X/ENS Physique filière PSI, 2025
~ Phénomènes de transport, thermoélectricité et applications ~

Proposition de corrigé H. Rondin-Khouya
(manque Q19 fin, Q33 fin et Q34)

I Transport de charge et de chaleur dans un matériau métallique

A Transport de charges en régime continu

1) Dans un réseau métallique, les ions sont toujours supposés fixes et les e^- mobiles.

En effet $m_{ion,\,métallique} \simeq A \times m_p$ où A désigne le nombre de masse.

Prenons $A \simeq 50$ pour un métal.

Ainsi,
$$\frac{m_{ion,\,métallique}}{m_e} = \frac{A \times m_p}{m_e} \simeq \frac{50 \times 1{,}7 \times 10^{-27}}{9{,}1 \times 10^{-31}}$$
$$\simeq \frac{10^{-26}}{10^{-30}} \simeq 10^4$$

L'ion métallique est environ 10^4 fois plus massif qu'un e^-. On le considère donc fixe, et l'e^- très mobile peut conduire le courant.

2) Système : $\{e^-\}$

Ref : terrestre, supposé galiléen

Bilan des forces (BdF) : $\begin{cases} \vec{F}_e = -e\vec{E} & (\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)) \\ \vec{f}_v = -\frac{m}{\tau}\vec{v} \end{cases}$

$\Rightarrow$ on néglige le poids.

Le principe fondamental de la dynamique (PFD) donne :

$$m\vec{a} = \vec{F}_e + \vec{f}_v \Leftrightarrow m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{m}{\tau}\vec{v}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{\tau}\vec{v} = \frac{-e\vec{E}}{m}} \quad (1)$$

En régime permanent (RP) : $\vec{v} = \vec{cte}$.

D'où $\boxed{\vec{v} = -\frac{e\tau}{m}\vec{E}}$ donc $\|\vec{v}\| \propto \|\vec{E}\|$

Posons $\boxed{\mu \hat{=} \frac{e\tau}{m}} > 0$ tel que $\boxed{\vec{v} = -\mu\vec{E}}$

3) D'après la loi d'Ohm, $\vec{j} = \gamma_0\vec{E}$. (2)

Or $\vec{j} = \rho\vec{v}$ avec $\rho = -ne$

Soit $-ne\vec{v} = \gamma_0\vec{E} \Leftrightarrow ne\mu\vec{E} = \gamma_0\vec{E}$

Donc $\gamma_0 = ne\mu \Leftrightarrow \boxed{\gamma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}}$

4) $$R_{el} = \frac{\int_\ell \vec{E}\cdot d\vec{\ell}}{\iint_S \vec{j}\cdot d^2\vec{S}} = \frac{E\ell}{jS} = \frac{E\ell}{\gamma_0 E S} = \frac{\ell}{\gamma_0 S}$$

Or $S = \pi a^2$ donc $\boxed{R_{el} = \frac{\ell}{\pi a^2 \gamma_0}}$

B Transport de charge en régime lentement variable

5) Soit $\vec{E} = \vec{E}_0\cos(\omega t)$. Posons $\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 e^{i\omega t}$

$\underline{\vec{v}} = \underline{\vec{v}_0} e^{i\omega t}$ où $\underline{\vec{v}_0} = \vec{v}_0 e^{i\varphi}$

(1) : $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{\tau}\vec{v} = \frac{-e\vec{E}}{m}$

$\Leftrightarrow i\omega\underline{\vec{v}} + \frac{1}{\tau}\underline{\vec{v}} = -\frac{e\underline{\vec{E}}}{m}$

$\Leftrightarrow \underline{\vec{v}}(1 + i\omega\tau) = -\frac{e\tau}{m}\underline{\vec{E}} = -\mu\underline{\vec{E}}$

$\Leftrightarrow \underline{\vec{v}} = \frac{-\mu}{1+i\omega\tau}\underline{\vec{E}} \Leftrightarrow \underline{\vec{j}} = \frac{\overbrace{ne\mu}^{\gamma_0}}{1+i\omega\tau}\underline{\vec{E}}$

Donc $\underline{\vec{j}} = \underline{\gamma}(\omega)\,\underline{\vec{E}}$

où $$\boxed{\underline{\gamma}(\omega) = \frac{\gamma_0}{1+i\omega\tau}}$$

6) Éq. de Maxwell-Gauss (M.G) : $\mathrm{div}(\underline{\vec{E}}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (3)

Éq. de conservation de la charge : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\vec{j}) = 0$. (4)

$$(2),(4) \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\underline{\gamma}\underline{\vec{E}}) = 0 \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \underline{\rho}}{\partial t} + \frac{\underline{\gamma}}{\varepsilon_0}\underline{\rho} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \underline{\rho}}{\partial t} + \frac{\gamma_0}{1+i\omega\tau}\frac{\underline{\rho}}{\varepsilon_0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \underline{\rho}}{\partial t} + i\omega\tau\underbrace{\frac{\partial \underline{\rho}}{\partial t}}_{\frac{\partial^2 \underline{\rho}}{\partial t^2}} + \frac{\gamma_0}{\varepsilon_0}\underline{\rho} = 0$$

$$\Leftrightarrow \tau\frac{\partial^2 \underline{\rho}}{\partial t^2} + \frac{\partial \underline{\rho}}{\partial t} + \frac{\gamma_0}{\varepsilon_0}\underline{\rho} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 \underline{\rho}}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau}\frac{\partial \underline{\rho}}{\partial t} + \frac{\gamma_0}{\tau\varepsilon_0}\underline{\rho} = 0$$

Posons $\omega_p^2 = \frac{\gamma_0}{\tau\varepsilon_0} = \frac{ne^2\cancel{\tau}}{m\cancel{\tau}\varepsilon_0} \Leftrightarrow \boxed{\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}}}$ pulsation plasma

En prenant la partie réelle, il vient : $\boxed{\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \omega_p^2\rho = 0}$

7) Soit a le paramètre de maille : $a \sim 1\,\text{Å} = 10^{-10}$ m (4)

Pour faire simple, prenons un réseau cubique

$$\boxed{n \simeq \frac{1}{a^3} \simeq 10^{30}\ \text{m}^{-3}}$$

population de la maille : $p = 8 \times \frac{1}{8} = 1 \Rightarrow$ 1 atome dans la maille fournit 1 e^-.

Pour un conducteur comme le Cu, $\gamma_0 \simeq 6\times 10^{7}$ S.m^{-1}.

$$\Rightarrow \gamma_0 = \frac{ne^2\tau}{m} \Leftrightarrow \tau = \frac{m\gamma_0}{ne^2}$$

AN : $$\tau \simeq \frac{9{,}1\times 10^{-31} \times 6\times 10^{7}}{10^{30}\times(1{,}6\times 10^{-19})^2} \simeq \frac{10^{-30}\times 6\times 10^{7}}{10^{30}\times 2\times 10^{-38}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\tau \simeq 3\times 10^{-15}\ \text{s}}$$

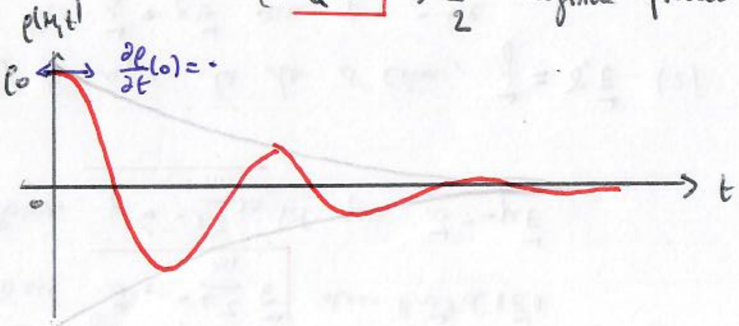
$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}} \simeq \left(\frac{10^{+30}\times 2\times 10^{-38}}{10^{-30}\times 10^{-11}}\right)^{1/2} \simeq (2\times 10^{33})^{1/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_p \simeq 10^{16}\ \text{rad.s}^{-1}}$$

8) Éq du type $\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{\omega_p}{Q}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \omega_p^2\rho = 0$

$$\Rightarrow \frac{\omega_p}{Q} = \frac{1}{\tau} \Leftrightarrow \underline{Q = \omega_p\tau} = 3\times 10^{-15}\times 10^{16}$$

$\Leftrightarrow \underline{Q \simeq 3} > \frac{1}{2}$ régime pseudo périodique



Après 3 oscillations $\rho \simeq 0$.

Si $\omega\tau \ll 1$ alors $\underline{\gamma} \simeq \gamma_0$

L'éq devient : $\frac{d\rho}{dt} + \frac{\gamma_0}{\varepsilon_0}\rho = 0 \Rightarrow \rho = \rho_0 e^{-t/\tau}$ où $\tau = \frac{\varepsilon_0}{\gamma_0}$

Avec les ODG, ρ tend très rapidement vers 0.

9) $\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}}^{0} + \mathrm{div}(\vec{j}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial j_x}{\partial x} = 0$ donc $j_x = j(r,\theta,t)\vec{e_x}$

$\vec{j} = j_x(r,\theta,x,t)\vec{e_x}$

Principe de Curie : invariance par rotation d'angle θ autour de (Ox)

D'où $\boxed{\vec{j} = j_x(r,t)\,\vec{e_x}}$

10) L'équation de Maxwell-Faraday (MF) donne :

$$\vec{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\Leftrightarrow \vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{rot}}(\vec{E})) = \vec{\mathrm{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$$ th de Schwarz

$$\Leftrightarrow \vec{\mathrm{grad}}(\underbrace{\mathrm{div}(\vec{E})}_{=0}) - \Delta\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathrm{rot}}(\vec{B})$$ éq. de Maxwell-Ampère (MA)

$$\Leftrightarrow \Delta\vec{E} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$ loi d'ohm $\vec{j} = \gamma_0\vec{E} \Leftrightarrow \vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma_0}$

$$\Leftrightarrow \Delta\vec{j} = \mu_0\gamma_0\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \underbrace{\varepsilon_0\mu_0\gamma_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{j}}{\partial t}}$$

Or $\frac{\mu_0\gamma_0}{\varepsilon_0\mu_0} = \frac{\gamma_0}{\varepsilon_0} = \frac{6\times10^7}{10^{-11}} \simeq 6\times10^{18}$ USI $\ggg 1$ USI

d'où $\left\|\mu_0\gamma_0\frac{\partial \vec{j}}{\partial t}\right\| \ggg \left\|\varepsilon_0\mu_0\gamma_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right\| = \left\|\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{j}}{\partial t}\right\|$

Finalement : $\Delta\vec{j} = \mu_0\gamma_0\frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$

$$\Rightarrow \Delta\vec{j}\cdot\vec{u_x} = \mu_0\gamma_0\frac{\partial \vec{j}}{\partial t}\cdot\vec{u_x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta j_x = \mu_0\gamma_0\frac{\partial j_x}{\partial t}}$$

On reconnait une équation de diffusion.

11) $I = \iint_S \vec{j}\cdot d^2\vec{S}$ où $d^2\vec{S} = d^2S\,\vec{u_x}$ et $\vec{j} = j_x\vec{u_x}$

$I = \iint_S j_x\, d^2S$ donc $|j_x| \times \frac{\pi a^2}{I} = |j_x| \times \frac{S}{I}$ est sans dimension tout comme $\frac{r}{a}$.

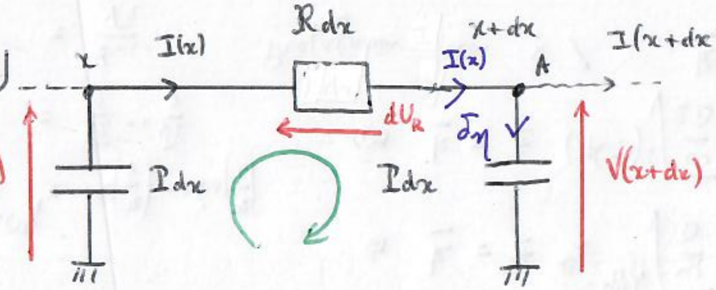
$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma_0\omega}}$: si $\omega \searrow$, $\delta \nearrow$

On observe que $|j_x| \times \frac{\pi a^2}{I}$ (= constante) $\searrow$ au fur et à mesure que $\delta \nearrow$

Donc $|j_x| \nearrow$ si $\delta \searrow$ donc si $\omega \nearrow$

$j_x(r) \propto e^{r/\delta}$ donc $R \propto e^{-r/\delta} = e^{-r\sqrt{\frac{\mu_0\gamma_0\omega}{2}}}$

12)



La loi des mailles donne : $\boxed{V(x,t) - RI(x,t)dx - V(x+dx,t) = 0}$

13) On a alors $V(x+dx,t) - V(x,t) = -RI(x,t)dx$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial V}{\partial x}(x,t) = -RI(x,t)$$

Donc $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x,t) = -R\frac{\partial I}{\partial x}(x,t)$.

Or la loi des nœuds en A donne : $I(x,t) = \delta\eta + I(x+dx,t)$

Par ailleurs, $\delta\eta = \Gamma dx \frac{\partial V}{\partial t}(x+dx,t)$. donc $\delta\eta = -\frac{\partial I}{\partial x}(x,t)dx$

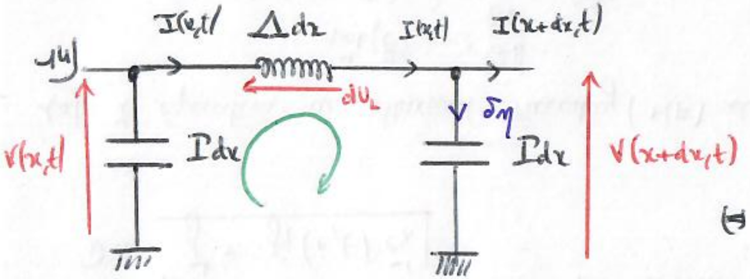
Donc $-\frac{\partial I}{\partial x}(x,t)\cancel{dx} = \Gamma \cancel{dx}\frac{\partial V}{\partial t}(x+dx,t)$

$$\Rightarrow \frac{\partial I}{\partial x} = -\Gamma\frac{\partial V}{\partial t}$$

Donc $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = R\Gamma \frac{\partial V}{\partial t} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial V}{\partial t} = D\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \text{ où } D = \frac{1}{R\Gamma}}$

$$[D] = [R\Gamma]^{-1} = \frac{[T]^{-1}}{[L^2]^{-1}} = L^2 \cdot T^{-1} \quad ✓$$

14)



LDM : $V(x,t) - \Lambda dx \frac{\partial I}{\partial t}(x,t) - V(x+dx,t) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = -\Lambda\frac{\partial I}{\partial t} \quad (\star)$$

Or d'après Q13) $\delta\eta = \Gamma\cancel{dx}\frac{\partial V}{\partial t}(x+dx,t) = -\frac{\partial I}{\partial x}(x,t)\cancel{dx}$.

$\frac{\partial}{\partial x}(\star)$: $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\Lambda \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial I}{\partial t}\right)$; $\frac{\partial I}{\partial x} = -\Gamma\frac{\partial V}{\partial t}$

th de Schwarz

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\Lambda\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\Lambda\times -\Gamma \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \text{ où } c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}}}$$

15) & 16) $\frac{\partial V}{\partial t} = D\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$

$$\Rightarrow i\omega \underline{V} = D\times -\underline{k}^2\underline{V} \Leftrightarrow \underline{k}^2 = \frac{-i\omega}{D} = \frac{e^{-i\pi/2}\omega}{D}$$

$$\Leftrightarrow \underline{k} = \pm e^{-i\pi/4}\sqrt{\frac{\omega}{D}}$$

$$e^{-i\pi/4} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt2}{2} - i\frac{\sqrt2}{2} = \frac{1-i}{\sqrt2}$$

$$\Leftrightarrow \underline{k} = \pm(1-i)\sqrt{\frac{\omega}{2D}}$$

Propagation selon $x \nearrow$: $\underline{k} = (1-i)\sqrt{\frac{\omega}{2D}}$

$$\boxed{\underline{k} = k' + ik'' \text{ où } k' = \sqrt{\frac{\omega}{2D}} \text{ et } k'' = -\sqrt{\frac{\omega}{2D}}}$$

↳ Phénomène de dispersion. $v_\varphi = \frac{d\omega}{dk'} = f(\omega)$

↳ Phénomène d'absorption. $\delta = \frac{1}{|k''|} = \sqrt{\frac{2D}{\omega}} \neq 0$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \cancel{-}\underline{k}^2\cancel{\underline{V}} = \cancel{-}\frac{\omega^2}{c^2}\cancel{\underline{V}} \Rightarrow \underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \Rightarrow \underline{k} = \pm\frac{\omega}{c}$$

Propagation $x \nearrow$: $\boxed{\underline{k} = \frac{\omega}{c}}$

↳ Pas de dispersion, pas d'absorption.

C Etude thermique

17) Corps dont la capacité thermique tend vers $+\infty$.
En d'autres termes, sa température ne varie pas si le milieu extérieur change de température.

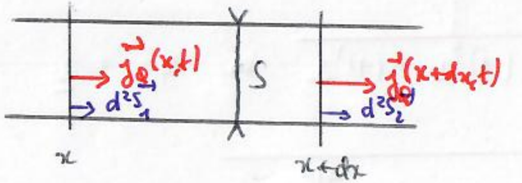
$$\boxed{C \to +\infty}$$

En l'occurrence, ici, $C \ggg c$.

18) Il ne faut pas que le gradient de température soit trop important.
La loi de Fourier donne : $\boxed{\vec{j_Q} = -\lambda\, \vec{\text{grad}}(T)}$

19) $\dfrac{\lambda}{\gamma_0} = \text{cte}$ (à température constante) $\Leftrightarrow$ $\boxed{\lambda \propto \gamma_0}$ Donc si $\gamma_0 \nearrow$ alors $\lambda \nearrow$ également.

20) Le diamant est un matériau isolant et la loi de Wiedemann-Franz ne s'applique qu'aux conducteurs.

21) 

Appliquons le 1er ppe de la thermodynamique à la barreau entre x et $x+dx$.

$$d(\delta U) = \underbrace{\delta^2 W}_{=0} + \delta^2 Q$$

(phase incompressible)

Or $\delta^2 Q = \iint_S \vec{j_Q}(x,t)\cdot d^2\vec{S_1}\, dt - \iint_S \vec{j_Q}(x+dx,t)\, d^2\vec{S_2}\, dt$

$\Leftrightarrow \delta^2 Q = j_Q(x,t) S\, dt - j_Q(x+dx,t) S\, dt$

$\Leftrightarrow \delta^2 Q = -\dfrac{\partial j_Q}{\partial x}(x,t)\, S\, dx\, dt$ $\qquad j_Q = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial x}$

$\Leftrightarrow \delta^2 Q = \lambda S \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t)\, dx\, dt$

Et $d(\delta U) = \rho S c\, dT\, dx$.

D'où $\rho \cancel{S} c\, dT\, \cancel{dx} = \lambda \cancel{S} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} \cancel{dx}\, dt$ $\qquad \div dt$

$\Leftrightarrow \rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} = \lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$$

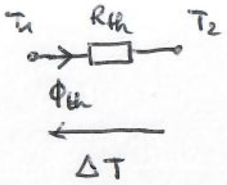
22) En RP : $\dfrac{\partial T}{\partial t} = 0$: Θ $\dfrac{d^2 T}{dx^2} = 0 \Leftrightarrow T(x) = Ax + B$.

$T(0) = T_1 \Rightarrow B = T_1$

$T(\ell) = T_2 \Rightarrow A\ell + T_1 = T_2 \Leftrightarrow A = \dfrac{T_2 - T_1}{\ell}$

Donc $\boxed{T(x) = \dfrac{T_2 - T_1}{\ell} x + T_1}$

23)



$R_{th} = \dfrac{\Delta T}{\phi_{th}} = \dfrac{T_1 - T_2}{\phi_{th}}$ (en régime permanent !!)

où $\phi_{th} = \iint_S \vec{j_Q}\cdot d\vec{S}$ (en RP).

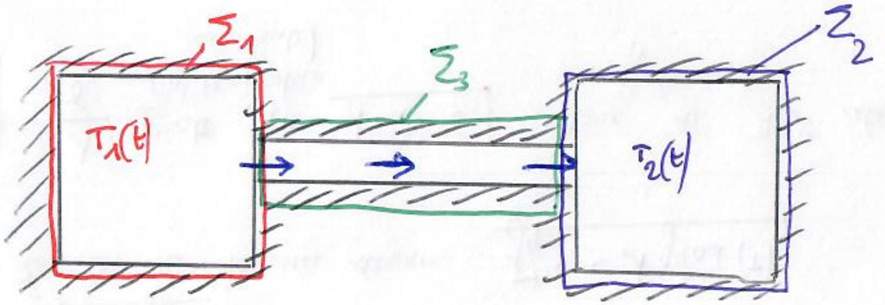
D'où $R_{th} = \dfrac{\cancel{T_1 - T_2}}{\frac{\lambda}{\ell}(\cancel{T_1 - T_2})S} \iff R_{th} = \dfrac{\ell}{\lambda S}$. Ici, $S = \pi a^2$

Soit $\boxed{R_{th} = \dfrac{\ell}{\pi a^2 \lambda}}$

24) On peut supposer que les températures $T_1(t)$ et $T_2(t)$ sont homogènes à l'échelle du barreau si la variation de température de celui-ci est bien plus courte que la variation de température de S_1 et S_2. Autrement dit :

$\boxed{\tau_{éch} \ll \tau_{therm}}$ → l'éq établie en Q21 ne change pas

25)



Isolons Σ_1

$dU_1 = C_{th}\, dT_1 = \cancel{\delta W_1}^{\,0} + \delta Q_1$

Isolons Σ_2

$dU_2 = C_{th}\, dT_2 = \delta Q_2$ — de même, $\delta W_2 = \delta W_3 = 0$

Isolons Σ_3

$dU_3 = c\, dT = \delta Q_3$

Isolons $\{\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3\}$: $dU_{tot} = 0$ (système isolé)

$\iff dU_1 + dU_2 + dU_3 = 0$

$\iff C_{th}(dT_1 + dT_2) = -c\, dT$

Par ailleurs : $C_{th}\dfrac{dT_1}{dt} = -\dfrac{\delta Q_1}{dt}\left(= \iint_S \vec{j_Q}\cdot d\vec{S} = \phi_{th}\right) < 0$ ($T_1 \searrow$)

$\iff C_{th}\dfrac{dT_1}{dt} = -\dfrac{T_1 - T_2}{R_{th}}$

$\iff \boxed{R_{th} C_{th}\dfrac{dT_1}{dt} + T_1 - T_2 = 0}$ (©)

D'autre part, $C_{th}\dfrac{dT_2}{dt} = +\dfrac{\delta Q_2}{dt} > 0$ ($T_2 \nearrow$)

$\Rightarrow C_{th}\dfrac{dT_2}{dt} = +\dfrac{T_1 - T_2}{R_{th}}$

$\Rightarrow \boxed{R_{th} C_{th}\dfrac{dT_2}{dt} + T_2 - T_1 = 0}$ (□)

On pose $\boxed{\tau = R_{th} C_{th}}$

26) $\dfrac{(©) + (□)}{2}$: $\boxed{\tau \dfrac{d\bar{T}}{dt} = 0}$

$(©) - (□)$: $\boxed{\tau \dfrac{d\Delta T}{dt} + 2\Delta T = 0}$

Donc $\bar{T} = cte \Rightarrow \boxed{T_1(t) + T_2(t) = T_{01} + T_{02}}$

$\dfrac{d\Delta T}{dt} + \dfrac{2}{\tau}\Delta T = 0 \iff \Delta T = A e^{-2t/\tau}$

$$\Delta T(0) = T_{01} - T_{02} = A$$

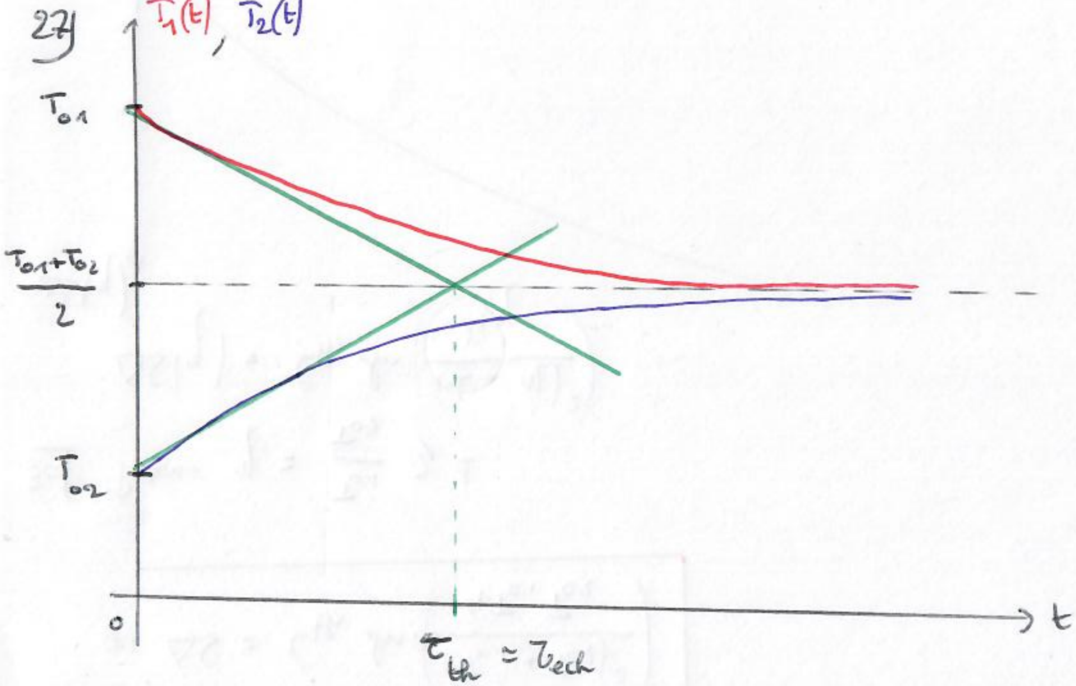
D'où $\Delta T = (T_{01} - T_{02})\, e^{-2t/\tau}$.

D'où
$$\begin{cases} T_1(t) + T_2(t) = T_{01} + T_{02} \\ T_1(t) - T_2(t) = (T_{01} - T_{02})\, e^{-2t/\tau} \end{cases}$$

Donc
$$\boxed{T_1(t) = \frac{1}{2}\left[T_{01} + T_{02} + (T_{01} - T_{02})\, e^{-2t/\tau} \right]}$$

$$\boxed{T_2(t) = \frac{1}{2}\left[T_{01} + T_{02} - (T_{01} - T_{02})\, e^{-2t/\tau} \right]}$$

27)



On voit S_1 et S_2 se thermaliser progressivement à une même température. Le couplage se fait via le barreau.

28) On avait $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

$$\Rightarrow \frac{T}{\tau_{th}} \simeq \frac{\lambda}{\rho c} \frac{T}{l^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau_{th} \simeq \frac{\rho c}{\lambda} l^2}$$

ARQS vérifiée si $\tau_{ech} \simeq \tau_{th} \ll \tau_{therm}$

Or $\tau_{therm} = \frac{\tau}{2} = \frac{R_{th} C_{th}}{2}$

Soit $\frac{\rho c}{\lambda} l^2 \ll \frac{R_{th} C_{th}}{2}$

$$\Leftrightarrow \boxed{c \ll \frac{\lambda}{2 \rho c} R_{th} C_{th} = C'}$$

29) L'identité thermodynamique s'écrit : $dU = TdS - PdV$

Les thermostats étant des phases condensées incompressibles, il vient : $dU = TdS - \cancel{PdV}^{\,0} \Leftrightarrow dU = TdS$

Par ailleurs, $dU = C_{th}\, dT$ soit $C_{th}\, dT = TdS$

$$\Leftrightarrow dS = C_{th} \frac{dT}{T}$$

Donc $\boxed{\Delta S = C_{th} \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right)}$ après intégration.

S étant extensive, il vient :

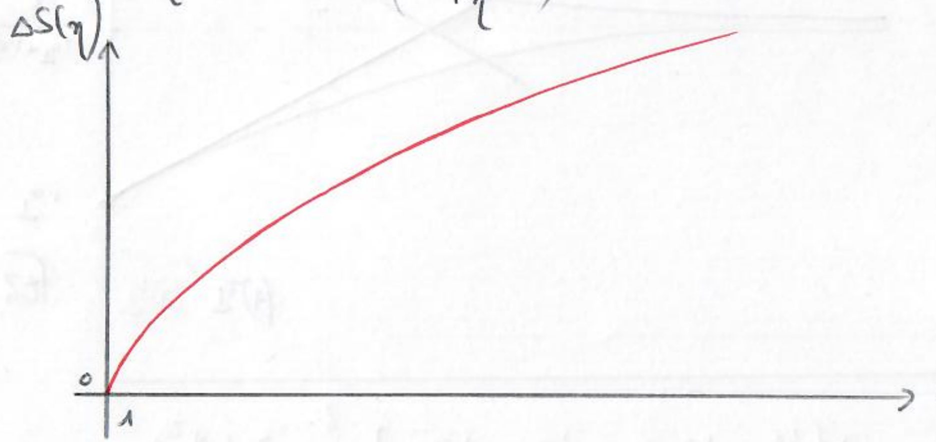
$$\Delta S = C_{th} \ln\left(\frac{T_{f,1}}{T_{i,1}}\right) + C_{th} \ln\left(\frac{T_{f,2}}{T_{i,2}}\right)$$

Donc $\Delta S = C_{th} \ln\left(\frac{\frac{T_{01}+T_{02}}{2}}{T_{01}}\right) + C_{th}\ln\left(\frac{\frac{T_{01}+T_{02}}{2}}{T_{02}}\right)$ (15)

$$\Leftrightarrow \boxed{\Delta S = C_{th}\ln\left(\frac{(T_{01}+T_{02})^2}{4T_{01}T_{02}}\right)}$$

30) Posons $\eta = \frac{T_{01}}{T_{02}} \geq 1$

$$\Delta S(\eta) = C_{th}\ln\left(\frac{(1+\eta)^2}{4\eta}\right)$$



Source d'irréversibilité, T_{01} et T_{02} qui s'éloignent drastiquement

31) On isole {tranche dx du barreau}. question difficile

Le 2nd ppe de la thermodynamique donne :

$$d(\delta S) = \delta^2 S_e + \delta^2 S_c$$

NB : l'énoncé n'est pas très rigoureux ici, $\delta^2 S_e$ est un ordre petit d'ordre 2 donc on écrit $\delta^2 S_e$ et pas δS_e

Le système est en contact en amont avec une source de température $T(x,t)$ et en aval avec une source de température $T(x+dx,t)$

(16)

Ainsi, $\delta^2 S_e = \frac{\delta Q_{amont}}{T_{amont}} + \frac{\delta Q_{aval}}{T_{aval}}$ $\delta Q_{aval} < 0$

$$\Leftrightarrow \delta^2 S_e = \frac{j_Q(x,t)Sdt}{T(x,t)} - \frac{j_Q(x+dx,t)Sdt}{T(x+dx,t)}$$

$$\Leftrightarrow \delta^2 S_e = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{j_Q(x,t)}{T(x,t)}\right) S\,dx\,dt$$

Or, $j_Q(x,t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(x,t)$ donc $\delta^2 S_e = \lambda S \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial x}\right)dx\,dt$

Or $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{T}\times\frac{\partial T}{\partial x}\right) = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{T}\right)}_{= -\frac{1}{T^2}\times\frac{\partial T}{\partial x}}\times\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{T}\underbrace{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}_{=\frac{\rho c}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial t}}$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial x}\right) = -\frac{1}{T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \cancel{\frac{\rho c}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial t}}$$

caractère négligeable de la capacité thermique du barreau

Donc $\delta^2 S_e = -\frac{\lambda S}{T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 dx\,dt$

$$\Leftrightarrow \boxed{\delta^2 S_e = f(T)\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 dx\,dt \text{ où } f : T \mapsto -\frac{\lambda \pi a^2}{T^2}}$$

32) Par ailleurs, $d(\delta S) = \frac{1}{T}d(\delta U)$ (phase incompressible)

Donc $d(\delta S) = \frac{1}{T}\cancel{\rho c S dT dx} = f(T)\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 dx\,dt + \delta^2 S_c$

caractère négligeable de la capacité thermique du barreau

Posons $\delta s_v = \dfrac{\delta^2 S_c}{d\tau}$ où $d\tau = S\,dx$ avec $S = \pi a^2$ (17)

Donc $\dfrac{\partial s_v}{\partial t} + \dfrac{f(T)}{S}\left(\dfrac{\partial T}{\partial x}\right)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \boxed{\dfrac{\partial s_v}{\partial t} = -\dfrac{f(T)}{\pi a^2}\left(\dfrac{\partial T}{\partial x}\right)^2}$$

Donc $\dfrac{\partial s_v}{\partial t} = \dfrac{\lambda}{T^2}\left(\dfrac{\partial T}{\partial x}\right)^2 > 0$

Cette variation est toujours positive, le gradient de température est source d'irréversibilité

33) On observe une oscillation de la température dans le barreau due au forçage sinusoidal des conditions limites.
De plus, on observe un déphasage au fur et à mesure que le capteur avance dans le barreau.
Enfin, les variations de température s'atténuent d'autant plus que le capteur avance dans le barreau (effet de peau)

?

34) (18)

?

D) Effets thermoélectriques

35) $\vec{j}_q = -\lambda\,\vec{\text{grad}}(T) - T\alpha\gamma\,\vec{\text{grad}}(V)$ $= \alpha\gamma\,\vec{\text{grad}}(T)$

Or $\vec{j} = -\gamma\,\vec{\text{grad}}(V) - \alpha\gamma\,\vec{\text{grad}}(T)$

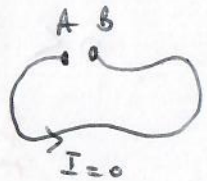
En l'absence de mouvement macroscopique de charge, $\vec{j} = \vec{0}$.

D'où $-\gamma\,\vec{\text{grad}}(V) = \alpha\gamma\,\vec{\text{grad}}(T)$

Donc $\vec{j}_q = -\lambda\,\vec{\text{grad}}(T) + T\alpha^2\gamma\,\vec{\text{grad}}(T)$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{j}_q = -\big(\underbrace{\lambda - \alpha^2\gamma T}_{= K(T)}\big)\,\vec{\text{grad}}(T)}$$

$\widehat{AB} = \ell$



36) En circuit ouvert, $\vec{j} = \vec{0}$, donc :

$$\vec{0} = -\gamma\,\vec{\text{grad}}(V) - \alpha\gamma\,\vec{\text{grad}}(T)$$

$$\Leftrightarrow 0 = -\gamma\int_A^B \underbrace{\vec{\text{grad}}(V)\cdot d\vec{\ell}}_{= dV} - \alpha\gamma\int_A^B \underbrace{\vec{\text{grad}}(T)\,d\vec{\ell}}_{= dT}$$

$$\Leftrightarrow 0 = -\cancel{\gamma}\big(V(\ell) - V(0)\big) - \alpha\cancel{\gamma}\big(T(\ell) - T(0)\big)$$

Donc $V(\ell)-V(0) + \alpha(T(\ell)-T(0)) = 0 \Leftrightarrow V(0)-V(\ell) = -\alpha(T(0)-T(\ell))$

$\Leftrightarrow \boxed{V(0)-V(\ell) = -\beta(T(0)-T(\ell))}$ où $\beta = +\alpha$

37] $\vec{j_s} = \frac{1}{T}\vec{j_Q} = -\frac{\lambda}{T}\vec{grad}(T) - \alpha\gamma\,\vec{grad}(V)$

$-\alpha\gamma\,\vec{grad}(V) = \alpha\vec{j} + \alpha^2\gamma\,\vec{grad}(T)$

Donc $\vec{j_s} = -\frac{\lambda}{T}\vec{grad}(T) + \alpha\vec{j} + \alpha^2\gamma\,\vec{grad}(T)$

$\Leftrightarrow \vec{j_s} = \alpha\vec{j} - \left(\frac{\lambda}{T} - \alpha^2\gamma\right)\vec{grad}(T)$

$\Leftrightarrow \vec{j_s} = \alpha\vec{j} - \frac{1}{T}\left(\underbrace{\lambda - \alpha^2\gamma T}_{=K \text{ (d'après Q35)}}\right)\vec{grad}(T)$

$\Leftrightarrow \boxed{\vec{j_s} = \alpha\vec{j} - \frac{K}{T}\vec{grad}(T)}$

α, le pouvoir thermoélectrique quantifie une partie de l'entropie créée. Jusqu'à présent, on avait vu que l'entropie ne dépendait que de paramètres thermodynamiques. Cependant, le couplage thermoélectrique et l'apparition de nouveaux coeff. tels que α réfute ceci.

38] $\frac{\partial s_c}{\partial t} = \vec{j_s}\cdot\left(-\frac{\vec{grad}(T)}{T}\right) + \vec{j}\cdot\left(-\frac{\vec{grad}(V)}{T}\right)$

$= \left(\alpha\vec{j} - \frac{K}{T}\vec{grad}(T)\right)\cdot\left(-\frac{\vec{grad}(T)}{T}\right) + \vec{j}\cdot\left(-\frac{\vec{grad}(V)}{T}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{\partial s_c}{\partial t} = K\left(\frac{\vec{grad}(T)}{T}\right)^2 - \frac{\alpha}{T}\vec{j}\cdot\vec{grad}(T) - \frac{1}{T}\vec{j}\cdot\vec{grad}(V)$

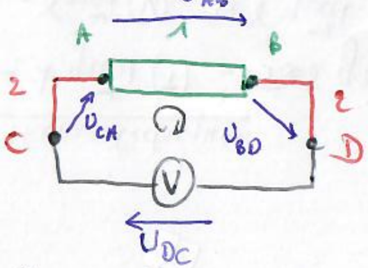
$= K\left(\frac{\vec{grad}(T)}{T}\right)^2 + \frac{\vec{j}}{\gamma T}\underbrace{\left(-\gamma\,\vec{grad}(V) - \gamma\alpha\,\vec{grad}(T)\right)}_{=\vec{j}}$

Donc $\boxed{\frac{\partial s_c}{\partial t} = K\left(\frac{\vec{grad}(T)}{T}\right)^2 + \frac{\vec{j}^2}{\gamma T}} > 0$

Les effets thermoélectriques sont irréversibles.

39] Le voltmètre ayant une impédance d'entrée quasiment ∞, le courant est quasiment nul. On peut donc se placer en circuit ouvert.

40]



$U_{CA} + U_{AB} + U_{BD} + U_{DC} = 0$ (loi des mailles (LDM) Ω)

$\Leftrightarrow V_A - V_C + V_B - V_A + V_D - V_B + V_C - V_D = 0$

$\Leftrightarrow V_C - V_A + V_A - V_B + V_B - V_D + V_D - V_C = 0$

$\Leftrightarrow -\alpha_2(T_C - T_A) - \alpha_1(T_A - T_B) - \alpha_2(T_B - T_D) + V_D - V_C = 0$ $\quad \downarrow T_D = T$

$\Leftrightarrow \alpha_2(T_A - \cancel{T_B}) - \alpha_1(\cancel{T_A - T_B}) = S_{12}(\cancel{T_A - T_B})$

$\Leftrightarrow \boxed{S_{12} = \alpha_2 - \alpha_1}$

41) Il suffit de réaliser le montage précédent, en remplaçant l'un des deux conducteurs par un matériau inconnu.

Ainsi, $\begin{cases} S_{10} = \alpha_1 - \alpha_0 \\ S_{20} = \alpha_0 - \alpha_2 \end{cases} \Rightarrow S_{10} + S_{20} = -S_{12}$

II Mesures de températures

A Mesure de température avec un conducteur ohmique

42) ρ_0 est la résistivité du matériau lorsque $\theta = 0°C$

Lorsque $\theta = 850°C$, $\begin{cases} A\theta \simeq 10^3 \times 3{,}9 \times 10^{-3} \simeq 3{,}9 \\ B\theta^2 \simeq 10^6 \times (-5{,}8 \times 10^{-7}) \simeq 0{,}6 \end{cases}$

$\frac{A\theta}{B\theta^2} \simeq \frac{3{,}9}{0{,}6} \simeq 7$ donc $A\theta \gg B\theta^2$ pour la plus haute température. On peut donc écrire en 1ère approximation que : $\boxed{\rho(\theta) \simeq \rho_0 (1 + A\theta)}$

43) $A\theta_{max} > 1 \Leftrightarrow \boxed{A > \frac{1}{\theta_{max}}}$

Lorsque $\theta \uparrow$, l'agitation thermique $\uparrow$ (les e^- sont plus mobiles et ont plus tendance à percuter les nœuds du réseau cristallin), donc la résistivité du matériau augmente.

44)

(pas de courant)

$R = R_0 + R'$

$R = \rho l / S$ par définition

> sens du courant (arbitrairement choisi)

$\boxed{R_0 = R(\theta = 0) = \frac{\rho_0 l}{S}}$

$R = R_0 + R' \Leftrightarrow R' = R - R_0 = \frac{l}{S}(\rho - \rho_0)$

Or $\rho = \rho_0 + \rho_0 A\theta$ donc $\rho - \rho_0 = \rho_0 A\theta$

$R' = \frac{\rho_0 l}{S} A\theta \Leftrightarrow \boxed{R' = R_0 A\theta}$

45) LDM$_1$: $E - R_0 i_2 - R i_2 = 0$ (1) donc $i_2 = E/(R_0+R)$

LDM$_2$: $E - R_0 i_3 - R_0 i_3 = 0$ (2) donc $2R_0 i_3 = E \Leftrightarrow R_0 i_3 = \frac{E}{2}$

LDM$_3$: $U - R_0 i_3 + R i_2 = 0$ (3)

LDN en A : $i_1 = i_2 + i_3$ (4) (inutile)

(3) : $U = + R_0 i_3 - R i_2$

$\Leftrightarrow U = +\frac{E}{2} - R i_2$

$\Leftrightarrow U = +\frac{E}{2} - \frac{ER}{R_0 + R}$

$\Leftrightarrow U = \frac{+E(R_0+R) - 2ER}{2(R_0+R)} = \frac{E(\overbrace{R_0 - R}^{=-R'})}{2(\underbrace{R_0+R}_{=2R_0+R'})}$

$\Leftrightarrow \boxed{U = -\frac{E}{2} \times \frac{R'}{R' + 2R_0}}$

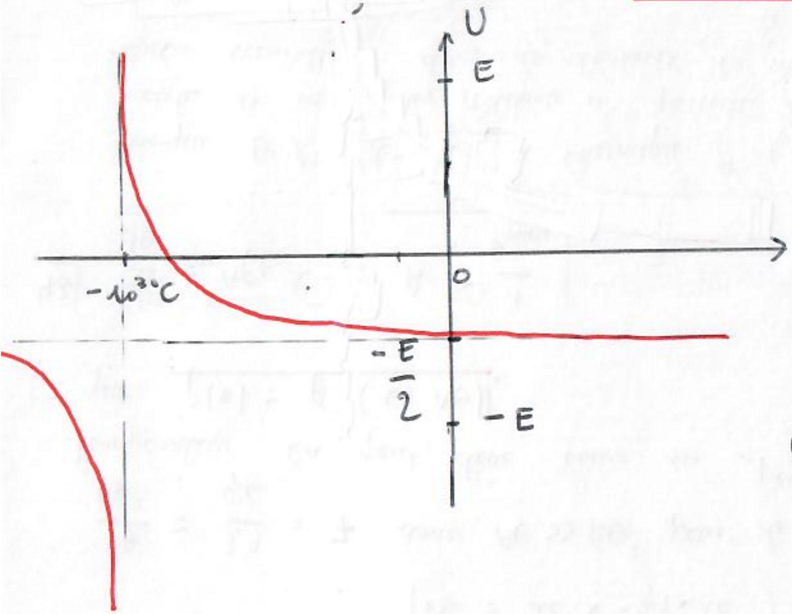
Donc $U = -\frac{E}{2} \times \frac{\cancel{R_0} A\theta}{\cancel{R_0} A\theta + 2\cancel{R_0}}$

$\Leftrightarrow \boxed{U = -\frac{E}{2} \times \frac{1}{1 + 2/A\theta}}$

23

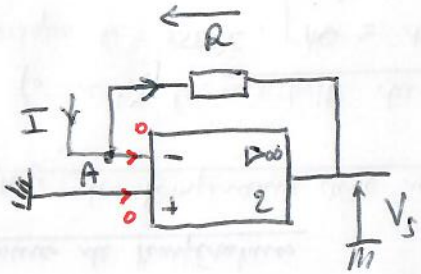
46) $\sigma_\theta = \dfrac{dU}{d\theta} = -\dfrac{E}{2} \times \dfrac{2/(A\theta)^2}{\left(1+\dfrac{2}{A\theta}\right)^2}$

Représentons $U = f(\theta)$. Le système est très peu sensible pour $\theta > 0°C$



Valeur interdite $\theta = -\dfrac{2}{A} \sim -10^3\,°C$

47)



ALI idéal en régime linéaire
↳ $V_S \leq V_{SAT}$

$\begin{cases} i_{+2} = i_{-2} = 0 \\ v_{+2} = v_{-2} = 0 \end{cases}$ (v_{+2} relié à la masse)

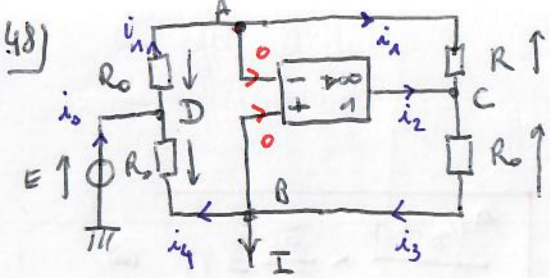
LDN en A : $I = 0 + \dfrac{V_A - V_S}{R} \Leftrightarrow \boxed{I = -V_S/R}$

$(V_A = v_- = v_+ = 0)$

L'ALI 2 est en montage inverseur. Il permet de rendre V_s proportionnel à I (mais le signe est changé)

24

48)



LDN en A en potentiel : $\dfrac{V_D - V_A}{R_0} = 0 + \dfrac{V_A - V_C}{R}$

Or $\begin{cases} V_A = v_{-1} = v_{+1} = v_{-2} = v_{+2} = 0 \\ V_D = E \end{cases}$

Donc $\dfrac{E}{R_0} = \dfrac{-V_C}{R} \Rightarrow V_C = \dfrac{-R}{R_0} E \quad (1)$

LDN en B en potentiel : $\dfrac{V_C - V_B}{R_0} = 0 + \dfrac{V_B - V_0}{R_0} + I$

$(V_B = v_{+1} = 0)$ $\Leftrightarrow \dfrac{V_C}{R_0} = \dfrac{-E}{R_0} + I$

$\Leftrightarrow V_C = -E + R_0 I \quad (2)$

(1) dans (2) donne : $-\dfrac{R}{R_0} E = -E + R_0 \times \left(\dfrac{-V_S}{R}\right)$

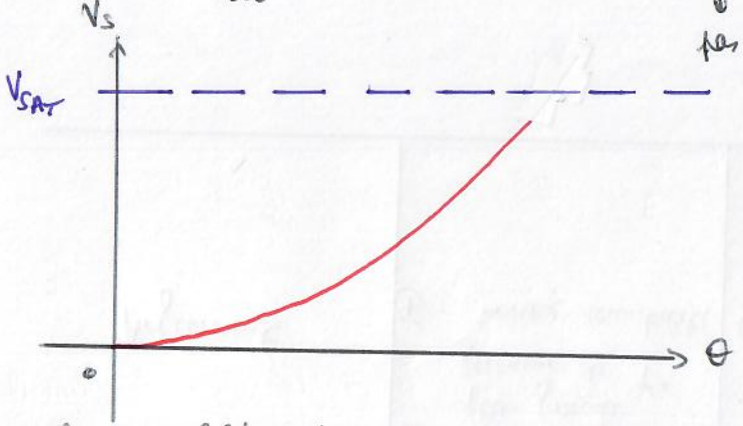
$\Leftrightarrow \dfrac{R_0}{R} V_S = E\left(\dfrac{R}{R_0} - 1\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{R_0}{\underbrace{R}_{= R_0 + R'}} V_S = E \times \dfrac{\overbrace{R - R_0}^{= R'}}{R_0}$

$\Leftrightarrow \boxed{V_S = E\,\dfrac{(R_0 + R')R'}{R_0^2}}$

Donc $V_S = E\,\dfrac{(\cancel{R_0} + \cancel{R_0}A\theta)\cancel{R_0}A\theta}{\cancel{R_0^2}} \Leftrightarrow \boxed{V_S = E(A\theta + (A\theta)^2)}$

49) $\tilde{\sigma}_\theta = \dfrac{dV_s}{d\theta} = EA + 2EA^2\theta$ (linéaire)
↓
pas de discontinuité.



La sensibilité est bien plus importante, avec un profil quadratique.

→ Toutefois, il faut faire attention à rester dans le domaine de linéarité de l'ALI ($V_s < V_{SAT}$)

$$\Rightarrow \underline{E\left(A\theta + (A\theta)^2\right) < V_{SAT}}$$

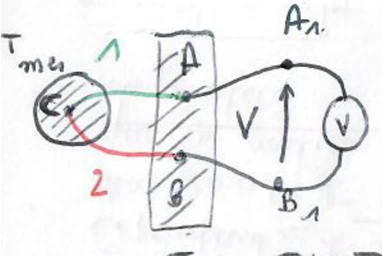
Si $R = R_0$, alors $\theta = 0$ et donc $\underline{\tilde{\sigma}_\theta = EA = 3{,}9\times 10^{-2}\ V.°C^{-1}}$

B Utilisation de fonctions thermoélectriques pour la thermométrie

50) $V = V_A - V_B$

$\widehat{AB} = \ell$ ↓ si α ne dépend pas de T ...

$V_A - V_B = -\alpha(T_A - T_B)$ (rappel de Q36)



$T_{ref} = T(A) = T(B)$
$= T(A_1) = T(B_1)$

On a : $\vec{0} = -\gamma\,\vec{grad}(V) - \alpha\gamma\,\vec{grad}(T)$

$\Leftrightarrow \alpha\,\vec{grad}(T) + \vec{grad}(V) = \vec{0}$

Le voltmètre ayant une impédance ∞, on se place en circuit ouvert

Intégrons entre A_1 et B_1.

$$\int_{A_1}^{B_1} \underbrace{\alpha\,\vec{grad}(T)\cdot\vec{d\ell}}_{=dT} + \int_{A_1}^{B_1} \underbrace{\vec{grad}(V)\cdot\vec{d\ell}}_{=dV} = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{T(A_1)}^{T(B_1)} \alpha\, dT + \int_{V(A_1)}^{V(B_1)} dV = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\cancel{\int_{T(A_1)}^{T(A)} \alpha_{Cu}\, dT}}_{=0} + \int_{T(A)}^{T(C)} \alpha_1(T)\, dT + \int_{T(C)}^{T(B)} \alpha_2(T)\, dT + \underbrace{\cancel{\int_{T(B)}^{T(B_1)} \alpha_{Cu}\, dT}}_{=0}$$

$$+ \underbrace{\cancel{\int_{V(A_1)}^{V(A)} dV}}_{=0} + \int_{V(A)}^{V(C)} dV + \int_{V(C)}^{V(B)} dV + \underbrace{\cancel{\int_{V(B)}^{V(B_1)} dV}}_{=0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{T_{ref}}^{T_{mes}} \alpha_1(T)\, dT + \int_{T_{mes}}^{T_{ref}} \alpha_2(T)\, dT + \underbrace{\int_{V(A)}^{V(B)} dV}_{=-V} = 0$$

$$\Leftrightarrow V = \int_{T_{ref}}^{T_{mes}} \alpha_1(T)\, dT - \int_{T_{ref}}^{T_{mes}} \alpha_2(T)\, dT$$

$$\Leftrightarrow \underline{V = \int_{T_{ref}}^{T_{mes}} \left(\alpha_1(T) - \alpha_2(T)\right) dT}$$

$V \propto T_{mes} - T_{ref} = \Delta T$
ssi $\alpha_1(T) - \alpha_2(T) = cte$
i.e $\underline{\alpha_1 \text{ et } \alpha_2 \text{ ne dépendent pas de T}}$

51] On peut utiliser un bain de glace fondante.
Cependant, l'eau doit être pure pour que le changement d'état se fasse à 0°C et, il faut que le milieu soit agité pour homogénéiser sa température.

52] La sensibilité des thermocouples J, E et K est globalement meilleure que les thermocouples B et S
& pour $\theta \geq 0°C$. Cependant B et S explorent plus de températures
53] La sensibilité est identique pour tous les thermocouples pour $\theta \leq 0°C$

La sensibilité est bien meilleure comparée à celle de la thermorésistance couplée à un pont de Wheatstone, et relativement comparable au montage thermorésistance ALI₁ et ALI₂. Cependant, la thermorésistance ne permet pas d'explorer le domaine $\theta \leq 0°C$ contrairement au thermocouple, ce qui rend celui-ci meilleur.

Thermocouples B et S	AVANTAGES	INCONVENIENTS
Argument	⊕ : exploration d'une plus grande gamme de T°	⊖ prix
	⊕ : bonne sensibilité	⊖ moins sensible que les thermocouples J, E, K mais chers pour $T \in [0; 1300]°C$

54] – Effet Peltier : réfrigérateurs
– Effet Thomson : exploration spatiale, notamment pour alimenter les sondes

NB : Pour toute remarque, écrire à l'adresse mail hugo.rondin-khouya@ac-versailles.fr