y)|^2 - 2\tau|x-y||f'(x) - f'(y)| \\
&\leq |x-y|^2 + \tau^2 L(x-y)(f'(x) - f'(y)) - 2\tau(x-y)(f'(x) - f'(y)) \quad (2-a) \\
&\leq |x-y|^2 - \tau(2-\tau)(x-y)(f'(x) - f'(y)).
\end{aligned}$$

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons : $\overline{x}_n = x_n - \tau f'(x_n) = x_{n+1}$ et $\overline{y} = x_* - \tau f'(x_*)$. Soulignons que f est dérivable, x_* est un minimiseur de f qui est manifetement un point intérieur à $\mathbb{R}$ et donc : $f'(x_*) = 0$. Par application de la question précédente, on obtient
$$\begin{aligned}
\left|x_{n+1} - x_*\right|^2 &= \left|\overline{x}_n - \overline{y}\right|^2 \\
&\leq |x_n - y_*|^2 - \tau(2-\tau)(x_n - x_*)(f'(x_n) - f'(x_*)) \\
&\leq |x_n - x_*|^2 \qquad \big(-\tau(2-\tau)(x-y)(f'(x) - f'(y)) \leq 0\big).
\end{aligned}$$

On en déduit que : $|x_{n+1} - x_*| \leq |x_n - x_*|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $\Big(|x_n - x_*|\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors décroissante.

Partie II : Convergence rapide, sous des hypothèses fortes

3. (a) On a : $x_{n+1} = x_n - \tau L x_n = (1-\tau)x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il s'agit donc d'une suite géométrique de raison $q = 1 - \tau L$, par suite

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = (1-\tau L)^n x_0.$$

(b) Comme $x_0 \neq 0$, la suite géométrique $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $|1-\tau L| < 1$, ceci est équivalent à la condition : $0 < \tau < \dfrac{2}{L}$.

4. Comme g est convexe, la fonction : $x \mapsto g'(x) = f'(x) - \alpha x$ est croissante. D'autre part, fixons deux réels : $x > y$, alors : $f'(y) - \alpha y \leq f'(x) - \alpha x$. Par suite,

$$\alpha(x-y) \leq f'(x) - f'(y) \leq L(x-y).$$

On en déduit aussitôt que : $\alpha \leq L$.

5. La fonction g' est convexe, sa courbe est alors au dessus de ses tangentes, en particulier, elle est au dessus de sa tangente en 0. En effet, soit $x \in \mathbb{R}$, comme g est dérivable sur $\mathbb{R}$, le théorème des accroissements finis assure l'existence d'un réel c esntre 0 et x tel que : $g(x) = g(0) + g'(c)x$. Comme g' est croissante, on a : $xg'(c) \geq xg'(0)$ (discuter selon le signe de x pour se convaincre !).
Par conséquent,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) \geq g(0) + g'(0)x.$$

Il en résulte que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geq f(0) + f'(0)x + \alpha\frac{x^2}{2}.$$

Comme $\alpha > 0$, ona a : $f(x) \geq f(0) + f'(0)x + \alpha\dfrac{x^2}{2} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc : $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} +\infty$. La question 1 nous dit alors que f admet un minimiseur.

6. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. La fonction g' étant croissante, on a : $\big(g'(x) - g'(y)\big)(x-y) \geq 0$. Par suite, $\big[f'(x) - \alpha x - f'(y) + \alpha y\big]\big[x-y\big] \geq 0$. Ainsi, $\big[f'(x) - f'(y)\big]\big[x-y\big] - \alpha(x-y)^2 \geq 0$, d'où le résultat demandé.

7. Soient $x, y \in \mathbb{R}$, $\overline{x} = x - \tau f'(x)$ et $\overline{y} = y - \tau f'(y)$. Par application du résultat obtenu dans 2-b, on obtient

$$|\overline{x} - \overline{y}|^2 \leq |x-y|^2 - \tau(2-\tau L)(x-y)\big(f'(x) - f'(y)\big).$$

La question 6 fournit

$$|\overline{x} - \overline{y}|^2 \leq |x-y|^2 - \tau(2-\tau L)\alpha|x-y|^2.$$

Par conséquent,

$$|\overline{x} - \overline{y}|^2 \leq |x-y|^2\Big(1 - \tau\alpha(2-\tau L\Big).$$

8. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\overline{x}_n = x_n - \tau f'(x_n) = x_{n+1}$ et $\overline{y} = x_* - \tau f'(x_*) = x_*$. Notons que, comme dans 2-c, on a $\overline{y} = x_*$. Par ailleurs, il est clair que : $1 - (2 - \tau L)\tau\alpha < 1$ car $(2 - \tau L)\tau\alpha > 0$. De surcoît, on a, en vertu de la question 4, $(2 - \tau L)\tau L \leq (2 - \tau L)\tau\alpha$. Une simple étude de la fonction $x \mapsto x(2 - x)$ sur $]0, 2[$ montre que : $0 < (2 - \tau L)\tau L \leq 1$ et par suite : $0 \leq 1 - (2 - \tau L)\tau L \leq (2 - \tau L)\tau\alpha$.
En conclusion
$$0 \leq \rho := 1 - (2 - \tau L)\tau\alpha < 1.$$
D'après la question 7, on trouve immédiatement
$$|x_n+1 - x_*| \leq \rho|x_n - x_*|, \quad n \in \mathbb{N}.$$
Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on déduit le résultat prononcé.

Partie III : Convergence lente, sous des hypothèses faibles

9. On vérifie sans difficulté que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que l'on a
$$f'(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$
La fonction f' est manifestement croissante, donc f est convexe. D'autre part, $\min\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 0$ et l'ensemble des minimiseurs de f est : $\mathbb{R}_-$.

10. (a) Comme $f' \geq 0$, on a : $x_{n+1} - x_n = -\tau f'(x_n) \leq$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Montrons par récurrence que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < x_n < \frac{1}{\tau}.$$
Le résultat est clairement vrai lorsque $n = 0$, soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que l'on a : $0 < x_n < \dfrac{1}{\tau}$. Par suite, on a : $x_{n+1} = x_n - \tau x_n^2 = x_n(1 - \tau x_n)$, ou encore : $\tau x_{n+1} = \tau x_n(1 - \tau x_n)$. Par une simple étude de la fonction $t \mapsto t(1 - t)$ sur $]0, 1[$, on montre que : $0 < \tau x_n(1 - \tau x_n) \leq \dfrac{1}{4} < 1$ et donc : $0 < x_{n+1} < \dfrac{1}{\tau}$. Le résultat demandé est ainsi établi par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. En particulier, comme les termes de la suite sont strictement positifs, on a : $x_{n+1} = x_n - \tau x_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente vers une limite $l \in \mathbb{R}$. Par ailleurs, $x_{n+1} = x_n(1 - \tau x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc : $l(1 - \tau l) = 0$, ceci implique que : $l = 0$.

(c) Notons d'abord que : $1 - \tau x_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ en vertu du résultat qu'on a établi dans 10-a. En outre, La relation de récurrence vérifiée par la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fournit immédiatement l'identité : $\dfrac{1}{x_{n+1}} = \dfrac{1}{x_n} + \dfrac{\tau}{1 - \tau x_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que : $\dfrac{1}{x_{n+1}} - \dfrac{1}{x_n} \geq \tau$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{x_{k+1}} - \frac{1}{x_k}\right) \geq \sum_{k=0}^{n-1} \tau.$$

cpge-paradise.com

Par suite, $\dfrac{1}{x_n} - \dfrac{1}{x_0} \geq n\tau$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ceci est équivalent à : $x_n \leq \dfrac{x_0}{x_0 + n\tau}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, mais cette inégalité reste clairement vraie si $n = 0$, d'où le résultat.

11. On distingue plusieurs cas :
Premier cas : $x_0 \leq 0$, donc $f'(x_0) = 0$ ce qui donne : $x_1 = x_0$ et, à l'aide d'une simple récurrence, on montre que : $x_n = x_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x_0 qui est bien évidemment un minimiseur de f.
Deuxième cas : $0 < x_0 < \dfrac{1}{\tau}$. Dans ce cas, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 en vertu de 10-b, et 0 est un minimiseur de f.
Troisième cas : $x_0 = \dfrac{1}{\tau}$. Donc, $x_1 = 0$ et, à l'aide d'une simple récurrence, on montre que : $x_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 qui est un minimiseur de f.
Quatrième cas : $x_0 > \dfrac{1}{\tau}$. Dans ce cas, on a : $x_1 = x_0 - \tau x_0^2 = x_0(1 - \tau x_0)^2 < 0$. Ainsi, $x_2 = x_1$ et, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, on montre que : $x_n = x_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Là encore, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x_1 qui est un minimiseur de f.
On en déduit que, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un minimiseur de f.

12. (a) Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Par convexité de f, on a

$$\forall t \in [0,1], \quad f\big(t(y-x)+x\big) \leq f(x) + t\big(f(y) - f(x)\big).$$

Par conséquent, on a au voisinage de 0^+,

$$f(x) + t(y-x)f'(x) + o(t) \leq f(x) + t\big(f(y) - f(x)\big).$$

En divisant par $t > 0$ puis en faisant tendre t vers 0^+, on aboutit au résultat voulu.

(b) Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t)dt = \int_x^y \big(f'(t) - f'(x)\big)dt + (y-x)f'(x).$$

On distingue deux cas :
Si $y \geq x$, alors par croissance et convexité de f', on a

$$0 \leq f'(t) - f'(x) \leq L(t-x), \quad \forall t \in [x,y].$$

Par suite,

$$\int_x^y \big(f'(t) - f'(x)\big)dt \leq L\left[\frac{(t-x)^2}{2}\right]_x^y$$

et donc

$$f(y) - f(x) \leq (y-x)f'(x) + \frac{L}{2}(y-x)^2.$$

Si $y \leq x$, alors

$$\int_x^y \big(f'(t) - f'(x)\big)dt = \int_y^x \big(f'(x) - f'(t)\big)dt.$$

En raisonnant identiquement au cas précédent, on obtient le résultat demandé.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$, rappelons-nous que : $x_{n+1} = x_n - \tau f'(x_n)$. L'inégalité établie dans la question précédente fournit

$$\begin{aligned} f(x_{n+1}) &\leq f(x_n) + (x_{n+1} - x_n)f'(x_n) + \frac{L}{2}(x_{n+1} - x_n)^2 \\ &\leq f(x_n) - \tau|f'(x_n)|^2 + \frac{L}{2}\tau^2|f'(x_n)|^2 \\ &\leq f(x_n) - \frac{\tau}{2}(2 - L\tau)|f'(x_n)|^2. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$f(x_{n+1}) - f(x_n) \leq -\frac{\tau}{2}(2 - L\tau)|f'(x_n)|^2 \leq 0,$$

la suite $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors décroissante.

13. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme x_* est un minimiseur de f, on a : $f(x) \geq f(x_*)$, ceci, combiné avec la question 12-a, fournit
$$0 \leq f(x) - f(x_*) \leq f'(x)(x - x_*).$$
En particulier, $f'(x)(x - x_*) \geq 0$ donc : $f'(x)(x - x_*) = |f'(x)||x - x_*|$, d'où le résultat.

14. Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $x_* \neq x_0$. La question précédente fournit
$$0 \leq \big|f(x_n) - f(x_*)\big|^2 \leq |x_n - x_*|^2|f'(x_n)|^2.$$
Grâce à 2-c, on obtient
$$0 \leq \big|f(x_n) - f(x_*)\big|^2 \leq |x_0 - x_*|^2|f'(x_n)|^2.$$
Par suite,
$$|f'(x_n)|^2 \geq \frac{\big|f(x_n) - f(x_*)\big|^2}{|x_0 - x_*|^2},$$
comme $-\dfrac{\tau}{2}(2 - L\tau) \leq 0$, le résultat escompté découle immédiatement de la question 12-c.

15. Montrons que :
$$(*) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \big(1 + na_0c\big)a_n \leq a_0.$$
L'inégalité $(*)$ est clairement vraie si $n = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que : $\big(1 + na_0c\big)a_n \leq a_0$ et montrons que : $\big(1 + (n+1)a_0c\big)a_{n+1} \leq a_0$. On a
$$\begin{aligned} \big(1 + (n+1)a_0c\big)a_{n+1} &\leq \big(1 + na_0c + a_0c\big)a_n(1 - ca_n) \\ &\leq a_0(1 - ca_n) + a_0ca_n(1 - ca_n) \\ &\leq a_0(1 - c^2a_n^2) \\ &\leq 1. \end{aligned}$$
L'inégalité $(*)$ est donc établie et le résultat voulu en découle immédiatement.

16. Comme x_* est un minimiseur de f, $a_n = f(x_n) - f(x_*) \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Si $x_0 = x_*$, alors, comme on l'a déja vu, $f'(x_*) = 0$ et donc $x_1 = x_0$. On déduit, par récurrence, que $x_n = x_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, cela montre que : $f(x_n) = f(x_*) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x_*)$.

cpge-paradise.com

Supposons maintenant que $x_0 \neq x_*$. D'après la question 14 on a : $a_{n+1} \leq a_n - ca_n^2$ avec $c = \dfrac{\tau(2-\tau L)}{2|x_0 - x_*|^2}$. La question précédente montre alors que $0 \leq a_n \leq \dfrac{a_0}{1+nca_0}$, cela implique que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et donc : $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x_*)$.

17. La question 12-c fournit

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{\tau}{2}(2-\tau L)|f'(x_k)|^2 \leq f(x_k) - f(x_{k+1}).$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, en sommant la dernière inégalité entre 0 et $n-1$, on obtient l'inégalité prononcée. D'autre part, on a : $f(x_0) - f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x_0) - f(x_*)$, en particulier, la suite $\big(f(x_0) - f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Comme $\frac{\tau}{2}(2-\tau L) > 0$, on conclut que la somme partielle de la série à termes positifs $\sum_{i\geq 0} |f'(x_i)|^2$ est majorée et donc la série $\sum_{i\geq 0} |f'(x_i)|^2$ converge, cela implique que $|f'(x_n)|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit que : $f'(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

18. (a) La suite $\big(|x_n - x_*|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante en vertu de 2-c et donc : $|x_n - x_*| \leq |x_0 - x_*|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_n| \leq |x_0 - x_*| + |x_*|.$$

Cela montre que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et le résultat demandé est alors une application directe du théorème de Bolzano-Weierstrass.

(b) On a : $x_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_{**}$. Par continuité de f', on obtient : $f'(x_{\varphi(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f'(x_{**})$. Comme $(f'(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, la sous-suite $(f'(x_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et par suite : $f'(x_{**}) = 0$.

(c) La question 13 fournit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq f(x_{\varphi(n)}) - f(x_*) \leq |x_{\varphi(n)} - x_*||f'(x_{\varphi(n)})|,$$

en faisant tendre n vers $+\infty$ et en gardant en mémoire la question précédente ainsi que la continuité de f, on obtient

$$f(x_{**}) = f(x_*).$$

On en déduit que x_{**} est un minimiseur de f. Ceci, tenant compte de 2-c, montre que la suite $\big(|x_n - x_{**}|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, comme elle est minorée par 0, elle converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$. Par ailleurs, on sait que : $|x_{\varphi(n)} - x_{**}| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit que $l = 0$ et donc $|x_n - x_{**}| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Partie IV : Descente de gradient proximale

19. Comme x_* est un minimiseur de f, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{x_0}(x) \geq \tau f(x_*) + \frac{1}{2}|x - x_0|^2.$$

Il s'ensuit que $F_{x_0} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} +\infty$. De surcroît, F_{x_0} est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions continues. Par application de 1-b, on déduit que F_{x_0} admet un minimiseur, montrons qu'il est unique. Supposons que F_{x_0} admet plus qu'un minimiseur, ceci nous permet de choisir deux minimiseurs x_1 et x_2 distincts.
Soulignons aussi que l'on a, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2) \quad \text{et} \quad (x+y)^2 = 2(x^2+y^2) \Leftrightarrow x = y.$$

Comme x_1 et x_2 sont distincts, il en est de même pour $\dfrac{x_1-x_0}{2}$ et $\dfrac{x_2-x_0}{2}$.
Par conséquent,

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{2}(x_1+x_2) - x_0\right|^2 &= \left|\frac{x_1-x_0}{2} + \frac{x_2-x_0}{2}\right|^2 \\ &< \frac{1}{2}|x_1-x_0|^2 + \frac{1}{2}|x_2-x_0|^2. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$F_{x_0}\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{1}{2}F_{x_0}(x_1) + \frac{1}{2}F_{x_0}(x_2).$$

D'autre part, $F_{x_0}(x_1) = F_{x_0}(x_2)$, donc

$$F_{x_0}\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < F_{x_0}(x_1),$$

ceci est absurde car x_1 est un minimiseur de F_{x_0}. On conclut que F_{x_0} admet un unique minimiseur.

20. On suppose que $x_0 \in \mathbb{R}$ est un minimiseur de f, alors on a : $F_{x_0}(x) \geq F_{x_0}(x_0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par suite, x_0 est un minimiseur de F_{x_0} et donc nécessairement : $x_0 = p_f(x_0)$ en raison de la question précédente.
Réciproquement, supposons que $x_0 = p_f(x_0)$. Ainsi, $F_{x_0}(x) \geq \tau f(x_0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On en déduit que, pour tous $t \in [0,1]$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \tau f(x_0) &\leq \tau f\big((1-t)x_0 + tx\big) + \frac{1}{2}|t(x-x_0)|^2 \\ &\leq \tau(1-t)f(x_0) + \tau t f(x) + \frac{t^2}{2}|x-x_0|^2 \quad (\text{ f est convexe}). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que, pour tous $t \in [0,1]$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$t\tau f(x_0) \leq \tau t f(x) + \frac{t^2}{2}|x-x_0|^2,$$

en divisant les deux membres de cette dernière inégalité par $t \in]0,1]$, puis en faisant tendre t vers 0^+, on trouve que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x_0) \leq f(x),$$

ceci confirme que x_0 est un minimiseur de f.

cpge-paradise.com

21. Comme f est dérivable, il est de même pour F_{x_0}. D'autre part, $x_1 \in \mathbb{R}$ est un minimiseur de F_{x_0} qui est trivialement un point intérieure à $\mathbb{R}$. Par conséquent, $F'_{x_0}(x_1) = 0$. Il en découle que : $x_1 = x_0 - \tau f'(x_1)$.

22. (a) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On a

$$F_{x_0}(x) = \begin{cases} \tau x + \frac{1}{2}(x - x_0)^2, & \text{si } x \geq 0, \\ -\tau x + \frac{1}{2}(x - x_0)^2, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On en déduit que

$$F'_{x_0}(x) = \begin{cases} \tau + x - x_0, & \text{si } x > 0, \\ -\tau + x - x_0, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Premier cas : Si $x_0 \geq \tau$, alors $F'_{x_0} \leq 0$ sur $]-\infty, 0[$ et donc F_{x_0} est décroissante sur $]-\infty, 0[$. D'autre part, lorsque $x > 0$, F'_{x_0} s'annule en $x_0 - \tau$ et par suite F_{x_0} admet un minimum sur $\mathbb{R}_+^*$ atteint en $x_0 - \tau$. Comme $F_{x_0} \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et que $F_{x_0}(0) = \dfrac{x_0^2}{2} \geq F_{x_0}(x_0 - \tau)$, on déduit que $p_f(x_0) = x_0 - \tau$ est l'unique minimiseur deF_{x_0}.

Deuxième cas : Lorsque $x_0 \leq \tau$, une étude similaire au premier cas montre que $p_f(x_0) = x_0 + \tau$ est l'unique minimiseur deF_{x_0}.

Troisième cas : Lorsque $x_0 \in [-\tau, \tau]$, la fonction F_{x_0} est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et donc son unique minimiseur est $p_f(x_0) = 0$.

D'où le résultat demandé.

(b) Distinguons trois cas possibles :

Premier cas : Si $-\tau \leq x_0 \leq \tau$, alors $x_1 = p_f(x_0) = 0$ et donc, par récurrence simple, : $x_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Cela implique que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Deuxième cas : Si $x_0 \geq \tau$, écrivons :

$$x_0 = N\tau + r, \quad N \in \mathbb{N}^*, r \in [0, \tau[.$$

Par suite, $x_1 = (N-1)\tau + r$, $x_2 = (N-2)\tau + r$,..., $x_N = r$. D'où, $x_{N+1} = 0$ et, par une récurrencce immédiate : $x_n = 0$ pour tout $n \geq N+1$, là aussi la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Troisième cas : Si $x_0 \leq -\tau$, on peut écrire

$$x_0 = -k\tau + \mu, \quad k \in \mathbb{N}^*, \mu \in]-\tau, 0].$$

On a : $x_1 = -\tau(k-1) + \mu$, $x_2 = -\tau(k-2) + \mu$, donc : $x_k = \mu$, $x_{k+1} = 0$, ceci donne : $x_n = 0$ pour tout $n \geq k+1$ et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers 0.

23. On sait que : $x_1 = p_f(x_0)$ est un minimiseur de F_{x_0}, par suite : $F_{x_0}(x_1) \leq F_{x_0}(x_0)$, d'où l'inégalité voulue.

Notons que l'inégalité qu'on vient de prouver est vraie pour x_0 quelconque et $x_1 = p_f(x_0)$, soit alors $n \in \mathbb{N}^*$ et choisissons $x_{n-1} \in \mathbb{R}$ au lieu de x_0, donc, dans ce cas : $x_1 = p_f(x_{n-1}) = x_n$ et la nouvelle inégalité devient

$$\frac{1}{2}|x_n - x_{n-1}|^2 \leq \tau\big(f(x_{n-1}) - f(x_n)\big).$$

Soient maintenant $N > M \geq 0$ deux entiers, en sommant entre $M+1$ et N l'inégalité précédente, on obtient

$$\frac{1}{2}\sum_{n=M+1}^{N}|x_n - x_{n-1}|^2 \leq \tau\big(f(x_M) - f(x_N)\big).$$

Rappelons-nous que f admet, par hypothèse, un minimiseur x_* et donc, on a

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}|x_n - x_{n-1}|^2 \leq \tau\big(f(x_0) - f(x_*)\big).$$

Il s'ensuit que la suite des sommes partielles de la série à termes positifs : $\sum_{n\geq 1}|x_n - x_{n-1}|^2$ est majorée, ceci confirme bien que la série $\sum_{n\geq 1}|x_n - x_{n-1}|^2$ est convergente. Il vient aussitôt que : $|x_n - x_{n-1}|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où le résultat escompté.

24. Soient $N, M \in \mathbb{N}$, l'inégalité à prouver est triviale si $N = M$, supposons alors que M et N sont distincts. On peut également supposer, sans perte de généralité, que $N > M \geq 0$. On a

$$\big|x_N - x_M\big| = \left|\sum_{n=M+1}^{N}(x_n - x_{n-1}\right| \leq \sum_{n=M+1}^{N}\big|x_n - x_{n-1}\big|.$$

Par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\big|x_N - x_M\big| \leq \sqrt{|N-M|}.\sqrt{\sum_{n=M+1}^{N}\big|x_n - x_{n-1}\big|^2}.$$

Par conséquent, le résultat demandé découle immédiatement de la majoration établie dans la question précédente.

25. Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait que : $\overline{x} = p_f(x)$ est un minimiseur de F_x et par suite

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall v \in \mathbb{R}, \quad F_x(\overline{x}) \leq F_x(\overline{x} + tv).$$

D'où l'on a

$$(1) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall v \in \mathbb{R}, \quad \tau f(\overline{x}) + \frac{1}{2}|\overline{x} - x|^2 \leq \tau f(\overline{x} + tv) + \frac{1}{2}|\overline{x} + tv - x|^2.$$

Maintenant, on maintient $t, v \in \mathbb{R}$ et on réecrit l'inégalité précédente avec y au lieu de x et $\overline{y}$ à la place de $\overline{x}$, obtient

$$(2) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall v \in \mathbb{R}, \quad \tau f(\overline{y}) + \frac{1}{2}|\overline{y} - y|^2 \leq \tau f(\overline{y} + tv) + \frac{1}{2}|\overline{y} + tv - y|^2.$$

En sommant (1) et (2) on obtient l'inégalité demandée.

26. Appelons $g(t)$, $t \in \mathbb{R}$, le membre de droite dans l'inégalité (6). la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc elle admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 qui s'écrit : $g(t) = g(0) + g'(0)t + o(t)$. Pour conclure, il suffit de remarquer que : $g(0) = 0$ et $g'(0) = 2(\overline{x} + \overline{y} - x - y)$.

cpge-paradise.com

27. Soient $x, y \in \mathbb{R}$, $t \in [0,1]$. Posons $v = \overline{y} - \overline{x}$ et notons par H le membre de gauche dans l'inégalité (6). En utilisant la convexité de la fonction f, on obtient

$$\begin{aligned} H &= f(\overline{x}) + f(\overline{y}) - f\big(t\overline{y} + (1-t)\overline{x}\big) - f\big(t\overline{x} + (1-t)\overline{y}\big) \\ &\geq f(\overline{x}) + f(\overline{y}) - tf(\overline{y}) - (1-t)f(\overline{x}) - tf(\overline{x}) - (1-t)f(\overline{y}) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Par suite, le membre de droite de l'inégalité (6) est positif, en particulier, pour t assez petit, on a

$$2tv(\overline{x} - \overline{y} + y - x) + o(t) = 2t(\overline{y} - \overline{x})(\overline{x} - \overline{y} + y - x) + o(t) \geq 0,$$

en divisant cette dernière inégalité par $t > 0$ puis en faisant tendre t vers 0^+, on aboutit au résultat recherché.

28. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente, on a

$$\big|p_f(x) - p_f(y)\big|\Big(\big|p_f(x) - p_f(y)\big| - \big|x - y\big|\Big) \leq 0.$$

Comme $\big|p_f(x) - p_f(y)\big| \geq 0$, on obtient

$$\big|p_f(x) - p_f(y)\big| \leq \big|x - y\big|.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme x_* est un minimiseur de f, il vient par la question 20 que : $p_f(x_*) = x_*$. Par ailleurs, p_f est 1-Lipschitzienne et donc

$$\big|x_{n+1} - x_*\big| = \big|p_f(x_n) - p_f(x_*)\big| \leq \big|x_n - x_*\big|.$$

On en déduit que la suite $\Big(|x_n - x_*|\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

29. Par la question 23, on a : $\big|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\big| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Comme $x_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a : $x_{\varphi(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
D'autre part, $x_{\varphi(n+1)} = p_f(x_{\varphi(n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc en faisant tendre n vers $+\infty$ et en remarquant que p_f est continue sur $\mathbb{R}$ car elle est 1-Lipschitzienne en vertu de la question précédente, on obtient : $p_f(x_{**}) = x_{**}$.

30. Comme $p_f(x_{**}) = x_{**}$, x_{**} est un minimiseur de f en vertu de la question 20. Par ailleurs, par application de la question 28, on voit que la suite $\Big(|x_n - x_{**}|\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, comme elle est minorée par 0, elle converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$. D'un autre côté, $|x_\varphi(n) - x_{**}| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et par conséquant, $l = 0$. On conclut que : $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_{**}$.

Partie V : Optimisation sur la boule unité

31. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^d$, en particulier sur la boule unité fermée C, comme C est un fermé borné de $\mathbb{R}^d$ qui est de dimension finie, f est bornée sur C et y atteint ses bornes. On en déduit que f admet un minimiseur sur C.

32. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur C, elle admet un minimum x_* sur C, de plus, x_* est un point intérieur à C car la boule unité ouverte est un voisonage ouvert de x_* dans C. Il s'ensuit que : $\nabla f(x_*) = 0$.

33. (a) L'inégalité de Cauchy-Schwarz fournit : $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$ et donc : $|\langle x, y\rangle| \leq 1$. Par suite, $\langle x, v\rangle = 1 - \langle x, y\rangle \geq 0$ et $\langle y, v\rangle = \langle x, y\rangle - 1 \leq 0$. Il reste à montrer que : $\langle x, y\rangle < 1$, mais si ce n'est pas le cas, alors : $\langle x, y\rangle = 1$. On est alors dans le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz qui impose que $y = \alpha x$ pur un certain $\alpha \in \mathbb{R}$. Cependant, x et y sont unitaires et donc : $\alpha = -1$ car $x \neq y$. Ceci est absurde car on aurait : $1 = \langle x, -x\rangle = -1$. En conclusion, on a $\langle x, y\rangle < 1$ d'où : $\langle x, v\rangle > 0$ et $\langle y, v\rangle < 0$.

(b) Supposons que (7) n'est pas satisfaite, donc : $\nabla f(x_*) \neq -\lambda x_*$ pour tout $\lambda \geq 0$. En particulier, $\nabla f(x_*) \neq 0$, de surcroît, les vecteurs : $-x_*$ et $\dfrac{\nabla f(x_*)}{\|\nabla f(x_*)\|}$ sont unitaires et disticnts. Par la question précédente, il existe $v \in \mathbb{R}^d$ tel que

$$\left\langle \frac{\nabla f(x_*)}{\|\nabla f(x_*)\|}, v \right\rangle > 0 \quad \text{et} \quad \langle v, -x_*\rangle < 0.$$

Par conséquent,

$$\left\langle \frac{\nabla f(x_*)}{\|\nabla f(x_*)\|}, v \right\rangle > 0 \quad \text{et} \quad \langle v, x_*\rangle > 0.$$

Posons : $h(t) = f(x_* - tv)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, par composition h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donc elle admet un développement limité au voisisnage de 0 qui s'écrit

$$(**) \qquad h(t) = f(x_*) - t\langle \nabla f(x_* - tv), v\rangle + o(t).$$

Par ailleurs,

$$\|x_* - tv\|^2 = \|x\|^2 + t^2\|v\|^2 - 2t\langle x_*, v\rangle.$$

Ainsi,

$$\|x_* - tv\|^2 - 1 = t\big(t\|v\|^2 - 2\langle x_*, v\rangle\big),$$

comme $t\|v\|^2 - 2\langle x_*, v\rangle \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} -2\langle v, u\rangle < 0$, on a : $\|x_* - tv\|^2 - 1 \leq 0$ au voisinage de 0^+ et par suite,

$$x_* - tv \in C, \quad t \to 0^+,$$

ceci, combiné avec $(**)$ ainsi que la question 31, fournit

$$-t\langle \nabla f(x_* - tv), v\rangle + o(t) \geq 0.$$

En divisant la dernière inégalité par $t > 0$ puis en faisant tendre t vers 0^+, on obtient :

$$\langle \nabla f(x_*), v\rangle \leq 0$$

ce qui est manifestement absurde. L'dentité (7) est alors établie.

34. Soin $h \in \mathbb{R}^d$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$f(x+h) = f(x) - (h, Mx) + f(h).$$

En posant : $h = (h_1, ..., h_d)^T$, on obtient :

$$f(h) = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} M_{,ij}h_ih_j.$$

Notons : $m = \max\limits_{1\leq i,j\leq d}|M_{i,j}|$, alors, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|f(h)| \leq \frac{m}{2}\left(\sum_{i=1}^{d}|h_i|\right)^2 \leq \frac{md}{2}\|h\|^2.$$

On en tire que, lorsque $h \longrightarrow 0$, $f(h) = o(\|h\|)$. Comme $h \mapsto -\langle Mx, h)\rangle$ est linéaire, on conclut que : $\nabla f(x) = -Mx$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

35. La matrice M est, par hypothése, symétrique positive, donc ses valeurs propres sont positives.

Comme f est polynomiale sur $\mathbb{R}^d$, elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^d$. Par conséquent, si elle admet un minimiseur x_* tel que $\|x_*\| < 1$, c'est à dire que x_* est intérieur à C, alors : $\nabla f(x_*) = -Mx_* = 0$. Par suite, $f(x_*) = 0$ et donc : $0 = f(x_*) \leq f(x) \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Ceci implique que f est nulle donc M est la matrice nulle : en effet, comme M est diagonalisable, il suffit de montrer que toutes ses valeurs propres sont nulles. Soit alors λ une valeur propre de M et v un vecteur propre unitaire associé alors : $f(v) = -\dfrac{1}{2}\lambda = 0$ ceui montre que $\lambda = 0$. Il en résulte que si f admet un minimiseur x_*, il est nécessairement unitaire.

Notons : $\lambda_1 \leq ... \leq \lambda_d$ les valeurs propres de M et soit $(v_1, ..., v_d)$ une base orthonormale de vecteurs propres de M telle que : $Mv_j = \lambda_j v_j$ pour tout $j \in \{1, ..., d\}$. Soit $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_iv_i$ un vecteur unitaire, un calcul routinier fournit

$$f(x) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} x_i^2\lambda_i \geq -\frac{1}{2}\lambda_d.$$

D'autre part, tout vecteur propre u de M unitaire associé à la plus grande valeur propre λ_d vérifie : $f(u) = -\dfrac{1}{2}\lambda_d$. On conclut que l'ensemble des minimiseurs de f est

$$\mathrm{E}_{\lambda_d}(M) \cap \left\{x \in \mathbb{R}^d : \quad \|x\| = 1\right\},$$

où $\mathrm{E}_{\lambda_d}(M)$ est le sous espace propre de M associé à la plus grande valeur propre λ_d.

36. (a) On va montrer cette identité par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Cependant, on va prouver d'abord

$$(\blacksquare) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d, \|x\| \geq 1 \Longrightarrow \|(I_d + \tau M)x\| > 1.$$

cpge-paradise.com

Soit $x=(x_1,...,x_d)\in\mathbb{R}^d$ tel que : $\|x\|\geq 1$ et fixons une base orthonormale formée de vecteurs propres $(v_1,...,v_d)$ de M telle que : $Mv_i=\lambda_i v_i$ où λ_i est une valeur propre de M pour $i=1,..,d$. On a

$$(I_d+\tau M)x=\sum_{i=1}^{d}x_i(1+\tau\lambda_i)v_i.$$

Comme les valeurs propres de M sont positives et non tous nulles, on a

$$\|(I_d+\tau M)x\|^2=\sum_{i=1}^{d}x_i^2(1+\tau\lambda_i)^2>\sum_{i=1}^{d}x_i^2.$$

Par suite, $\|(I_d+\tau M)x\|^2>\|x\|^2\geq 1$, d'où l'identité ($\blacksquare$).
Observons que $x_{n+1}=P_C\big((I_d+\tau M)x_n\big)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et montrons maintenant que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad x_n=\frac{(I_d+\tau M)^n x_0}{\|(I_d+\tau M)^n x_0\|}.$$

Pour $n=1$, comme $\|x_0\|\geq 1$, on a d'après ($\blacksquare$) : $\|(I_d+\tau M)x_0\|>1$, par suite

$$x_1=\frac{(I_d+\tau M)x_0}{\|(I_d+\tau M)x_0\|}.$$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, supposons acquise l'expression de x_n et montrons que

$$x_{n+1}=\frac{(I_d+\tau M)^{n+1}x_0}{\|(I_d+\tau M)^{n+1}x_0\|}.$$

Il est clair que x_n est un vecteur unitaire. D'après ($\blacksquare$), on a :$\|(I_d+\tau M)x_n\|>1$, d'où l'on a

$$x_{n+1}=\frac{(I_d+\tau M)x_n}{\|(I_d+\tau M)x_n\|}=\frac{(I_d+\tau M)^{n+1}x_0}{\|(I_d+\tau M)^{n+1}x_0\|}.$$

(b) Ecrivons

$$x_0=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i$$

où $(v_1,...,v_n)$ est une base orthonormale formée de vecteurs propres de M telle que : $Mv_i=\lambda_i v_i$ où λ_i est une valeur propre de M pour $i=1,..,d$. Notons I le sous-ensemble de $\{1,...,d\}$ formé des indices i pour lesquels $\alpha_i\neq 0$. Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$x_n=\sum_{i\in I}\beta_{i,n}v_i$$

où

$$\beta_{i,n}=\frac{\alpha_i(1+\tau\lambda_i)^n}{\sqrt{\sum_{j\in I}\alpha_j^2(1+\tau\lambda_j)^{2n}}},\quad i\in I.$$

Par ailleurs, si I' est le sous-ensemble de I formé des indices $i\in I$ tels que : $\lambda_i=\lambda_{\max}$ où $\lambda_{\max}$ est la plus grande valeur propre de M, alors, pour tout $i\in I$, on a

$$\beta_{i,n}=\frac{\alpha_i}{\sqrt{\sum_{j\in I}\alpha_j^2\frac{(1+\tau\lambda_j)^{2n}}{(1+\tau\lambda_i)^{2n}}}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\begin{cases}0, & \text{si } i\notin I'\\ \dfrac{\alpha_i}{\sqrt{\sum_{j\in I}\alpha_j^2}}, & \text{si } i\in I'.\end{cases}$$

cpge-paradise.com

On conclut que
$$x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{i\in I'} \beta_{i,n} v_i.$$

37. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut rester dans la boule unité ouverte, sinon, dès qu'un terme de la suite atteint la sphère unité ou sort de la boule unité fermée, tous les termes suivants restent sur la sphère unité d'après (■) (36-a).
Illustrons ceci par deux exmples :
Exemple 1 : Supposons que la matrice M est, de plus, non inversible et fixons un vecteur non nul $x_0 \in \ker(M)$ tel que : $\|x_0\| < 1$. On a alors : $x_1 = P_C(x_0 + \tau M x_0) = x_0$. Par récurrence, on obtient : $x_n = x_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers x_0 et tous ces termes sont piégés dans la boule unité ouverte.
Exemple 2 : Soit λ une valeur propre strictement positive de M et v un vecteur propre unitaire associé à λ, posons : $x_0 = \dfrac{1}{2}v$. Par suite, $\|x_0\| = \dfrac{1}{2} < 1$ et $x_1 = P_C(x_0 + \lambda\tau x_0)$. Comme $\|(1+\lambda\tau)x_0\| = \dfrac{1+\lambda\tau}{2}$, le choix de : $\tau > \dfrac{1}{\lambda}$ fait que : $\|(1+\lambda\tau)x_0\| > 1$ et par suite : $x_1 = \dfrac{(1+\lambda\tau)x_0}{\|(1+\lambda\tau)x_0\|} = 2x_0$, le vecteur x_1 est mnifestement unitaire. Par application de (■), les termes de la suite, à l'exception de la donnée initiale, sont alors tous situés sur la sphère unité.

38. Notons par v_d un vecteur propre associé à la plus grande valeur propre λ_d et considérons l'hyperplan $H = \langle v_d\rangle^T$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d \setminus H$, alors on distingue deux cas :
Premier cas : $\|x_0\| \geq 1$ donc, par la question 36, la suite (x_n) converge vers un vecteur de $\mathrm{E}_{\lambda_d}(M)$, comme les x_n sont sur la sphère unité fermée, par continuité de la norme, la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un vecteur unitaire. On conclut, par la question 35, que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un minimiseur de f.
Deuxième cas : $\|x_0\| < 1$, dans ce cas on a la décomposition
$$x_0 = \alpha_d x_d + a, \quad \alpha_d \in \mathbb{R}^*, a \in H.$$
Par ailleurs,
$$\langle (I_d + \tau M)a, v_d\rangle = \tau\langle a, M v_d\rangle = \tau\lambda_d\langle a, v_d\rangle = 0.$$
Par conséquent, $(I_d + \tau M)^n a \in H$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En outre, on a
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (I_d + \tau M)^n x_0 = \alpha_d(1+\tau\lambda_d)^n v_d + (I_d + \tau M)^n a.$$
Il en résulte que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|(I_d + \tau M)^n x_0\|^2 = \alpha_d^2(1+\tau\lambda_d)^{2n} + \|(I_d + \tau M)^n a\|^2 \geq \alpha_d^2(1+\tau\lambda_d)^{2n}.$$
On en déduit que : $\|(I_d + \tau M)^n x_0\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Cela prouve qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|x_N\| > 1$ et donc, l'identité de 35-a sera valabale pour $n > N$ donc, d'après 36-b et 35, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un minimiseur de f.